

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

1. $\Rightarrow$: On suppose que $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : $(X, Y) \mapsto (X | Y) = X^T Y$ et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

Selon le théorème spectral, S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses sous espace propres sont deux à deux orthogonaux

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A (éléments de $\mathbb{R}_+^*$) et on a $\bigoplus_{1 \leq i \leq r}^\perp E_{\lambda_i}(S) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On peut écrire $X = \sum_{i=1}^r X_i$ où les $X_i \in E_{\lambda_i}(S)$ sont non tous nuls

On a donc

$$X^T S X = (X | S X) = \left(\sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r S X_j \right) = \left(\sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r \lambda_j X_j \right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_j (X_i | X_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$$

$\Leftarrow$: On suppose $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T S X > 0$

Soit λ une valeur propre de S . On considère X un vecteur colonne propre de S associé à λ .

On a $X^T S X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$

ainsi $\lambda \|X\|^2 > 0$ or $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc $\lambda > 0$

Conclusion : On a montré

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T S X > 0$$

2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Je note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ les valeurs propres de S comptées avec multiplicité

Le théorème spectral, nous fournit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A_s = \Omega^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Omega$

En prenant $R = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega$,

on a $R^2 = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2 \Omega = B$ car $\Omega \Omega^T = I_n$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ il existe } R \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } S = R^T R}$

Réciproquement soit $R \in GL_n(\mathbb{R})$. Posons $S = R^T R$.

On a $S^T = (R^T R)^T = R^T R = S$ donc $R^T R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

On a $X^T S X = (R X)^T R X = \|R X\|^2$

or $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, d'où $R X$ est non nul et ainsi $\|R X\|^2 > 0$

$\boxed{\text{On a montré que pour tout } R \in GL_n(\mathbb{R}), R^T R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

3. Soit S et $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in [0, 1]$.

On a $\lambda S + (1 - \lambda) T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel.

De plus Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

On a $X^T (\lambda S + (1 - \lambda) T) X = \lambda X^T S X + (1 - \lambda) X^T T X \geq 0$ par somme et produit.

Si $\lambda \neq 0$, alors $X^T (\lambda S + (1 - \lambda) T) X \geq \lambda X^T S X > 0$

et si $\lambda = 0$, alors $X^T (\lambda S + (1 - \lambda) T) X = X^T T X > 0$

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est convexe}}$

B. Autres préliminaires

4. En prenant $\Phi : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \in E$, on a $\text{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$

On remarque que Φ est continue par théorèmes généraux. De même les applications notées : $\varphi_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \lambda_i$ pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $S : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ sont continues car linéaires.

$$\text{Or } \mathcal{H} = \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^+) \right) \cap S^{-1}(\{1\})$$

donc $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ par intersection et car une image réciproque par une application continue d'un fermé est un fermé de l'ensemble de départ.

De plus $\mathcal{H}$ est borné car $\mathcal{H} \subset [0, 1]^{n+1}$

Ainsi $\mathcal{H}$ est une partie compacte car fermée-bornée en dimension finie

Par produit de compacts, $\mathcal{H} \times K^{n+1}$ est un compact.

Par image d'une partie compacte par une application continue $\text{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E

5. Utilisons l'indication en se donnant $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E .

Si $n = 1$, alors g est une homothétie de rapport noté λ et on a $\forall x \in E, \|g(x)\| = |\lambda| \|x\|$

Si $n > 1$. Soit alors $i \in \{2, \dots, n\}$.

On a $(e_1 + e_i | e_1 - e_i) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$ (diagonales du losange)

donc $0 = (g(e_1 + e_i) | g(e_1 - e_i)) = (g(e_1) + g(e_i) | g(e_1) - g(e_i)) = \|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2$

donc en notant $k = \|g(e_1)\|$, on a $k \geq 0$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, (g(e_i) | g(e_i)) = k^2$

et aussi pour tout $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}, (g(e_i) | g(e_j)) = 0$ car $(e_i | e_j) = 0$

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ où les x_i sont réels.

$$\text{On a } \|g(x)\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i g(e_i) \middle| \sum_{i=1}^n x_i g(e_i) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (g(e_i) | g(e_j))$$

$$\text{donc } \|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 k^2 = k^2 \|x\|^2$$

On a montré que $\boxed{\text{il existe un nombre réel positif } k \text{ tel que pour tout } x \in E, \|g(x)\| = k \|x\|}$

Si $k = 0$ alors g est la composée de l'homothétie de rapport 0 et l'identité.

