

ECOLE POLYTECHNIQUE 2018 MP - MATHS B

autobox

4 février 2021

Partie I

1)a) Supposons que $x'(s) = 0$. Alors x est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x(s) = x''(s) & = 0 \\ x'(s) & = 0 \\ x'' - px & = 0 \end{cases}$$

sur $[0, 1]$, mais également sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ce problème admet d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz une unique solution maximale et 0 est une autre solution. Par conséquent x est la fonction nulle, ce qui contredit l'énoncé.

1)b) Supposons que $\mathcal{Z}$ ne soit pas un ensemble fini. Alors il existe une suite (s_n) d'éléments de $[0, 1]$ qui annulent x et x'' , mais pas x' d'après le 1)a). Cette suite est bornée donc admet une sous-suite non constante $(s_{\phi(n)})$ que nous continuerons d'appeler (s_n) , qui converge vers un réel $s \in [0, 1]$, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

En utilisant la continuité de x , il vient $x(s) = 0$, c'est-à-dire que $s \in \mathcal{Z}$. Or, x est dérivable en s et

$$x'(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(s) - x(s_n)}{s - s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

va à l'encontre du 1)a). Donc $|\mathcal{Z}| < \infty$

2)a) w est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produits de fonctions C^1 et pour tout réel t , on a

$$\begin{aligned} w'(t) &= y'(t)x'(t) + y(t)x''(t) - y''(t)x(t) - y'(t)x'(t) \\ &= y(t)x''(t) - y''(t)x(t) \\ &= y(t)p(t)x(t) - q(t)y(t)x(t) \\ &= x(t)y(t)(p(t) - q(t)) \end{aligned}$$

Puisque $p > q$ sur $[0, 1]$, $w' > 0$ sur $[0, 1]$, donc w est strictement croissante sur $[0, 1]$, et comme $a_{j+1} > a_j$, on a bien $w(a_{j+1}) > w(a_j)$.

La fonction x s'annulant en chaque a_i , cette inégalité équivaut à $y(a_{j+1})x'(a_{j+1}) > y(a_j)x'(a_j)$.

Or, comme au 1)b), $x'(a_j) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(a_j + h)}{h}$ est un réel (strictement d'après 1)a))

positif alors que $x'(a_{j+1}) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(a_{j+1} + h)}{h}$ est un réel (strictement) négatif.

La fonction y étant strictement positive, l'inégalité stricte sur w est absurde.

2)b) Supposons que y soit de signe constant et strict sur $]a_j, a_{j+1}[$. Alors quitte à recommencer le 2) avec $-x$ et/ou $-y$ (qui sont également solutions de (1) et (3)), nous retombons dans la situation du 2)a), qui mène à une contradiction. Par conséquent, y s'annule sur $]a_j, a_{j+1}[$.

Partie II

3)a) f est continue donc φ est de classe C^1 comme produit d'une primitive de fonction continue et d'une fonction exponentielle et pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= e^{-tb} \left(-b \left(a + b \int_0^t f(s) ds \right) + bf(t) \right) \\ &= be^{-tb} \left(f(t) - \left(a + b \int_0^t f(s) ds \right) \right)\end{aligned}$$

est de signe négatif. Donc φ est décroissante, donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$f(t) \leq a + b \int_0^t f(s) ds = e^{tb} \varphi(t) \leq e^{tb} \varphi(0) = ae^{tb}$$

3)b) La fonction X est C^1 et le théorème fondamental de l'analyse et l'inégalité triangulaire donnent pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|X(t) - X(0)\| &\leq \left\| \int_0^t X'(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|X'(s)\| ds \\ &\leq \int_0^t a + b \|X(s)\| ds \\ &\leq at + b \int_0^t \|X(s)\| ds \\ &\leq aT + b \int_0^t \|X(s)\| ds\end{aligned}$$

D'où $\|X(t)\| \leq \|X(0)\| + aT + b \int_0^t \|X(s)\| ds$.

En adaptant la preuve du lemme de Gronwall démontré au 3)a) à l'intervalle $[-T, T]$ et en majorant e^{bt} par $e^{b|t|}$, on obtient l'inégalité demandée.

4) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{M,P}(\mathbb{R})$. Le produit AB est bien défini et

$$\begin{aligned}\|AB\| &\leq \sup_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^M |A_{i,j}| |B_{j,k}| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^M |A_{i,j}| \underbrace{\sum_{k=1}^P |B_{j,k}|}_{\leq \sup_j \sum_k \dots} \quad (\text{sommes finies à T.P, Fubini-Tonelli}) \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq N} \left(\sum_{j=1}^M |A_{i,j}| \right) \times \sup_{1 \leq j \leq M} \left(\sum_{k=1}^P |B_{j,k}| \right) \quad (\text{le sup sur } j \text{ ne dépend pas de } i) \\ &\leq \|A\| \|B\|\end{aligned}$$

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. X_λ est C^1 comme vecteur de composantes C^1 . Moins directement, on peut aussi voir que pour tous réels t, s ,

$$\|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| = \max(|x_\lambda(t) - x_\lambda(s)|, |x'_\lambda(t) - x'_\lambda(s)|) \leq |x_\lambda(t) - x_\lambda(s)| + |x'_\lambda(t) - x'_\lambda(s)|$$

tend vers 0 lorsque s tend vers t (par continuité de x_λ et x'_λ en t), ce qui prouve la continuité de X_λ en t . De même, X'_λ s'obtient en dérivant chaque composante (parce que continuité de l'addition et de la multiplication par un scalaire + linéarité) et la continuité de x'_λ et x''_λ en t permet de conclure au même résultat sur X'_λ . D'où $X_\lambda \in C^1$.

En posant pour tous réels λ et t , $A_\lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(t) - \lambda & 0 \end{pmatrix}$, on définit pour les mêmes raisons une fonction continue en ses deux variables et telle que

$$X'_{\cdot 1}(\cdot 2) = A_{\cdot 1}(\cdot 2) \cdot X_{\cdot 1}(\cdot 2)$$

6) Pour tous $(\lambda, t) \in [-R, R]^2$,

$$\|A_\lambda(t)\| = 1 \vee |p(t) - \lambda| \leq 1 + |\lambda| + \|p\|_\infty \leq 1 + R + \|p\|_\infty < \infty$$

parce que p est une fonction continue, donc bornée sur $[-R, R]$. c est bien défini. D'autre part, $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre et $\|X'_\lambda(t)\| = \|A_\lambda(t)X_\lambda(t)\| \leq c\|X_\lambda(t)\|$. En appliquant 3)b) avec $X = X_\lambda$, $T = R$, $a = 0$ et $b = c$, il vient

$$\|X_\lambda(t)\| \leq \|X_\lambda(0)\|e^{c|t|}$$

C'est effectivement l'inégalité cherchée parce que $X_\lambda(0) = \begin{pmatrix} x_\lambda(0) \\ x'_\lambda(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est de norme 1.

