CORRIGE DU CONCOURS D'ADMISSION 1999

ECOLE POLYTECHNIQUE

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

FILIERE MP

corrigé par Jean-Christophe Feauveau

***

Première Partie

1. On sait que les suites récurrente réelles du second ordre forment un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2 dont on connait une base : $\big((x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, où x_0 et x_1 sont les racines (distinctes) de $X^2 - \alpha X - 1$. On trouve
$$x_0 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+4}}{2}, \quad x_0 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2+4}}{2}.$$
Il vient alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2+2}{2\sqrt{\alpha^2+4}}\right)\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2+2}{2\sqrt{\alpha^2+4}}\right)\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4}}{2}\right)^n$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+4}}\right)\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+4}}\right)\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4}}{2}\right)^n.$$
2. Puisque $|x_1| < |x_0|$, il vient $\lambda = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+4}}{2}$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, on déduit $\sqrt{\alpha^2+4} \in \mathbb{Q}$, et donc α^2+4 est le carré d'un entier, disons n^2. Il s'en suit $\alpha \leqslant n-1$, qui conduit immédiatement à $n \leqslant 2$. Ceci est impossible puisque $\alpha > 0$.

Deuxième Partie

4. On rappelle que $I_x = \{P \in \mathbb{Q}[X] \ / \ P(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ qui est un anneau principal. Soit P_x l'unique générateur normalisé de I_x. P_x est irréductible, sinon x serait annulé par un polynôme non nul de degré strictement inférieur à celui de P_x. Enfin, tout polynôme normalisé annulant x est un multiple de P_x. On en déduit que P_x est le seul qui soit irréductible.
5. (a) Puisque $x \in \mathcal{E}$, $cx + d \neq 0$ et $T_g(x) = y$ est bien défini. Par ailleurs, $x(cy-a) = dy - b \neq 0$, et donc $x = \dfrac{dy-b}{cy-a}$. On en déduit $y \in \mathcal{E}$.
   (b) On montre facilement que $\forall (g, g') \in G^2$, $T_g \circ T_{g'} = T_{gg'}$. Il en résulte que T_g est une permutation de $\mathcal{E}$ et que $T_g^{-1} = T_{g^{-1}}$. Ainsi, l'application proposée et un morphisme de groupes et son noyau est facilement $\{Id_{\mathcal{E}}, -Id_{\mathcal{E}}\}$.
6. On sait que $x \in \mathcal{E}$ entraine $T_g(x) \in \mathcal{E}$.
Si x est algébrique, $y = T_g(x)$ vérifie $P_x(T_{g^{-1}}(y)) = P_x\left(\dfrac{dy-b}{cy-a}\right) = 0$. En réduisant au même dénominateur les monômes, on en déduit que y est algébrique et $d_y \leqslant d_x$. Mais puisque $x = T_{g^{-1}}(y)$ on en déduit aussi $d_x \leqslant d_y$ et enfin l'égalité $d_{T_g(x)} = d_x$ pour tout $g \in G$.

7. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que m ne soit pas un carré d'entier et $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. Soit $x = \sqrt{m}$.

De $T_g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{(acm-bd)+(bc-ad)x}{c^2m-d^2}$ on déduit

$$(T_g(x))^2 = \frac{(acm-bd)^2+m(bc-ac)^2}{(c^2m-d^2)^2} + \frac{2(acm-bd)(bc-ad)x}{(c^2m-d^2)^2}.$$