Si $k \neq 0$, alors g est la composée de l'homothétie de rapport k et de $\frac{1}{k}g$

or $\frac{1}{k}g \in \mathcal{L}(E)$ et $\frac{1}{k}g$ conserve la norme donc il s'agit d'un endomorphisme orthogonal.

Dans tous les cas, $\boxed{g \text{ est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal}}$

6. D'après le cours, on sait que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Pour la compacité, il suffit d'établir le caractère fermé-borné car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On a $A^T A = I_n$ donc $\|A\|_2 = \sqrt{(A|A)} = \sqrt{n}$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne.

Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\psi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$ est continue car polynomiale en les coefficients de l'argument.

Donc $O_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{I_n\})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d'où $\boxed{\text{le groupe orthogonal } O_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact du groupe linéaire } GL_n(\mathbb{R})}$

C. Quelques propriétés de la compacité

7. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente.

Ainsi la suite $(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ converge vers 0

ceci nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, on ait $\|x_{\varphi(p+1)} - x_{\varphi(p)}\| \geq \varepsilon$

Absurde

Ainsi cette suite n'admet aucune suite extraite convergente

8. Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fausse,

ceci nous fournit $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de E on ait $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$

On va construire par récurrence :

une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout entier naturel $n \neq p$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$

Par hypothèse, on a $K \not\subseteq B(a_1, \varepsilon)$ pour tout $a_1 \in E$, ce qui nous fournit $x_1 \in K \setminus B(a_1, \varepsilon)$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose construits $x_1, \dots, x_k \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$

On a alors $K \setminus \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$

ce qui nous fournit $x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entiers naturels $n \neq p \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$

La suite ainsi construite $(x_k)_{k \geq 1}$ vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$

D'après 7, cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence

Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K , ce qui est absurde

Ainsi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$

9. Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$, tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x, \alpha) \not\subseteq \Omega_i$.

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in K$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x_n, 1/n) \not\subseteq \Omega_i$.

La suite (x_n) à valeurs dans le compact K admet une extractrice qui $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in K$.

Comme $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in I$ tel que $\ell \in \Omega_j$.

Comme Ω_j est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_j$.

Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ , ceci nous fournit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq r/3$

Comme $\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0, ceci nous fournit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $\frac{1}{\varphi(n)} \leq r/3$

On pose $p = \max(\varphi_{N_1}, \varphi_{N_2})$

et comme $2r/3 < r$, on a d'après l'inégalité triangulaire : $B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subset B(\ell, r)$

ce qui absurde par construction de de la suite (x_n) . Ainsi

il existe un réel noté $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i

Lors de la question précédente, on pouvait obtenir de façon analogue l'existence d'un entier $p > 0$ et $x_1, \dots, x_p$

éléments de K (*preuve identique que pour* E) tels que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^p B(x_j, \varepsilon)$

Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, ce qui est fait au dessus nous fournit $i_j \in I$ tel que $B(x_j, \alpha) \subseteq \Omega_{i_j}$

d'où l'existence d'une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$

10. Je note pour $i \in I$, $O_i = E \setminus F_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire et on a $K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$

La question précédente nous fournit une sous famille finie $(O_{i_1}, \dots, O_{i_p})$ telle que $K \subseteq \bigcap_{k=1}^p O_{i_k}$.