7)a)

$$\begin{aligned} \|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| &\leq \left\| \int_s^t X'_\lambda(u) du \right\| \\ &\leq \int_s^t \|X'_\lambda(u)\| du \\ &\leq \int_s^t \|A_\lambda(u)\| \|X_\lambda(u)\| du \\ &\leq c \int_s^t e^{c|u|} du \\ &\leq c \int_s^t e^{cR} du \quad \text{car } |u| \leq |t| \vee |s| \leq R \text{ et } c \geq 0 \\ &\leq ce^{cR}|t - s| \end{aligned}$$

7)b) $X = X_\lambda - X_\mu$ est C^1 et

$$\begin{aligned} \|X'(t)\| &= \|A_\lambda(t)X_\lambda(t) - A_\mu(t)X_\mu(t)\| \\ &= \|A_\lambda(t)(X_\lambda(t) - X_\mu(t)) + (A_\lambda(t) - A_\mu(t))X_\mu(t)\| \\ &\leq \|A_\lambda(t)\| \|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| + \|A_\lambda(t) - A_\mu(t)\| \|X_\mu(t)\| \\ &\leq c\|X(t)\| + |\lambda - \mu|e^{cR} \quad \text{d'après 6)} \end{aligned}$$

D'où d'après 3)b),

$$\begin{aligned}\|X(t)\| &\leq (0 + |\lambda - \mu|e^{cR} \times R) \times e^{cR} \\ &\leq Re^{2cR}|\lambda - \mu|\end{aligned}$$

7)c) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R = R(\varepsilon) > 0$. Soit $(\lambda, \mu, s, t) \in [-R, R]^4$. En combinant 7)a) et 7)b) on a

$$\begin{aligned}\|\Phi(\lambda, t) - \Phi(\mu, s)\| &= \|X_\lambda(t) - X_\mu(s)\| \\ &= \|X_\lambda(t) - X_\mu(t) + X_\mu(t) - X_\mu(s)\| \\ &\leq \|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| + \|X_\mu(t) - X_\mu(s)\| \\ &\leq Re^{2cR}|\lambda - \mu| + ce^{cR}|t - s| \\ &\leq \max(Re^{2cR}, ce^{cR}) \max(|t - s|, |\lambda - \mu|) \\ &\leq \max(Re^{2cR}, ce^{cR}) \left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ s \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq K(R) \left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ s \end{pmatrix} \right\|\end{aligned}$$

avec $K(R)$ une constante positive ne dépendant que de R et donc, que de ε .

En particulier quand (λ, t) et (μ, s) sont proches à $\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{K(\varepsilon)}$ près, leurs images par Φ sont proches à ε près. D'où la continuité de Φ partout sur $\mathbb{R}$.

8)a) p est continue donc uniformément continue sur $[-R, R]$ d'après le théorème de Heine, donc a un module de continuité croissant qui tend vers 0 en 0.

Preuve de l'assertion : Soit $\varepsilon > 0$. Soit ω la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\omega(x) := \sup\{|p(t) - p(s)| : |t - s| \leq x\}$$

Fonction bien définie car l'ensemble $\{|p(t) - p(s)| : |t - s| \leq x\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On a clairement l'inégalité souhaitée, puisque pour tous t, s , $|t - s| \leq |t - s|$ est vrai et donc $\omega(|t - s|)$ majore $|p(t) - p(s)|$.

ω est aussi clairement croissante puisque si $x \leq y$, alors

$$\{|p(t) - p(s)| : |t - s| \leq x\} \subseteq \{|p(t) - p(s)| : |t - s| \leq y\}$$

et donc $\omega(x) \leq \omega(y)$.

ω tend bien vers 0 en 0 puisque si $\varepsilon > 0$, par uniforme continuité il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tq pour tous $x, y \in [-R, R]$ tq $|x - y| \leq \eta(\varepsilon)$, $|p(x) - p(y)| < \varepsilon$. Dit autrement, $\sup\{|p(x) - p(y)| : |x - y| \leq \eta\} \leq \varepsilon$, ou encore, $\omega(\eta) \leq \varepsilon$. Comme ω est croissante, pour tout $r < \eta$, on aura $\omega(r) \leq \omega(\eta) \leq \varepsilon$ et donc ω tend vers 0.

Enfin, la continuité est une conséquence de la sous-additivité de ω . On a en effet pour tous $x, h \in \mathbb{R}_+$ l'inégalité $\omega(x + h) \leq \omega(x) + \omega(h)$, et donc (croissance)

$$|\omega(x + h) - \omega(x)| = \omega(x + h) - \omega(x) \leq \omega(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

et de même $|\omega(x) - \omega(x - h)| \leq \omega(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$.

La preuve de la sous-additivité tient en quelques lignes

$$\begin{aligned}
 \omega(x+h) &= \sup_{|t-s| \leq x+h} |p(t) - p(s)| \\
 &\leq \sup_{|t-s| \leq x+h} \left| p(t) - p\left(\frac{xt+hs}{x+h}\right) \right| + \left| p\left(\frac{xt+hs}{x+h}\right) - p(s) \right| \\
 &\leq \omega(h) + \omega(x)
 \end{aligned}$$

8)b) Soient $\lambda, s, t \in [-R, R]$,

$$\begin{aligned}
 \|X_\lambda(t) - X_\lambda(s) - (t-s)A_\lambda(s)X_\lambda(s)\| &= \left\| \int_s^t X'_\lambda(u) - A_\lambda(s)X_\lambda(s) du \right\| \\
 &\leq \int_s^t \|X'_\lambda(u) - A_\lambda(s)X_\lambda(s)\| du \\
 &\leq \int_s^t \|A_\lambda(u)X_\lambda(u) - A_\lambda(s)X_\lambda(s)\| du \\
 &\leq \int_s^t \|A_\lambda(u)(X_\lambda(u) - X_\lambda(s)) + (A_\lambda(u) - A_\lambda(s))X_\lambda(s)\| du \\
 &\leq c^2 e^{cR} \int_s^t |u-s| du + \int_s^t |p(u) - p(s)| e^{cR} du \\
 &\leq c^2 e^{cR} \frac{(t-s)^2}{2} + e^{cR} \int_s^t \omega(|u-s|) du \\
 &\leq c^2 e^{cR} \frac{(t-s)^2}{2} + e^{cR} \omega(|t-s|)|t-s| \quad (\omega \text{ croissante}) \\
 &\leq \alpha(|t-s|)
 \end{aligned}$$

où $\alpha(r) := c^2 e^{cR} \frac{r^2}{2} + e^{cR} r \omega(r)$ définit une fonction continue tq $\frac{\alpha(r)}{r} \rightarrow 0$

8)c) Soient $t, \lambda, \mu \in [-R, R]$. $X = X_\lambda - X_\mu - (\lambda - \mu)Y_\mu$ est dérivable et

$$\begin{aligned}
 X'(t) &= X'_\lambda(t) - X'_\mu(t) - (\lambda - \mu)Y'_\mu(t) \\
 &= A_\lambda(t)X_\lambda(t) - A_\mu(t)X_\mu(t) - (\lambda - \mu)A_\mu(t)Y_\mu(t) - (A_\lambda(t) - A_\mu(t))X_\mu(t) \\
 &= A_\lambda(t)(X_\lambda(t) - X_\mu(t)) - (\lambda - \mu)A_\mu(t)Y_\mu(t) \\
 &= (A_\lambda(t) - A_\mu(t))(X_\lambda(t) - X_\mu(t)) + A_\mu(t)(X_\lambda(t) - X_\mu(t) - (\lambda - \mu)Y_\mu(t)) \\
 &= A_\mu(t)X(t) + (A_\lambda(t) - A_\mu(t))(X_\lambda(t) - X_\mu(t))
 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
 \|X'(t)\| &\leq c\|X(t)\| + \|A_\lambda(t) - A_\mu(t)\|\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| \\
 &\leq c\|X(t)\| + |\lambda - \mu|R e^{2cR} |\lambda - \mu|
 \end{aligned}$$

Le 3)b) implique alors $\|X(t)\| \leq (0 + |\lambda - \mu|^2 R^2 e^{2cR}) e^{cR} \leq R^2 e^{3cR} |\lambda - \mu|^2$

8)d) En combinant ces inégalités de 8) et en notant $r = t - s$ et $h = \lambda - \mu$

