Problème sur les facteurs invariants

L'étude qui suit concerne des matrices à coefficients dans un anneau R euclidien, c'est-à-dire pourvu d'une division euclidienne. En pratique, pour simplifier, nous n'étudierons que les cas où $R = K[X]$, K étant un corps commutatif, et $R = \mathbb{Z}$ - ce dernier cas étant traité sous la mention : [*resp.*].

Notations

• On note U l'ensemble des inversibles (pour $\times$) de R : U est l'ensemble des polynômes constants non nuls (c'est-à-dire de degré 0) lorsque $R = K[X]$ [*resp.* $U = \{-1, +1\}$ *lorsque* $U = \mathbb{Z}$].
• On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n, à coefficients dans R (les coefficients d'une matrice de $\mathcal{A}_n$ sont donc des polynômes [*resp. des entiers relatifs*].
• On désigne par $\mathcal{U}_n$ l'ensemble les matrices de $\mathcal{A}_n$ dont le déterminant appartient à U.
• Étant donnés deux indices i et j compris entre 1 et n, on note E_{ij} la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut 1, et tous les autres coefficients sont nuls.
• On note I_n la matrice identité de taille n, ou I s'il n'y a pas d'ambiguïté sur n.
• Étant donné $u \in U$, on note $D_i(u) = I_n + (u-1)E_{ii}$: c'est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent tous 1, sauf le i-ème qui vaut u.
• Étant donné $a \in R$ et des indices $i \neq j \in \{1, ..., n\}^2$, on note $T_{ij}(a) = I_n + aE_{ij}$.
• Les matrices des deux types précédents sont appelées ***R*-élémentaires.**
• On désigne par $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des produits de matrices R-élémentaires.
• Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n$, non nulle. Lorsque $R = K[X]$ [resp. $\mathbb{Z}$], on note $\delta(A)$ le plus grand des degrés des coefficients non nuls de A - qui sont des polynômes, rappelons-le [*resp. la plus grande valeur absolue des coefficients non nuls de* A] ; c'est-à-dire : $\delta(A) = \max\limits_{i,j} \deg(a_{ij})$ [*resp.* $\max\limits_{i,j} |a_{ij}|$].

Partie I : Etude du groupe unimodulaire

1°) On suppose dans cette question que $R = K[X]$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n$. Montrer qu'il existe des matrices $B_0, \dots, B_p \in \mathcal{M}_n(K)$, telle que
$$A = B_0 + XB_1 + \cdots + X^p B_p .$$
Quelle est la valeur de p?

2°) Le groupe unimodulaire..
Montrer que $\mathcal{U}_n$ est un groupe pour la multiplication des matrices. (On pourra noter $F = K(X)$ [*resp.* $\mathbb{Q}$], et remarquer que les matrices considérées appartiennent à $GL_n(F)$.)

3°) Montrer que $\mathcal{R}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{U}_n$.

4°) Étant données deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{A}_n$, ont dit qu'elles sont ***R*-équivalentes** s'il existe U et V appartenant à $\mathcal{R}_n$, telles que $A = UBV$.

a) Justifier le fait qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence.

b) Soit $A \in \mathcal{A}_n$, dont on note les lignes $L_1, ..., L_n$ (avec $L_i \in \mathcal{M}_{1,n}(R)$). Pour $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ et $a \in R$, quelles sont les lignes de $T_{i,j}(a)A$? Et de $T_{1,i}(-1)T_{i,1}(1)A$?

c) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n$, non nulle. Montrer qu'il existe une matrice $A' = (a'_{ij}) \in \mathcal{A}_n$, R-équivalente à A, et telle que le polynôme a'_{11} soit non nul [*resp.* $a'_{1,1} \in \mathbb{Z}^*$] et que son degré [*resp. sa valeur absolue*] soit le plus petit des degrés des polynômes [*resp. des entiers relatifs*] a_{ij} non nuls.

d) Montrer que A est R-équivalente à une matrice $A'' = (a''_{ij})$, telle que $a''_{k1} = a''_{1k} = 0$ pour tout $k > 1$.

e) Montrer que A est R-équivalente à une matrice $A_1 = (\alpha_{ij})$, telle que $\alpha_{k1} = \alpha_{1k} = 0$ pour tout $k > 1$, et que α_{11} divise tous les α_{ij} non nuls.

5°) Forme normale de Hermite..
Montrer que toute matrice de $\mathcal{A}_n$ est R-équivalente à une matrice de la forme
$$S = \begin{pmatrix} e_1 & & 0 \\ & e_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n \end{pmatrix}$$
avec $e_1|e_2$ $e_2|e_3$ ... $e_{r-1}|e_r$, $e_j = 0$ pour $r < j \leqslant n$, les e_i non nuls étant unitaires [*resp.* > 0].

Quelle est la signification de r pour la matrice A? Que dire si on a $r = 0$ ou $r = n$?

6°) Montrer que $\mathcal{U}_n = \mathcal{R}_n$.