On a donc $K \cap \left(\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \right) = \emptyset$

Comme pour tout $i \in I$, on a $F_i \subset K$: la sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ vérifie $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

11. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons : $\left\{ \begin{array}{ll} (i) & N_G(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}^+ \text{ (aspect bien défini et positivité)} \\ (ii) & N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y) \text{ (inégalité triangulaire)} \\ (iii) & N_G(\lambda x) = |\lambda| \cdot N_G(x) \text{ (homogénéité)} \\ (iv) & N_G(x) = 0 \implies x = 0 \text{ (caractère défini)} \end{array} \right.$

Pour (i) : L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u(x) \in E$ est linéaire et $\dim(\mathcal{L}(E)) < +\infty$ donc elle est continue.

Ainsi cette application est bornée sur le compact G

donc $\{\|u(x)\| / u \in G\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}^+$

d'où l'existence dans $\mathbb{R}^+$ de $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$.

Pour (ii) : Soit $u \in G$. On a : $\|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$.

donc $\|u(x+y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$

Comme c'est vrai pour tout $u \in G$, on a bien $N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)$

Pour (iii) : Si $\lambda = 0$, on a l'égalité car $N_G(\lambda x) = 0 = |\lambda| \cdot N_G(x)$

On suppose $\lambda \neq 0$.

Soit $u \in G$. On a $\|u(\lambda x)\| = |\lambda| \cdot \|u(x)\| \leq |\lambda| \cdot N_G(x)$

Comme c'est vrai pour tout u de G , on obtient : $N_G(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot N_G(x)$

On applique cette inégalité au scalaire $1/\lambda$ et au vecteur λx : $N_G(x) \leq |1/\lambda| \cdot N_G(\lambda x)$

donc $N_G(\lambda x) \geq |\lambda| \cdot N_G(x)$

D'où l'égalité.

Pour (iv) : On suppose $N_G(x) = 0$.

Donc $\forall u \in G$, $\|u(x)\| = 0$ en particulier pour $u = \text{Id}_E$ car G sous groupe de $\text{GL}(E)$.

donc $x = 0$

On a montré que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E

12. • Soit $u \in G$ et $x \in E$.

L'application $v \mapsto v \circ u$ est une bijection du groupe G dans lui-même de bijection réciproque $v \mapsto v \circ u^{-1}$

donc $N_G(u(x)) = \sup_{v \in G} \|v \circ u(x)\| = \sup_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x)$.

Ainsi pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$

• Soit $x, y \in E$ tel que x est non nul.

$\Leftarrow$: On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda x = y$.

Pour tout $u \in G$, on a $\|u(x+y)\| = (1+\lambda) \cdot \|u(x)\|$ car $1+\lambda \geq 0$

En faisant comme pour l'homogénéité, on obtient : $N_G(x+y) = (1+\lambda)N_G(x)$

donc $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ car $\lambda \geq 0$ et N_G est une norme

$\Rightarrow$: On suppose que $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$.

Le théorème des bornes atteintes avec l'application continue définie sur le compact $G : u \mapsto \|u(x)\|$ nous fournit $v \in G$ tel que $N_G(x + y) = \|v(x + y)\|$

On note $x' = v(x)$ et $y' = v(y)$ de sorte que : $N_G(x + y) = \|x' + y'\|$

et avec ce qui précède, on a $N_G(x) + N_G(y) = N_G(x') + N_G(y')$

donc $\|x' + y'\| = N_G(x') + N_G(y')$

Ainsi $N_G(x') + N_G(y') \leq \|x'\| + \|y'\|$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$

or $N_G(x') \geq \|x'\|$ et $N_G(y') \geq \|y'\|$ car $\text{Id}_E \in G$

donc $\|x' + y'\| = N_G(x') + N_G(y') = \|x'\| + \|y'\|$

En élevant au carré on trouve après simplification : $2(x' | y') = 2\|x'\| \times \|y'\|$ (*)

donc (x', y') lié d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

comme $x' \neq 0$ car $v \in \text{GL}(E)$, ceci nous fournit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x' = y'$ (**)

En injectant dans (*) : $2\lambda \cdot \|x'\|^2 = 2|\lambda| \cdot \|x'\|^2$

d'où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ car $\|x'\| > 0$.