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mu + h, s + r) - \Phi(\mu, s) - hY_\mu(s) - rA_\mu(s)X_\mu(s) &= X_\lambda(t) - X_\mu(s) - (\lambda - \mu)Y_\mu(s) - (t-s)A_\mu(s)X_\mu(s) \\
 &= X_\lambda(t) - X_\lambda(s) - (t-s)A_\mu(s)X_\mu(s) \\
 &\quad + X_\lambda(s) - X_\mu(s) - (\lambda - \mu)Y_\mu(s) \\
 &= X_\lambda(t) - X_\lambda(s) - (t-s)A_\lambda(s)X_\lambda(s) \\
 &\quad + X_\lambda(s) - X_\mu(s) - (\lambda - \mu)Y_\mu(s) \\
 &\quad + (t-s)(A_\lambda(s)X_\lambda(s) - A_\mu(s)X_\mu(s))
 \end{aligned}$$

En passant à la norme et à l'inégalité triangulaire, le premier terme est un $o(|r|)$ continu, le second est un $o(|h|)$, et le troisième est un $o(|r|)$ et un $o(|h|)$ à la fois puisque

$$\|A_\lambda X_\lambda - A_\mu X_\mu\|(s) = \|(A_\lambda - A_\mu)X_\lambda + A_\mu(X_\lambda - X_\mu)\|(s) \leq |h|(e^{cR} + cRe^{2cR})$$

Vu que la norme choisie est $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$, le tout est un $o(\|(h, r)\|)$. Par conséquent Φ est différentiable partout et

$$d\Phi(\mu, s)(h, r) = \nabla\Phi(\mu, s) \cdot (h, r) = (Y_\mu(s), X'_\mu(s)) \cdot (h, r)$$

9) Soient $t, \lambda \in \mathbb{R}$. On a en fait $B_\lambda = A_\lambda(t) - A_0(t)$. Donc on a aussi

$$X'_\lambda(t) = A_\lambda(t)X_\lambda(t) = B_\lambda X_\lambda(t) + A_0(t)X_\lambda(t) = B_\lambda X_\lambda(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ p(t)x_\lambda(t) \end{pmatrix}$$

D'abord, notons que l'exponentielle de B_λ est toujours bien définie et *relativement* facile à calculer car B_λ est nilpotente en $\lambda = 0$ (et son exponentielle en est une fonction affine), et diagonalisable (sur $\mathbb{C}$) partout ailleurs (2 valeurs propres distinctes en dimension 2).

Supposons que $\lambda = 0$ Alors $B_0^2 = 0$ et

$$e^{tB_0} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = (Id + tB_0) \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx \\ x \end{pmatrix}$$

pour tout x . On a aussi en faisant une IPP

$$\begin{aligned} t + \int_0^t (t-s)p(s)x_0(s)ds &= t + \int_0^t (t-s)x_0''(s)ds \\ &= t + t(x_0'(t) - 1) - tx_0'(t) + \int_0^t x'(s)ds \\ &= t(1 - x_0'(t)) + t(x_0'(t) - 1) + x_0(t) - 0 \\ &= x_0(t) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^t p(s)x_0(s)ds &= 1 + x_0'(t) - 1 \\ &= x_0'(t) \end{aligned}$$

donc l'équation est vérifiée dans le cas $\lambda = 0$.

On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$. On peut calculer que $B_\lambda^2 = -\lambda Id$, donc $B_\lambda^{2n} = (-\lambda)^n Id$ et $B_\lambda^{2n+1} = (-\lambda)^n B_\lambda$ pour tout n . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \exp(tB_\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B_\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} B_\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} B_\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} (-\lambda)^k}{(2k+1)!} B_\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} (-\lambda)^k}{(2k)!} Id \\ &=: u(t, \lambda) B_\lambda + v(t, \lambda) Id \end{aligned}$$

de sorte que $e^{tB_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t, \lambda) \\ v(t, \lambda) \end{pmatrix} x$ et

$$\begin{aligned} \exp(tB_\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \exp((t-s)B_\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ p(s)x_\lambda(s) \end{pmatrix} ds &= \begin{pmatrix} u(t, \lambda) \\ v(t, \lambda) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} u(t-s, \lambda) \\ v(t-s, \lambda) \end{pmatrix} p(s)x_\lambda(s) ds \\ &= \begin{pmatrix} u(t, \lambda) + (u(\cdot, \lambda) * px_\lambda)(t) \\ v(t, \lambda) + (v(\cdot, \lambda) * px_\lambda)(t) \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} z_\lambda(t) \\ w_\lambda(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $f * g$ désigne le produit de convolution de deux fonctions f et g . Ce produit de convolution de px_λ par une fonction intégrable C^∞ permet de régulariser (en temps) la fonction résultante et la rend dérivable (preuve : calculer le taux d'accroissement (en faisant attention aux bornes d'intégration !) + un théorème ou une majoration pour passer à la limite ; ou bien écrire $\sin(t-s) = \sin((t-1) + (1-s))$ et utiliser une formule trigonométrique pour reconnaître des produits de fonctions C^1 ; ou attendre la question 18)a)) et on a en particulier $(u * px_\lambda)' = (u' * px_\lambda)$.

Or, on voit aussi clairement à leurs expressions que $\frac{\partial u}{\partial t} = v$, d'où $z'_\lambda(t) = w_\lambda(t)$.

Puisque par ailleurs l'équation intégrale prend la valeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $t = 0$, le vecteur

$Z_\lambda = \begin{pmatrix} z_\lambda \\ z'_\lambda \end{pmatrix}$ vérifie la même équation différentielle que X_λ avec la même condition initiale. On en déduit, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, que $X_\lambda = Z_\lambda$, ce qu'il fallait démontrer.

10)a) Dans le cas $\lambda > 0$, on va pouvoir exprimer u en fonction de $\sqrt{\lambda}$ puis identifier un développement en série entière usuel (celui du sinus) pour voir qu'on

a en fait $u(t, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}$. Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(t, \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-\lambda)^k}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k \sqrt{\lambda}^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k \sqrt{\lambda}^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

L'égalité qu'il est demandé de prouver est simplement la première ligne de l'équation du 9).

10)b) On majore $|\sin|$ par 1 et $|p|$ par $\|p\|_{\infty, [0,1]}$: $|x_\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \|p\|_{\infty, [0,1]} \int_0^\cdot |x_\lambda(s)| ds$.

Une nouvelle utilisation du lemme de Gronwall, sur $[0, 1]$, produit alors l'inégalité demandée.

Partie III

11) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On notera $x_p = x_\lambda^{(p)}$ et $x_q = x_\lambda^{(q)}$.

Notons $m = Z_p(\lambda)$ et $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_m$ les $m+1$ zéros de x_p sur $[0, 1]$ (on suppose ici implicitement que x_p s'annule au moins une fois en dehors de zéro : si ce n'est pas le cas, l'inégalité $0 \leq Z_q(\lambda)$ est tautologique).

Nous sommes dans la configuration de la question 2), dont la conclusion est que pour tout j , il existe $b_j \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $x_q(b_j) = 0$. Alors x_q a au moins m zéros non nuls distincts, c'est-à-dire que $Z_p(\lambda) = m \leq Z_q(\lambda)$.

Soit $\mu > \lambda$. On utilisera les notations $x_\lambda^{''(p)} = (p-\lambda)x_\lambda^{(p)}$ et $x_\lambda^{''(q)} = (q-\lambda)x_\lambda^{(q)}$. Lorsque $q = p + \lambda - \mu$, on a $q < p$ sur $[0, 1]$ et $x_\lambda^{''(q)} = (p-\mu)x_\lambda^{(q)}$. Les conditions initiales ne changeant jamais, on a donc $x_\lambda^{(q)} = x_\mu^{(p)}$. D'après ce qui précède, $x_\mu^{(p)} = x_\lambda^{(q)}$ s'annule plus de fois que $x_\lambda^{(p)}$ sur $[0, 1]$, c'est-à-dire $Z_p(\lambda) \leq Z_p(\mu)$.