Pour que cette quantité soit un entier il faut que $acm - bd = 0$.
Dans ce cas, $(T_g(x))^2 = \dfrac{m}{(c^2m-d^2)^2}$ que l'on cherche entier.
L'égalité $ad - bc = \pm 1$ montre que $a \wedge b = 1$ et $c \wedge d = 1$. Combiné avec $acm = db$ on en déduit l'existence de $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $d = ka$ et $b = lc$.
Le cas $d = 0$ est à exclure car $(T_g(x))^2 = \dfrac{m}{c^4m^2} \notin \mathbb{N}$.
Si $b = 0$, alors $ad = \pm 1$ et $(T_g(x))^2 = \dfrac{m}{(c^2m-1)^2} \in \mathbb{N}$ impose alors $c = 0$. Il vient alors $b = c = 0$, $a = \pm 1$ et $d = \pm 1$. Ce cas conduit à $T_g(x) = m$ et est licite (quatre solutions pour g).
Reste le cas $bd \neq 0$. Il vient $m = kl$ et par suite $(T_g(x))^2 = \dfrac{kl}{(c^2kl-k^2a^2)^2} = \dfrac{l}{k(c^2l-ka^2)^2}$.
On se rapelle alors que $l \wedge k = 1$ et que la condition $T_g(x))^2 \in \mathbb{N}$ n'est possible que si $k = 1$.
Il vient alors $l = m$, $a = d$ et $b = mc$. Enfin, $(T_g(x))^2 = \dfrac{m}{(c^2m-a^2)^2} = \dfrac{m}{(cb-ad)^2} = m$.
Conclusion : dans tous les cas permis, la seule valeur que peut prendre $(T_g(x))^2$ est m. On en déduit que les seules valeurs permises (et prises) par $T_g(x)$ sont $\pm m$.
N.B. : le dernier cas étudié est tout à fait possible. On pourra par exemple prendre $m = 2$ et $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$...Bref...

Troisième Partie

8. Les deux formules de récurrence s'obtiennent directement. Pour n entier $\geqslant 2$,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A(u_0)\dots A(u_{n-1})\left(u_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = u_n \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} + A(u_0)\dots A(u_{n-2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que ces formules impliquent la croissance des suites d'entiers (p_n) et (q_n), et même la stricte croissance de (q_n) à partir de $n = 1$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

9. De $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}$ et $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = -(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})$ pour $n \geqslant 2$, on déduit $r_n - r_{n-1} = (-1)^{n+1}\dfrac{p_1q_0 - p_0q_1}{q_nq_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_nq_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

10. (a) La série $\sum(r_n - r_{n-1})$ est alternée, de terme général de module décroissant et de limite nulle : elle converge ; et ceci est équivalent à la convergence de la suite (r_n).
 (b) On sait contrôler le reste d'une série alternée par le premier terme négligé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_k - r_{k-1})\right| = |\lambda(u) - r_n| \leqslant \frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

S'il existait $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda(u) = \dfrac{a}{b}$, alors $|aq_n - bp_n| \leqslant \dfrac{b}{q_{n+1}}$. Cette dernière quantité serait plus petite que 1 à partir d'un certain rang et donc r_n serait constant à partir de ce rang. Mais cela contredirait le fait que $r_n - r_{n+1}$ ne puisse s'annuler. Ainsi $\lambda(u)$ est irrationnel.

(c) A l'aide du contrôle du reste d'une série alterné par le premier terme négligé (contrôle strict puisque tous les termes sont non nuls). On déduit que $0 < \lambda(u) - r_0 < \dfrac{1}{q_0 q_1}$ et par suite $E(\lambda(u)) = r_0 = u_0$.

Quatrième Partie

11. Si $x \in \mathcal{E}$, il est immédiat (par récurrence) que $F^n(x)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut d'ailleurs retrouver ce résultat en faisant le lien avec la seconde partie.

Pour $y \in \mathbb{R}$, en posant $g(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -E(y) \end{pmatrix} \in G$, il vient $F(y) = T_{g(y)}(y)$. Ainsi, pour $x \in \mathcal{E}$, l'existence de $F^n(x)$ est assurée pour tout n d'après la question 5. (b).

Si à présent x est rationnel. Pour $x \in \mathbb{Z}$, $F(x)$ n'est pas défini. On suppose donc $x = \dfrac{a_0}{a_1}$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}^*$ et $a_1 \in \mathbb{N}^*$.

On note a_2 le reste de la division euclidienne de a_0 par a_1. Pour $a_2 = 0$, $F(x)$ n'existe pas, pour $a_2 = 1$, $F(x) \in \mathbb{Z}$ et $F^2(x)$ n'existe pas, sinon $F(x) = \dfrac{a_1}{a_2}$ avec $2 \leqslant a_2 < a_1$.