En appliquant v^{-1} à (**), on a : $\lambda x = y$. On bien :

pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$

13. Soit $x \in K$.

Comme K est stable par u , on montre par récurrence sur i que $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Ainsi x_n est le barycentre du système pondéré $((u^i(x), 1))_{0 \leq i \leq n-1}$ à coefficients positifs,

comme K est convexe, on a $x_n \in K$.

Ainsi comme K est compact :

la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et admet une suite extraite convergente vers un élément a de K

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n} \|u^n(x) - x\|$

donc $\|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}$ car x et $u^n(x) \in K$

Notons φ une extractrice telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\delta(K)}{\varphi(n)}$ et de plus $\frac{\delta(K)}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Comme l'application $y \mapsto u(y) - y$ est continue (linéaire en dimension finie),

alors $(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)})$ converge vers $u(a) - a = 0$, ainsi l'élément a de K est un point fixe de u

14. Soit $x \in K$. $u(x)$ est le barycentre $((u_i(x), 1))_{1 \leq i \leq r}$ de points de K affectés de coefficients positifs

donc $u(x) \in K$ car K convexe ainsi K est stable par u Comme $u \in \mathcal{L}(E)$, par combinaison linéaire,

on peut appliquer 13, pour en déduire : l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$

15. Comme $u(a) = a$, on a $N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(u(a)) = N_G(a)$

et d'après le premier point de 12, on a $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ pour tout $1 \leq i \leq r$

d'où $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = \frac{r}{r} N_G(a)$. On a bien $N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$

Ainsi par homogénéité : $N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$ car $r \geq 0$

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. Avec ce qui précède et en utilisant l'inégalité triangulaire pour N_G , on a :

$$N_G \left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right) \leq N_G(u_j(a)) + N_G \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right) \leq \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = N_G \left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right)$$

donc on a bien
$$N_G \left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right) = N_G(u_j(a)) + N_G \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right)$$

16. Soit $j \in \{1, \dots, r\}$.

On suppose dans un premier temps que $u_j(a)$ est un vecteur non nul de E .

En appliquant le deuxième point de 12, à la question précédente,

on obtient l'existence de $\lambda_j \geq 0$ tel que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$

donc $ru(x) = \lambda_j u_j(a) + u_j(a)$ ce qui permet de conclure dans ce cas car $r > 0$

Dans un deuxième temps, si $u_j(a)$ est le vecteur nul de E alors $a = 0$ car $u_j \in GL(E)$

et en prenant $\lambda_j = 1$ on a $u(a) = 0$ et $\frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a) = 0$ car u et u_j linéaires

pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$ dans tous les cas.

17. On suppose par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que a ne soit pas un point fixe de l'endomorphisme u_i .

On a : $a = u(a) = \frac{\lambda_i + 1}{r} u_i(a)$ donc $u_i(a) = \mu a$ où $\mu = \frac{r}{\lambda_i + 1} > 0$ car $r > 0$ et $\lambda_i \geq 0$

On a donc $\mu \neq 1$ et $a \neq 0$.

Premier cas : si $\mu > 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_i^k(a) = \mu^k a$

Comme K est stable par u_i alors la suite $(u_i^k(a))_k$ est à valeurs dans K (récurrence immédiate)

Comme K est bornée car compact, alors cette suite est bornée. Or $\|u_i^k(a)\| = \mu^k \cdot \|a\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Absurde.

Deuxième cas : si $\mu < 1$, alors on a $u_i^{-1}(a) = \frac{1}{\lambda} a$ où $\frac{1}{\lambda} > 1$ et K est stable par l'automorphisme u_i^{-1}

En faisant comme dans le cas précédent avec u_i^{-1} , on arrive à une absurdité de façon analogue.