Supposons maintenant que x_μ s'annule en 1. La croissance de Z_p donne déjà l'inégalité $Z_p(\mu) \geq Z_p(\lambda)$. Il s'agit de montrer qu'elle est stricte. En reprenant les notations précédentes, la fonction $Q = p - \mu$ est strictement inférieure à $P = p - \lambda$. Nous avions conclu que $Z_p(\lambda)$ zéros distincts de $x_\mu = x_Q$ se trouvaient dans des intervalles $]a_j, a_{j+1}[$. Aucun de ces zéros ne peut être égal à 1, sinon $1 \in]a_j, a_{j+1}[\subseteq]0, 1[$. Alors x_Q possède m zéros **en plus** de 1, ce qui fait au moins $m+1$ zéros au total et donc $Z_p(\mu) \geq Z_p(\lambda) + 1$.

12) Notons μ l'unique valeur prise par $\lambda - p$. Il s'agit d'un réel non forcément positif, il faut donc distinguer trois cas.

Premièrement, si $\mu = 0$, x_p est une fonction affine (parce que de dérivée seconde nulle), d'ordonnée à l'origine nulle et de pente 1. C'est l'identité, et elle ne s'annule pas sur $]0, 1[$: $Z_p(\lambda) = 0$.

Si $\mu < 0$, notre équation différentielle du second ordre est de discriminant $\Delta(X^2 + \mu) = -4\mu > 0$. En notant $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\mu} = \pm\sqrt{p-\lambda}$, la solution générale s'écrit $x_p(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t)$.

En injectant les conditions $x_p(0) = 0$ et $x_p'(0) = 1$, on trouve $A + B = 0$ et $Ar_1 + Br_2 = 1$, i.e $A - B = \frac{1}{\sqrt{-\mu}}$. On en déduit $A = \frac{1}{2\sqrt{-\mu}}$ puis

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \sinh(\sqrt{-\mu}t)$$

qui ne s'annule là encore qu'en 0 : $Z_p(\lambda) = 0$.

Si $\mu > 0$ le discriminant est cette fois négatif et les racines du discriminant sont les complexes conjugués imaginaires purs $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\mu}$. On aura donc une expression de la forme $x_p(t) = A \cos(\sqrt{\mu}t) + B \sin(\sqrt{\mu}t)$. Les conditions initiales imposent $A = 0$ et $B\sqrt{\mu} = 1$, d'où finalement

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}t)$$

ce qui ressemble beaucoup à ce qui a été trouvé dans l'équation 10)a). Cette fonction s'annule en tout t réel tel que $\sqrt{\mu}t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e $t \in \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\mathbb{Z}$. Les zéros qui

nous intéressent sont en nombre $Z_p(\lambda) = |\mathbb{Z} \cap]0, \frac{\sqrt{\mu}}{\pi}]| = \left\lfloor \frac{\sqrt{\mu}}{\pi} \right\rfloor + 1 - 1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{\mu}}{\pi} \right\rfloor$.

13)a) p est continue sur le compact $[0,1]$, donc est bornée (et atteint ses bornes) en vertu du théorème de Heine. D'où la bonne définition de p_+ et p_- .

On applique ensuite les résultats du 12) avec $p = p_-$, et $\mu < 0$. On obtient $Z_{p_-}(\lambda) = 0$. On n'a pas $p_- < p$, puisque l'inf est atteint, mais si c'était le cas, on pourrait utiliser le premier résultat de 11) pour avoir $Z_p(\lambda) \leq Z_{p_-}(\lambda) = 0$. On peut cependant contourner cette difficulté en faisant appel à la caractérisation séquentielle/*epsilon*esque de la borne inf.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe p_ε tq $p_\varepsilon - \varepsilon < p_- \leq p$. Alors $Z_p(\lambda) \leq Z_{p_\varepsilon - \varepsilon}(\lambda)$. Puisque $p_\varepsilon - \varepsilon$ tend vers $p_- > \lambda$, on a pour ε assez petit, $p_\varepsilon - \varepsilon > \lambda$. On tombe alors dans le cas $\mu_\varepsilon < 0$ du 12).

On en déduit que $Z_p(\lambda) \leq Z_{p_\varepsilon - \varepsilon}(\lambda) = 0$.

Supposons maintenant que $\lambda \geq p_-$. Alors $\lambda + 1 \geq p_- + 1 > p_-$. Une nouvelle utilisation des résultats du 12) avec $\mu = \lambda + 1 - p_- > 0$ nous apprend que

$$Z_{p_-}(\lambda + 1) = \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_-}}{\pi} \right\rfloor.$$

Reprenons maintenant notre approximation p_ε à ε près de p_- . On a $p_\varepsilon - \varepsilon < p_- \leq p$. Alors $Z_p(\lambda + 1) \leq Z_{p_\varepsilon - \varepsilon}(\lambda + 1)$. Pour ε assez petit on aura cette fois $p_\varepsilon - \varepsilon < \lambda + 1$ donc

$$Z_{p_\varepsilon - \varepsilon}(\lambda + 1) = \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_\varepsilon + \varepsilon}}{\pi} \right\rfloor \leq \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_\varepsilon + \varepsilon}}{\pi}$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve

$$Z_p(\lambda + 1) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_\varepsilon + \varepsilon}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_-}}{\pi}$$

Mais $Z_p(\lambda + 1)$ est entier, d'où l'on déduit $Z_p(\lambda + 1) \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_-}}{\pi} \right\rfloor$, et enfin, par

croissance de Z_p , que $Z_p(\lambda) \leq Z_p(\lambda + 1) \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_-}}{\pi} \right\rfloor = Z_{p_-}(\lambda + 1)$.

Ainsi qu'attendu.

13)b) Si $\lambda = 1 + p_+$, l'inégalité est triviale puisque Z_p est à valeurs positives. On peut donc supposer $\lambda > 1 + p_+ > p$. Dans ce cas, on a facilement

$$Z_p(\lambda) \geq Z_{1+p_+}(\lambda) = \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - (1 + p_+)}}{\pi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor = Z_{p_+}(\lambda - 1)$$

Supposons maintenant que $x_\lambda(1) = 0$. À nouveau, si $\lambda = 1 + p_+$, l'inégalité est triviale puisque $Z_p(\lambda) \geq 1$ (parce que $1 \in \mathcal{Z}(x_\lambda)$). On supposera $\lambda > 1 + p_+$.

Nous allons pouvoir appliquer le dernier résultat du 11) avec un certain ε assez petit, $\mu \leftarrow \lambda$ et $\lambda \leftarrow \lambda - 1 + \varepsilon$, pour en déduire que

$$Z_p(\lambda) \geq Z_p(\lambda - 1 + \varepsilon) + 1$$

Pour ce faire, on approxime p_+ par p_ε tel que $p_\varepsilon - \varepsilon < p_\varepsilon < p_+ < \varepsilon + p_\varepsilon$, de sorte que $p \leq p_+ < \varepsilon + p_\varepsilon < \lambda - 1 + \varepsilon < \lambda$, ce qui est parfaitement possible grâce à l'inégalité stricte mais nécessite de prendre ε assez petit pour être assez proche de p_+ pour pouvoir coïncider $p_\varepsilon + \varepsilon$ entre p_+ et $\lambda - 1$. On aura alors

$$Z_p(\lambda) \geq Z_p(\lambda - 1 + \varepsilon) + 1 \geq Z_{p_\varepsilon + \varepsilon}(\lambda - 1 + \varepsilon) + 1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_\varepsilon}}{\pi} \right\rfloor + 1$$

On remarquera que puisque $p_\varepsilon < p_+$, on a toujours $\lambda - 1 - p_\varepsilon > \lambda - 1 - p_+$. La fonction partie entière étant continue à droite, on en déduit enfin que

$$Z_p(\lambda) \geq \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor + 1$$

14)a) N'importe quel $0 < \varepsilon < \min \left(1 - t_k, \min_j \frac{t_{j+1} - t_j}{2} \right)$ satisfait par construction la condition (1). Un tel ε existe forcément puisqu'aucun intervalle $]t_j, t_{j+1}[$ n'est vide et si $t_k < 1$, alors $1 - t_k > 0$ et donc il existe (une infinité de) $0 < \varepsilon < 1 - t_k$.