7°) On suppose ici $R = K[X]$. Trouver une matrice S pour les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} -10-X & -4 \\ 26 & 11-X \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 3 & -6 & 6-X \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} X^3 - X & 2X^2 \\ X^2 + 5X & 3X \end{pmatrix}.$$

8°) On suppose à présent $R = \mathbb{Z}, n \geqslant 2$, et on note $SL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \text{dét}(M) = 1\}$. Montrer que $SL_n(\mathbb{Z})$ est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Q})$ engendré par les $\{T_{i,j}(a), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, a \in \mathbb{Z}\}$.

Partie II : Unicité de la forme réduite de Hermite

Considérons une matrice $A \in \mathcal{A}_n$. On note, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $\Delta_k(A)$ le pgcd unitaire [*resp. positif*] de tous les déterminants de taille k non nuls (on les appelle des <u>k-mineurs</u>) extraits de A, s'il en existe. Si tous les k-mineurs de A sont nuls, on pose $\Delta_k(A) = 0$. Ainsi, $\Delta_1(A)$ est le pgcd de tous les coefficients non nuls de A, et $\Delta_n(A) = \det A$.

1°) Montrer que si A et B sont R-équivalentes alors $\Delta_k(A) = \Delta_k(B)$.

2°) On considère une matrice $S = \begin{pmatrix} e_1 & & & 0 \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n \end{pmatrix}$ avec $e_1|e_2, e_2|e_3, \dots, e_{r-1}|e_r,\ e_j = 0$ pour $r < j \leqslant n$, et les e_i non nuls unitaires [*resp.* > 0].
Calculer les $\Delta_k(S)$ en fonction des e_j.

3°) En déduire que la matrice S (forme réduite de Hermite) vue à la question I5 est unique.
Les e_k dépendant donc uniquement de A, on les appelle les <u>**facteurs invariants**</u> de A, et on les note $e_k(A)$.

Partie III : Application aux invariants de similitude.

Dans cette partie on considère un K-espace vectoriel E, de dimension n, et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, ayant une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ dans une base de référence $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On examine la matrice $\widehat{A} = XI - A \in \mathcal{A}_n$.

1°) On réduit $\widehat{A}$ comme indiqué à la partie I en : $\widehat{A} = PSQ$, P et Q étant unimodulaires et S de la forme indiquée à la question I5. Montrer que $r = n$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de terme nul sur la diagonale de S.
Considérant le cas éventuel où certains facteurs invariants sont égaux à 1 on change de numérotation en posant : $(e_1, e_2, \dots, e_n) = (1, 1, \dots, 1, d_1, \dots, d_s)$.

2°) Soit une famille $(v_1, \dots, v_p)$ de p vecteurs de E, avec $p \leqslant n$, et une matrice $B = (B_{ij}) \in \mathcal{A}_n$ (les B_{ij} sont donc des polynômes). On appellera <u>**image de (v_i) par B**</u> la famille de vecteurs (v_j^B) définie par $v_j^B = \sum\limits_{i=1}^{p} B_{ij}(u)(v_i)$.
Montrer que si B et C appartiennent à $\mathcal{A}_n$ alors $(v_i^B)^C = v_i^{(BC)}$.

3°) Une famille $(v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de E sera dite u-génératrice si la famille de vecteurs $(u^q(v_i))_{\substack{i \leqslant p \\ q \in \mathbb{N}}}$ est génératrice de E.
Montrer que si B appartient à $\mathcal{U}_n$ et (v_i) est u-génératrice alors (v_i^B) est u-génératrice.

4°) Montrer que l'image de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ par la matrice $\widehat{A}$ est $(0, 0, \dots, 0)$.

5°) a) On considère à nouveau $\widehat{A} = PSQ$. Montrer qu'il existe au moins une famille (v_i), u-génératrice, et dont l'image par S est nulle.

b) En déduire que $d_s(u)$ est nul.

6°) On note n_i le degré du polynôme d_i. Montrer que la famille de vecteurs $(u^j(v_i))\ /\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ 0 \leqslant j \leqslant n_i - 1)$ est une base de E. Quelle est l'allure de la matrice de u dans cette base ?

7°) Montrer que d_s est le polynôme minimal de u.

8°) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ alors elles sont semblables (c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$) si, et seulement si $XI - A$ et $XI - B$ sont R-équivalentes.

Partie IV : Applications

1°) Première application..
Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2°) Seconde application..
Montrer que toute matrice carrée est semblable à sa transposée.

3°) Troisième application..
On considère deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(L)$, L étant un sous-corps de K. On suppose qu'elles sont semblables <u>dans K</u>. Montrer qu'elles le sont aussi <u>dans L</u>.

4°) Quatrième application..
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $K = \mathbb{C}$ et u est nilpotent (i.e ; $\exists r \in \mathbb{N}, u^r = 0$). Quelle est l'allure de la matrice de u dans la base du $II.6$?

5°) Cinquime application.
On suppose à présent que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer qu'une matrice M carrée à coefficients dans K est nilpotente si et seulement si elle est semblable à $2M$.