Ainsi a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \dots, r\}$

18. On note pour $u \in G$, $F_u = \{a \in K / u(a) = a\}$.

Comme pour $u \in G$, $u - \text{Id}_E$ est continue (linéaire en dimension finie),

alors $F_u = (u - \text{Id}_E)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K (image réciproque de fermé par une application continue)

Comme K est un fermé de E (car compact de E) et $F_u \subset K$, alors F_u est un fermé de E

Remarque : on aurait pu aussi remarquer que $F_u = K \cap \{a \in E / u(a) = a\}$

On suppose par l'absurde que : $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$,

la question 10, nous fournit $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p \in G$ tels que $\bigcap_{i=1}^p F_{u_i} = \emptyset$

Ceci est contradictoire avec la question précédente ainsi $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$.

Ce qui nous fournit $a \in \bigcap_{u \in G} F_u$ Ainsi $\boxed{\text{il existe bien } a \in K \text{ tel que pour tout } u \in G, u(a) = a}$

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

19. Soit $A \in G$. Montrons : $\begin{cases} (a) & \rho_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (b) & \rho_A \text{ linéaire} \\ (c) & \rho_A \text{ bijective} \end{cases}$

Pour (a) C'est évident

Pour (b) On vérifie par calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \rho_A(\lambda M + N) = \lambda \rho_A(M) + \rho_A(N)$$

Pour (c) Soit $B, C \in G$.

Par calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a vérifié facilement que $\rho_B \circ \rho_C = \rho_{CB}$ car $B^T C^T = (CB)^T$

On a également $\rho_{I_n} = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et l'existence A^{-1} car $G \subset GL_n(\mathbb{R})$.

donc $\rho_A \circ \rho_{A^{-1}} = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\rho_{A^{-1}} \circ \rho_A = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Ce qui prouve que ρ_A est bijective

On a montré que $\rho_A \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Montrons maintenant que l'application notée $\Lambda : A \in G \longmapsto \rho_A \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est continue.

On se donne $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application ψ qui à $f = (f_1, \dots, f_{n^2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{(n^2)}$ associe l'application $\psi(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket, \psi(f)(e_i) = f_i$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel donc linéaire entre espaces de mêmes dimensions finies (n^4).

Ainsi l'application ψ est continue.

L'énoncé donne que à $M \in G$ fixé, l'application : $A \in G \longmapsto \rho_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.

Donc l'application notée $\varphi_B : A \in G \longmapsto (\rho_A(e_1), \dots, \rho_A(e_{n^2})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{(n^2)}$ est continue

Ainsi $\Lambda = \psi \circ \varphi_B$ est continue par composition.

Comme $H = \Lambda(G)$, alors H est un compact en tant qu'image d'un compact par une application continue.

Pour établir que H est sous-groupe de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que : $\begin{cases} (i) & H \subset GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ (déjà vu)} \\ (ii) & H \neq \emptyset \\ (iii) & \text{Les stabilités de } H \end{cases}$

Pour (ii) On a $I_n \in G$ car G sous-groupe.

Donc $\rho_{I_n} = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in H$ ainsi H est non-vide

Pour (iii) Soit $\rho_A, \rho_B \in H$ où $A, B \in G$.

On a vu en (c) que $(\rho_A)^{-1} \circ \rho_B = \rho_{BA^{-1}}$

Comme G est un sous-groupe alors $BA^{-1} \in G$ et donc $(\rho_A)^{-1} \circ \rho_B \in H$.

On a bien montré que H est un sous-groupe compact de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Remarque : On aurait pu montrer que pour loi de composition interne $\perp$ définie sur G par : $A \perp B = BA$ que $(G, \perp)$ est un groupe, que Λ est un morphisme de groupes de $(G, \perp)$ dans $(GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})), \circ)$ et que $H = \text{Im}(\Lambda)$ et ainsi que H est un sous-groupe de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

20. On a $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ donc en utilisant la réciproque de 2, on a $\Delta \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$.