Φ est continue donc pour tout t et pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$|\lambda - \mu| = \|(\lambda, t) - (\mu, t)\| < \eta_1 \implies \begin{cases} |x_\lambda(t) - x_\mu(t)| < \varepsilon_1 \\ |x'_\lambda(t) - x'_\mu(t)| < \varepsilon_1 \end{cases}$$

On fixe $\varepsilon_1 > 0$ et on choisit λ satisfaisant à $|\lambda - \mu| < \eta_1$.

Pour tout $t \in A_\varepsilon$, $|x'_\mu(t)| \leq |x'_\lambda(t)| + |x'_\mu(t) - x'_\lambda(t)| < \varepsilon_1 + |x'_\lambda(t)|$

On a aussi pour tout j , via l'inégalité des accroissements finis

$$|x'_\mu(t_j)| \leq |x'_\mu(t)| + |x'_\mu(t_j) - x'_\mu(t)| \leq |x'_\mu(t)| + \varepsilon |x''_\mu|_+$$

Or, aucun $x'_\mu(t_j)$ n'est nul en vertu de 1)a), donc $\Delta_\mu := \sup_j |x'_\mu(t_j)| > 0$. De là, on déduit $|x'_\mu(t)| \geq \Delta_\mu - \varepsilon |x''_\mu|_+$, puis

$$|x'_\lambda(t)| \geq \Delta_\mu - \varepsilon |x''_\mu|_+ - \varepsilon_1$$

Ce minorant est une quantité strictement positive pour ε et ε_1 assez petits.

Prenons maintenant $t \in B_\varepsilon$. Comme précédemment, pour tout $\varepsilon_2 > 0$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $|\lambda - \mu| < \eta_2 \implies |x_\lambda(t) - x_\mu(t)| < \varepsilon_2$. On se donne de tels $\varepsilon_2, \eta_2, \lambda$. Alors l'inégalité triangulaire (inversée) s'écrit

$$|x_\lambda(t)| \geq |x_\mu(t)| - |x_\mu(t) - x_\lambda(t)| \geq |x_\mu(t)| - \varepsilon_2$$

On peut écrire

$$B_\varepsilon = [\varepsilon, t_1 - \varepsilon] \cup [t_1 + \varepsilon, t_2 - \varepsilon] \cup \dots \cup [t_k + \varepsilon, 1]$$

certaines intervalles pouvant être vides en l'état, mais ce ne sera pas le cas pour ε assez petit (parce que $\mathbb{R}$ est séparé). Le seul intervalle qui peut être vide en toute

circonstance est $[t_k + \varepsilon, 1]$, lorsque $t_k = 1$. On prendra dans la suite de ce paragraphe la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Sur chaque intervalle non vide, $|x_\mu|$ est bornée et son minimum est atteint (théorème de Heine). Cette borne inf n'est jamais égale à zéro, sinon on trouverait un nouveau zéro de x_μ strictement situé entre deux zéros consécutifs. Avec la convention citée plus haut, on peut donc sans crainte définir

$$\delta := \inf\{|x_\mu(t)| : t \in B_\varepsilon\}$$

et cet inf est strictement supérieur à zéro, comme minimum d'un nombre fini de réels strictement positifs et de $+\infty$ dont l'un au moins n'est pas infini.

On aura alors

$$|x_\lambda(t)| \geq |x_\mu(t)| - \varepsilon_2 \geq \delta - \varepsilon_2$$

avec un minorant qui est une fois encore strictement positif pour peu que ε et ε_2 soient assez petits.

Pour satisfaire les conditions requises, on prendra donc

- $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petits pour satisfaire (1) et la stricte positivité (et bonne définition) des minorants
- $\theta < \min(\eta_1, \eta_2)$
- $\eta < \min(\Delta_\mu - \varepsilon|x''_\mu|_+ - \varepsilon_1, \delta - \varepsilon_2)$

14)b) Si x_λ possédait deux zéros $a < b$ dans $] \min(0, t_j - \varepsilon), \max(t_j + \varepsilon, 1)[$, d'après le théorème de Rolle, il existerait $c \in]a, b[$ tel que $x'_\lambda(c) = 0$. On aurait donc trouvé un $c \in A_\varepsilon$ tel que $|x'_\lambda(c)| < \eta$, malgré le fait que $|\lambda - \mu| < \theta$. Absurde.

La condition (2) impose à tous les zéros de x_λ de se trouver dans le complémentaire de B_ε (distance strictement inférieure à ε d'un t_j), sans quoi on trouverait $0 = |x_\lambda(t)| \geq \eta > 0$. On sait par ailleurs grâce à (1) que les intervalles $]t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon[$ sont deux à deux disjoints parce que pour tous deux indices $n < m$,

$$|t_m - t_n| = t_m - t_n = \sum_{i=n}^{m-1} \underbrace{t_{i+1} - t_i}_{\geq 2\varepsilon} \geq 2(m-n)\varepsilon$$

et donc $|(t_m - \varepsilon) - (t_n + \varepsilon)| = |t_m - t_n - 2\varepsilon| \geq |t_m - t_n| - 2\varepsilon \geq 2(m-n-1)\varepsilon$ est strictement positive, sauf si $m = n + 1$. Mais dans ce cas, il est impossible que l'intersection soit non vide, sinon $t_{j+1} - \varepsilon < t_j + \varepsilon$ donne $t_{j+1} - t_j < 2\varepsilon$ qui contredit la condition (1).

En tout cas, cela laisse le choix à un zéro non nul de x_λ de tomber soit dans $]0, \varepsilon[$, soit dans un $]t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon[$ ($t_j < 1$), soit éventuellement dans $]1 - \varepsilon, 1]$ si $t_k = 1$. D'après ce qui précède, deux zéros ne peuvent pas tomber dans le même intervalle, ce qui exclut d'office $]0, \varepsilon[$ des possibilités (0 y est déjà). Le principe des tiroirs implique que $Z_p(\lambda) \leq k = Z_p(\mu)$. Le résultat que nous allons montrer maintenant implique, lui, que $Z_p(\lambda) \geq Z_p(\mu) - 1$.

Considérons $t_j \notin \{0, 1\}$. Si x_λ ne s'annule pas sur $R_\varepsilon =]t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon[$, alors $x_\lambda(t_j - \varepsilon)$ et $x_\lambda(t_j + \varepsilon)$ sont de même signe (sinon par le TVI, x_λ s'annulerait entre

les deux). Le signe est strict puisque ce ne sont pas des zéros de x_λ (parce qu'ils sont à distance supérieure à ε de t_j : 14)a)(2)). Par conséquent, il existe $\eta_0 > 0$ tel que $|x_\lambda| \geq \eta_0$ sur R_ε . Au contraire, par continuité de x_μ , il existe R assez petit tel que la restriction de x_μ à $J_R =]t_j - R, t_j + R[$ vérifie $|x_\mu| < \frac{\eta_0}{2}$ sur cet intervalle.