On construit alors une suite (a_n) en notant a_{n+2} le reste de la division euclidienne de a_n par a_{n+1}. Il est clair, puisque la suite d'entiers naturels (a_n) est strictement décroissante jusqu'à ce que la valeur 0 soit atteinte, que $F^m(x)$ ne sera plus défini à partir d'un certain rang $\leqslant a_1$.

12. (a) Il vient de suite $p_n = u_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}$ et $q_n = p'_{n-1}$.

(b) Puisque $\lambda(u)$ n'est pas un entier, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F(r_n) = F(\lambda(u))$. De $r_n = \dfrac{p_n}{q_n} = u_0 + \dfrac{1}{r'_{n-1}}$ avec $u_0 = E(\lambda(u))$, on déduit $F(\lambda(u)) = \lambda(u')$.

(c) La périodicité de u se traduit par l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^k(\lambda(u)) = \lambda(u)$.

Avec la notation $\forall y \in \mathbb{R}$, $g(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -E(y) \end{pmatrix} \in G$, l'égalité s'écrit alors

$$F^k(\lambda(u)) = T_{g(F^{k-1}(\lambda(u)))} \circ \ldots \circ T_{g(\lambda(u))}(\lambda(u)) = \lambda(u).$$

D'où l'existence de $g \in G$ tel que $T_g(\lambda(u) = \lambda(u)$. Il est facile de constater que g diffère de $\pm I_2$, et par conséquent λ est racine d'un polynôme du second degré à coefficients rationnels (le premier degré est exclu car $\lambda(u) \in \mathcal{E}$). Il vient donc $d_{\lambda(u)} = 2$.

(d) Le résultat persiste si on suppose que u est périodique à partir d'un certain rang n_0.

En effet, si on pose $u_n^{(n_0)} = u_{n_0+n}$, on obtient $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A(u_0) \ldots A(u_{n_0-1}) \begin{pmatrix} p_{n-n_0}^{(n_0)} \\ q_{n-n_0}^{(n_0)} \end{pmatrix}$ en généralisant les notations des questions précédentes. La suite $u^{(n_0)}$ est périodique et donc $\lambda(u^{(n_0)})$ est algébrique de degré 2. Or il existe $g \in G$ tel que $r_{n-n_0}^{(n_0)} = T_g(r_n)$ pour tout $n \geqslant n_0$. Le caractère algébrique de $\lambda(u)$ s'en déduit et $d_{\lambda(u)} = 2$.

Cinquième Partie

13. (a) Si $(z, z') \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})^2$ vérifie $E(z) = E(z')$, il vient $z' - z = -(F(z') - F(z))(z - E(z))(z' - E(z'))$. On en déduit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F^n(y) - F^n(x) = -(F^{n+1}(y) - F^{n+1}(x))(F^n(x) - E(F^n(x)))(F^n(y) - E(F^n(y)))$$

et par suite l'égalité annoncée par récurrence.

(b) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = \{n \ / \ F^n(x) - E(F^n(x)) > 1 - \varepsilon \text{ et } F^n(y) - E(F^n(y)) > 1 - \varepsilon\}$.

Si A_ε est non vide, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|F^n(x) - F^n(y)| < \varepsilon$. Il en résulte $|x - y| < \varepsilon$ d'après l'égalité de la question (a).

Sinon la même égalité conduit directement à $x = y$.

Dans tous les cas, $|x - y| < \varepsilon$ et donc $x = y$.

14. Notons $u^{(k)}$ la suite définie par $u_k^{(n)} = u_{n+k}$, pour $k \in \mathbb{N}$. De la question 12. (b) on déduit par une récurrence immédiate $F^n(\lambda(u)) = \lambda(u^{(n)})$. On applique alors la question 10. (c) pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(F^n(\lambda(u)) = E(\lambda(u^{(n)})) = u_0^{(n)} = u_n.$$

On en déduit que nécessairement $u = (E(F^n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$. Il y a *unicité* de la suite u.
Réciproquement, pour $u = (E(F^n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda(u)$ est un irrationnel qui vérifie précisément $E(F^n(x)) = E(F^n(\lambda))$ pour tout entier n. On déduit de la question précédente que $\lambda(u) = x$, ce qui assure *l'existence* de la suite u.

* *
*