L'application notée $\Phi : A \in G \longmapsto \rho_A(I_n) = A^T A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue d'après l'énoncé ainsi $\Delta = \Phi(G)$ est compact car G l'est.

d'où Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Il suffit d'établir que : $\begin{cases} (i) & K = \text{Conv}(\Delta) \text{ est compact (oui avec 4.)} \\ (ii) & H \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ (iii) & K \text{ stable par les éléments } H \end{cases}$

Pour (ii) : D'après 3, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui de plus contient Δ

Comme K est le plus petit convexe contenant Δ alors $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque : le plus petit convexe contenant une partie est bien défini car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et que l'intersection d'une famille de convexes est convexe.

Pour (iii) : Soit $M \in K$ et $\rho_A \in H$ où $A \in G$. Montrons $\rho_A(M) \in K$.

D'après ce qui est admis en introduction, on peut écrire $M = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i B_i$

où $(B_1, \dots, B_{n^2+1}) \in \Delta^{n^2+1}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n^2+1}$ et $M = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i = 1$

Par linéarité de ρ_A : $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i)$

Pour $1 \leq i \leq n^2 + 1$, on peut écrire $B_i = (C_i)^T C_i$ où $C_i \in G$, ainsi $\rho_A(B_i) = A^T (C_i)^T C_i A = (C_i A)^T C_i A$ or $C_i A \in G$ car G est un groupe et donc $\rho_A(B_i) \in \Delta$

d'où $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i) \in \text{Conv}(\Delta) = K$.

On a montré que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H

21. Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Markov-Kakutani au convexe compact K de l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est stable par tous élément du sous groupe compact H de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que K est non vide. C'est bien le cas car comme $I_n \in G$, on a $\{I_n^T I_n\} \subset \Delta \subset K$.

Le théorème nous fournit alors $a \in K$, tel que $\forall u \in H, u(a) = a$

ou encore : il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G, \rho_A(M) = M$

Comme $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, 2 nous fournit $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = N^T N$.

Soit $A \in G$. On a alors $A^T N^T N A = N^T N$ car $\rho_A(M) = M$.

Alors on a $(N A N^{-1})^T N A N^{-1} = (N^{-1})^T A^T N^T N A N^{-1} = (N^T)^{-1} N^T N N^{-1} = I_n$

On en déduit l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G, N A N^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

Considérons l'application $\psi_N : A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto N A N^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$

On vérifie que ψ_N est un morphisme de groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ vers lui-même.

On note $G_1 = \psi_N(G)$ qui est donc un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ car G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

Comme $\psi_N(G) \subset O_n(\mathbb{R})$ alors G_1 est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$. On remarque de plus que ψ_N est bijectif de bijection réciproque $\psi_{N^{-1}} : A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto N^{-1} A N \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $G = \psi_{N^{-1}}(G_1)$.

Finalement il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1} G_1 N = \{N^{-1} B N / B \in G_1\}$

22. $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie car $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $g^2 = \text{Id}_E$ car σ_P est une symétrie

On note A la matrice de σ_P dans la base canonique qui est orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et donc $A \in O_n(\mathbb{R}) \subset K$ Ainsi $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ admet comme matrice dans cette base $N A N^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ donc c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ d'où $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie orthogonale. De plus $\forall x \in E$,

$g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \sigma_P(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \in P \Leftrightarrow x \in g(P)$. On en déduit que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$.

Soit $x \perp y$ dans E . Si $x \neq 0$. Alors $y \in Q = \{x\}^\perp$, hyperplan de E et $g \circ \sigma_Q \circ g^{-1} = \sigma_{g(Q)}$

alors $\sigma_{g(Q)}(g(x)) = g \circ \sigma_Q(x) = -g(x)$ donc $g(x) \in g(Q)^\perp$ or $g(y) \in g(Q)$ donc $g(x) \perp g(y)$ (vrai pour $x = 0$)

Ainsi g conserve l'orthogonalité et 5 nous fournit $k > 0$ tel que $N = k\Omega$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ car $N \in GL_n(\mathbb{R})$

donc Ω est tel que $\Omega K \Omega^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. 21 nous fournit G_1 sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $K = \Omega^{-1} G_1 \Omega \subset O_n(\mathbb{R})$

on en déduit $K = O_n(\mathbb{R})$