Or, nous savons depuis 7)b) que $|x_\lambda - x_\mu| \leq |X_\lambda - X_\mu| \leq Re^{2cR}|\lambda - \mu| < Re^{2cR}\theta$. Il suffit donc de choisir R assez petit pour que $Re^{2cR}\theta < \frac{\eta_0}{2}$ pour conclure que $|x_\lambda| \leq |x_\mu| + |x_\lambda - x_\mu| < \eta_0$. Contradiction. On a donc montré que x_λ s'annule sur tous les R_ε au moins un fois (donc exactement une). Cela montre comme annoncé que $Z_p(\lambda) \geq Z_p(\mu) - 1$

14)c) On a vu au 14)b) que $Z_p(\lambda) \leq Z_p(\mu)$. Puisque $x_\mu(1) \neq 0$, $t_k < 1$ et donc les k intervalles $]t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon[$ reçoivent tous un zéro distinct de x_λ , d'où $Z_p(\lambda) \geq k = Z_p(\mu)$ et l'égalité demandée.

14)d) Si $\lambda \geq \mu$, on a toujours $Z_p(\lambda) \geq Z_p(\mu)$ par croissance de Z_p . L'inégalité $Z_p(\lambda) \leq Z_p(\mu)$ a été démontrée au 14)b).

Supposons que $\lambda < \mu$ et $x_\mu(1) = 0$. On a $Z_p(\lambda) \geq Z_p(\mu) - 1$ par 14)b). L'autre inégalité est prouvée depuis question 11) : $Z_p(\mu) \geq Z_p(\lambda) + 1$.

15) L'inclusion $\subseteq$ est triviale. Montrons l'inclusion réciproque.

On a déjà vu que si $\lambda < p_-$, alors $Z_p(\lambda) = 0$ donc la valeur $n = 0$ est atteinte pour $\lambda = p_- - 1$ par exemple. Soit $n \geq 1$ un entier. Par 13)b), pour tout $\lambda \geq 1 + p_+$, on aura

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_-}}{\pi} \right\rfloor \geq Z_p(\lambda) \geq \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor$$

Pour $\lambda = \pi^2 n^2 + 1 + p_+$, le membre de droite est entier et égal à n , et si $\lambda = \pi^2(n+1)^2 - 1 + p_-$ celui de gauche est égal à $n+1$. Il existe des réels entre ces deux bornes si et seulement si leur différence est strictement positive, c'est-à-dire si et seulement si $\pi^2(2n+1) > 2 + p_+ - p_-$. Le résultat cherché est donc vrai pour tout n assez grand.

Si p_+ et p_- sont tels que cela est vérifié pour $n = 1$, alors le résultat est démontré.

Sinon, donnons-nous un tel entier et un réel μ tel que $Z_p(\mu) = n$. Nous allons montrer qu'il est possible de trouver un réel où Z_p vaut $n - 1$. Posons

$$\mu_* := \inf\{x \leq \mu : n - 1 \leq Z_p(x) \leq n\}$$

Cette définition fait sens puisque l'ensemble dont on prend l'inf est non vide (contient μ) et minoré par $p_- - 1$ (parce que Z_p y vaut 0). Nous sommes en outre certains que $Z_p(\mu_*) \leq n$, puisque $\mu_* \leq \mu$ et Z_p est croissante.

Si $Z_p(\mu_*) = n - 1$ alors il n'y a rien à démontrer. Supposons que $Z_p(\mu_*) = n$. Approximons, suivant 14), notre μ_* par un $\lambda_* < \mu_*$ tel que $|\mu_* - \lambda_*| < \theta_*$.

On constate alors qu'il est impossible que $x_{\mu_*}(1) \neq 0$, sinon 14)c) nous dit que $Z_p(\lambda_*) = Z_p(\mu_*)$, ce qui contredit la minimalité de μ_* . On a donc $x_{\mu_*}(1) = 0$ et

14)d) implique $Z_p(\lambda_*) = Z_p(\mu_*) - 1 = n - 1$.

Par récurrence descendante finie immédiate, l'inclusion réciproque est démontrée.

16)a) Pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $A_k := \{\lambda : Z_p(\lambda) = k - 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (question 15) : $\forall n, \exists \lambda : Z_p(\lambda) = n$, et majorée. En effet, il existe μ tel que $Z_p(\mu) = k$. Or, il est impossible qu'un $\lambda \in A_k$ soit plus grand que μ , sinon la croissance de Z_p implique $k - 1 = Z_p(\lambda) \geq Z_p(\mu) = k$. Alors $\sup A_k$ existe dans $\mathbb{R}$ et (λ_k) est bien définie.

Pour tout k , la caractérisation séquentielle/epsilon du sup nous autorise à approximer pour tout $\varepsilon > 0$ le réel λ_k par $\lambda_k(\varepsilon) < \lambda_k$ tel que $\lambda_k - \lambda_k(\varepsilon) < \varepsilon$ et $Z_p(\lambda_k(\varepsilon)) = k - 1$. On aura donc

$$k - 1 = Z_p(\lambda_k(\varepsilon)) \leq Z_p(\lambda_k)$$

On notera aussi $B_k := \{\lambda : Z_p(\lambda) \leq k - 1\}$. C'est une suite d'ensembles non vides et majorée et on a par ailleurs $\lambda_{k+1} \geq \lambda$ pour tout $\lambda \in B_k$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $k \leq Z_p(\lambda_{k+1}) \leq Z_p(\lambda) \leq k - 1$ pour un certain λ . Mais $A_k \subseteq B_k$ donc

$$\lambda_k = \sup A_k \leq \sup B_k \leq \lambda_{k+1}$$

D'où la croissance de la suite (λ_k) .

Soit enfin $A > 0$ un réel. Notons $a = \lceil A \rceil$ sa partie entière supérieure. Alors $\lambda_{a+1} \geq a \geq A$ et cela reste vrai pour tout $k \geq a + 1$ grâce à la croissance. D'où la tendance de la suite (λ_k) vers l'infini.

16)b) On fait la même chose qu'au 15). On approxime λ_k à θ près par un $\lambda > \lambda_k$. On voit alors (14)d)) qu'il est impossible que $Z_p(\lambda_k) = k - 1$ sinon $Z_p(\lambda_k) = Z_p(\lambda)$ et on contredit la maximalité de λ_k . Ceci prouve que $Z_p(\lambda_k) \geq k$. Inversement, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $Z_p(\lambda) = k$. Ce λ majore tous les x tq $Z_p(x) = k - 1$ (sinon $k \leq k - 1$), donc aussi leur sup qui est λ_k , et on aura donc nécessairement $Z_p(\lambda_k) \leq Z_p(\lambda) = k$. D'où $Z_p(\lambda_k) = k$.

Enfin, approximations une dernière fois λ_k par $\lambda_k(\varepsilon_k) < \lambda_k$ comme au 16)a) avec un $\varepsilon_k > 0$ de sorte à être dans les conditions de la question 14). Si on avait $x_{\lambda_k}(1) \neq 0$, le 14)d) donnerait $Z_p(\lambda_k) = Z_p(\lambda_k(\varepsilon_k)) = k - 1$. Absurde.

17)a) On reprend les résultats du 13)a) pour la majoration et du 13)b) pour la minoration. On applique avec $\lambda = \lambda_k$ de sorte que $Z_p(\lambda_k) = k$

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda_k - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor + 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda_k + 1 - p_-}}{\pi} \right\rfloor$$

ou encore : $p_- - 1 \leq \lambda_k - \pi^2 k^2 \leq 1 + p_+$.

17)b) On en déduit que $\lambda_k = \pi^2 k^2 + u_k$ avec $u_k = O(1)$, puis

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_k} - \pi k &= \sqrt{\pi^2 k^2 + u_k} - \pi k \\
&= \pi k \left(\sqrt{1 + \frac{u_k}{\pi^2 k^2}} - 1 \right) \\
&= \pi k \left(1 + \frac{u_k}{2\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) - 1 \right) \\
&= \pi k O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

17)c) $N(\lambda)$ est toujours fini parce que (λ_k) n'est pas majorée et comme (λ_k) est croissante, $N(\lambda) = \sup\{k : \lambda_k \leq \lambda\} = \sup\{k \leq Z_p(\lambda) : \lambda_k \leq \lambda\} \leq Z_p(\lambda)$. D'ailleurs il est aussi vrai que $N(\lambda) = \min\{k : \lambda_k > \lambda\} - 1 = \min\{k \geq Z_p(\lambda) : \lambda_k > \lambda\} - 1 \geq Z_p(\lambda) - 1$ et cela montre au passage que $N(\lambda) \sim Z_p(\lambda)$ tend vers l'infini.

Mais surtout, l'inégalité $\lambda_{N(\lambda)} \leq \lambda < \lambda_{N(\lambda)+1}$ conduit à

$$\frac{\lambda_{N(\lambda)}}{\pi^2 N(\lambda)^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2 N(\lambda)^2} < \frac{\lambda_{N(\lambda)+1}}{\pi^2 (N(\lambda)+1)^2} \frac{(N(\lambda)+1)^2}{N(\lambda)^2}$$

$$\text{D'où } \pi^2 N(\lambda)^2 \sim \lambda \text{ puis } N(\lambda) \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}$$

Partie IV

18)a) L'opérateur I_λ est correctement défini puisque pour toute f continue, $S_\lambda p f$ est également continue, donc intégrable sur $[0, 1]$. $I_\lambda(f) \in C^0([0, 1])$ parce que pour tous $h, t \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ tq $t+h \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
|I_\lambda(t+h) - I_\lambda(t)| &= \left| \int_0^t (S_\lambda(t+h-s) - S_\lambda(t-s))p(s)f(s)ds + \int_t^{t+h} S_\lambda(t+h-s)p(s)f(s)ds \right| \\
&\leq \|pf\|_\infty \int_0^t \underbrace{|S_\lambda(t+h-s) - S_\lambda(t-s)|}_{\leq \sqrt{\lambda}|t+h-s-(t-s)| \leq \sqrt{\lambda}|h|} ds + \|pf\|_\infty \int_t^{t+h} \underbrace{|S_\lambda(t+h-s)|}_{\leq 1} ds \\
&\leq \|pf\|_\infty \sqrt{\lambda}|h| \times t + \|pf\|_\infty |h|
\end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

La linéarité de I_λ découle de celle de l'intégrale : $\forall f, g \in C^0([0, 1]), \forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\cdot S_\lambda(\cdot-s)p(s)(af+bg)(s)ds = a \int_0^\cdot S_\lambda(\cdot-s)p(s)f(s)ds + b \int_0^\cdot S_\lambda(\cdot-s)p(s)g(s)ds$$

Montrons maintenant que I_λ est continue. Soient $f, g \in C^0([0, 1])$. Soit $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
|I_\lambda(f)(t) - I_\lambda(g)(t)| &\leq \int_0^t \underbrace{|S_\lambda(t-s)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|p(s)|}_{\leq \|p\|_\infty} \cdot \underbrace{|f(s) - g(s)|}_{\leq \|f-g\|_\infty} ds \\
&\leq \|p\|_\infty \|f-g\|_\infty t \\
&\leq \|p\|_\infty \|f-g\|_\infty
\end{aligned}$$

d'où $\|I_\lambda(f) - I_\lambda(g)\|_\infty \leq \|p\|_\infty \|f - g\|_\infty$ et $K = \|p\|_\infty$ convient.

18)b) On reprend le résultat de la question 10) : $x_\lambda - \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I_\lambda(x_\lambda)$, donc $S_\lambda = \sqrt{\lambda} \left(x_\lambda - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I_\lambda(x_\lambda) \right)$, puis $I_\lambda^j(S_\lambda) = \sqrt{\lambda} \left(I_\lambda^j(x_\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I_\lambda^{j+1}(x_\lambda) \right)$ et

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda}^{j+1}} I_\lambda^j(S_\lambda) = \frac{I_\lambda(x_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{I_\lambda^{n+1}(x_\lambda)}{\sqrt{\lambda}^{n+1}} = x_\lambda - \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} - \frac{I_\lambda^{n+1}(x_\lambda)}{\sqrt{\lambda}^{n+1}}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} r_{n,\lambda} &:= x_\lambda - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_\lambda - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda^{\frac{j+1}{2}}} I_\lambda^j(S_\lambda) \\ &= \frac{I_\lambda^{n+1}(x_\lambda)}{\sqrt{\lambda}^{n+1}} \end{aligned}$$

est une fonction continue. Aussi, puisque $|x_\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\|p\|_\infty}$, on a aussi $|I_\lambda(x_\lambda)| \leq \frac{K}{\sqrt{\lambda}} e^{\|p\|_\infty}$ et par récurrence immédiate $|I_\lambda^{n+1}(x_\lambda)| \leq \frac{K^{n+1}}{\sqrt{\lambda}} e^{\|p\|_\infty}$ et enfin

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}^{n+2} |r_{n,\lambda}(t)| &= \sqrt{\lambda} |I_\lambda^{n+1}(x_\lambda)| \\ &\leq K^{n+1} e^{\|p\|_\infty} \\ &\leq C_n \end{aligned}$$

où $C_n = K^{n+1} e^{\|p\|_\infty}$. Ce qu'il fallait démontrer.

18)c) D'après 16)b), $x_{\lambda_k}(1) = 0$. On applique ensuite le 18)b) avec $n = 1$ et $\lambda = \lambda_k$ au point $t = 1$. La quantité qu'on demande de borner s'écrit

$$k^3 \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} S_{\lambda_k}(1) + \frac{1}{\lambda_k} I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(1) \right| = k^3 |0 - r_{1,\lambda_k}(1)| \leq k^3 \frac{C_1}{\sqrt{\lambda_k}^3}$$

Mais $\sqrt{\lambda_k}^3 \sim (\pi k)^3$, donc $\frac{k^3}{\sqrt{\lambda_k}^3} \sim \pi^{-3} = O(1)$, d'où le résultat.

18)d) $\sin(\sqrt{\lambda_k}) = \sin(\pi k + \varepsilon_k) = \cos(\pi k) \sin(\varepsilon_k) + \sin(\pi k) \cos(\varepsilon_k) = (-1)^k \sin(\varepsilon_k)$, ce qui permet d'effectuer un DL/DA lorsque $k \rightarrow \infty$, puisque $\varepsilon_k = o(1)$

$$\begin{aligned}
k^3(-1)^k \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} &= k^3 \frac{\sin \varepsilon_k}{\pi k + \varepsilon_k} \\
&= \frac{k^3}{\pi k + \varepsilon_k} \times \left(\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^3}{6} + o(\varepsilon_k^3) \right) \\
&= \frac{k^3}{\pi k + \varepsilon_k} \varepsilon_k - \frac{1}{\pi k + \varepsilon_k} \underbrace{\frac{k^3 \varepsilon_k^3}{6}}_{=O(1)} + \frac{1}{\pi k + \varepsilon_k} o(\underbrace{k^3 \varepsilon_k^3}_{=O(1)}) \\
&= \frac{k^3}{\pi k + \varepsilon_k} \varepsilon_k + O(1) = \frac{1}{\pi} \varepsilon_k \left(\frac{k^3}{k + \varepsilon_k/\pi} - k^2 + k^2 \right) + O(1) \\
&= \frac{1}{\pi} k^2 \varepsilon_k + O(1) - \frac{1}{\pi} \varepsilon_k \frac{k^2 \varepsilon_k/\pi}{k + \varepsilon_k/\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} k^2 \varepsilon_k + O(1) - \frac{1}{\pi} \frac{k^2 \varepsilon_k^2 (=O(1))}{k\pi + \varepsilon_k} \\
&= \frac{1}{\pi} k^2 \varepsilon_k + O(1)
\end{aligned}$$

après division par $(-1)^k k^3$ et si on note $\alpha = \frac{1}{\pi}$, on trouve effectivement

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{(-1)^k}{k} \varepsilon_k \alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

18)e) On utilise la formule trigonométrique $2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ pour calculer $I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(1)$. On notera $u = \sqrt{\lambda_k}$ pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(1) &= \int_0^1 \sin(u(1-s)) \sin(us) p(s) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(u(1-2s)) p(s) ds - \frac{\cos(u)}{2} \int_0^1 p(s) ds \\
&= \left(-\frac{1}{2} \int_0^1 p(s) ds \right) \cos(u) + H(u) \\
&= C_0 \cos(u) + H(u)
\end{aligned}$$

où C_0 est une constante qui ne dépend que de p .
Comme en 18)d), on peut faire le DL

$$\cos(u) = (-1)^k \cos(\varepsilon_k) = (-1)^k \left(1 - \frac{\varepsilon_k^2}{2} + o(\varepsilon_k^2) \right) = (-1)^k \left(1 - O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) = (-1)^k + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Et par ailleurs, p est supposée C^1 , donc on peut faire l'IPP suivante

$$\begin{aligned}
2H(u) &= \int_0^1 \cos(u(1-2s)) p(s) ds \\
&= -\frac{1}{2u} (p(1) \sin(-u) - p(0) \sin(u)) + \frac{1}{2u} \int_0^1 \sin(u(1-2s)) p'(s) ds \\
&= \frac{p(1) + p(0)}{2} \frac{\sin(u)}{u} + \frac{1}{2u} \int_0^1 \sin(u(1-2s)) p'(s) ds
\end{aligned}$$

On majore ensuite $|\sin|$ par 1 pour trouver $2|H(u)|k \leq C_2(p)\frac{k}{u} + \|p'\|_\infty \frac{k}{2u}$.
 $H(u)$ est un $O\left(\frac{1}{k}\right)$ parce que $\frac{k}{u} \sim \frac{1}{\pi} = O(1)$.
Ainsi $I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(1) = (-1)^k C_0 + O\left(\frac{1}{k}\right)$ et $\beta = C_0$ convient.

18)f) On combine les développements précédents

$$\begin{aligned} O\left(\frac{1}{k^3}\right) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 S_{\lambda_k}(1-s) S_{\lambda_k}(s) p(s) ds \\ &= \frac{(-1)^k}{k} \varepsilon_k \alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right) + (-1)^k \frac{\beta}{\lambda_k} + O\left(\frac{1}{k\lambda_k}\right) \end{aligned}$$

Or, $k\lambda_k \sim \pi^2 k^3$ donc $O\left(\frac{1}{k\lambda_k}\right) = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$ et donc

$$-\alpha \varepsilon_k = \beta \frac{k}{\lambda_k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Il ne reste plus qu'à constater que

$$\frac{k}{\lambda_k} = \frac{k}{\lambda_k} - \frac{1}{\pi^2 k} + \frac{1}{\pi^2 k} = \frac{1}{\pi^2 k} + \frac{\pi^2 k^2 - \lambda_k}{\pi^2 k \lambda_k} = \frac{1}{\pi^2 k} + \frac{O(1)}{\sim \pi^4 k^3} = \frac{1}{\pi^2 k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

En posant $\gamma = \frac{-\beta}{\alpha \pi^2} = \frac{\int_0^1 p(s) ds}{2\pi}$, qui est une constante qui ne dépend que de p , on retrouve le développement $\varepsilon_k = \frac{\gamma}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$

19) Soit $t \in [0, 1]$. On pose $r_k = r_{1, \lambda_k}$. On a déjà vu au 18)b) que c'est une fonction continue dont la norme est $O\left(\frac{1}{k^3}\right)$. L'idée est de se servir de l'expression de x_λ qui a été prouvée en 18)b).

On cherche à remplacer le terme $\frac{S_{\lambda_k}(t)}{\sqrt{\lambda_k}}$ par $\frac{1}{\pi k} \sin(\pi k t)$ et le terme $\frac{1}{\lambda_k} I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(t)$ par $\frac{1}{k^2} h(t) \cos(\pi k t)$. On pose $R_k := r_k + e_k + e'_k$, où $e_k(t) = \frac{S_{\lambda_k}(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k} - \frac{\gamma \cos(\pi k t) t}{k \sqrt{\lambda_k}}$ et $e'_k(t) = \frac{1}{\lambda_k} I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(t) - \frac{1}{k^2} h(t) \cos(\pi k t) + \frac{\gamma \cos(\pi k t) t}{k \sqrt{\lambda_k}}$ sont les erreurs commises. On veut montrer que e_k et e'_k sont des $O\left(\frac{1}{k^3}\right)$, de sorte que R_k en soit aussi un (sa continuité est évidente).

Commençons par e_k . Puisque $\frac{k^3}{\pi k \sqrt{\lambda_k}} \sim \frac{k}{\pi^2}$ il suffit de montrer que $\pi k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) - \sqrt{\lambda_k} \sin(\pi k t) - \gamma \pi \cos(\pi k t) t$ est un $O\left(\frac{1}{k}\right)$

$$\begin{aligned}
\pi k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) - \sqrt{\lambda_k} \sin(\pi k t) - \gamma \pi \cos(\pi k t) t &= \pi k (\sin(\sqrt{\lambda_k} t) - \sin(\pi k t)) - \varepsilon_k \sin(\pi k t) - \gamma \pi \cos(\pi k t) t \\
&= \sin(\pi k t) (\pi k (\cos(\varepsilon_k t) - 1) - \varepsilon_k) \\
&\quad + \cos(\pi k t) \pi k (\sin(\varepsilon_k t) - \gamma/k t)
\end{aligned}$$

Le premier terme est évidemment un $O(1/k)$ parce que ε_k^2 est un $O(1/k^2)$.
Le second aussi parce que

$$\sin(\varepsilon_k t) - \gamma t/k = \underbrace{\varepsilon_k t - \gamma t/k}_{=O(1/k^2)} - \underbrace{\varepsilon_k^3/6 + o(\varepsilon_k^3)}_{=O(\varepsilon_k^3)=O(1/k^3)} = O(1/k^2)$$

Posons maintenant $h(t) := \gamma t/\pi$. On définit ainsi une fonction continue ne dépendant que de p et telle que

$$-\frac{1}{k^2} h(t) \cos(\pi k t) + \frac{\gamma \cos(\pi k t) t}{k \sqrt{\lambda_k}} = \gamma t \cos(\pi k t) \left(\underbrace{-\frac{1}{\pi k^2} + \frac{1}{k \sqrt{\lambda_k}}}_{=\frac{1}{k} \frac{\sqrt{\lambda_k} - \pi k}{\pi k \sqrt{\lambda_k}} = \frac{O(1)}{\sim \pi^2 k^3}} \right) = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\frac{1}{\lambda_k} I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(t) = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$, ce qui est trivialisé
par $|x_{\lambda_k}| \leq \frac{C(p)}{\sqrt{\lambda}} \sim O(1/k)$ et $|\sin| \leq 1$.