ENS 2024 MP Maths C

Adrien JOSEPH

Section 1

1. Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ. Puisque $u_n - \ell = o(1)$ et que $\sum 1$ est une série divergente à termes positifs, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$, *i.e.* que $(n+1)(\sigma_n - \ell) = o(n+1)$. Ainsi $\boxed{(\sigma_n) \text{ converge vers } \ell \text{ si } (u_n) \text{ converge vers } \ell}$.

Supposons maintenant que la suite de nombres réels (u_n) tende vers $+\infty$. Alors $1 = o(u_n)$ et $\sum u_n$ est une série (grossièrement) divergente à termes positifs (à partir d'un certain rang) On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$, *i.e.* que $n+1 = o((n+1)\sigma_n)$, ce qui montre que la suite $(|\sigma_n|)$ tend vers $+\infty$. Or, comme $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ donc $\sigma_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. On en déduit que $\boxed{(\sigma_n) \text{ tend vers } +\infty \text{ si } (u_n) \text{ tend vers } +\infty}$.

En considérant la suite $(-u_n)$, on montre que $\boxed{(\sigma_n) \text{ tend vers } -\infty \text{ si } (u_n) \text{ tend vers } -\infty}$.

Remarque. Cette question est assez étrange puisque le théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie) est désormais explicitement au programme de MP et de MPI.

2. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le lemme de Cesàro assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = 0$, *i.e.* $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } 0}$.

Soit n et k des éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout $t \in [k-1,k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k-1}$ donc, en intégrant sur le segment $[k-1,k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1) \leqslant \dfrac{1}{k-1}$. En sommant la première majoration pour k variant de 2 à n et la seconde pour k variant de de 2 à $n+1$, on obtient $\ln(n+1) \leqslant nv_n \leqslant \ln n + 1$, donc $\ln n \leqslant nv_n \leqslant \ln n + 1$ puis $1 \leqslant \dfrac{nv_n}{\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln n}$. Le théorème des gendarmes assure alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nv_n}{\ln n} = 1$, *i.e.* $\boxed{v_n \sim \dfrac{\ln n}{n}}$.

3. Comme la suite (e_n) converge vers α, le lemme de Cesàro assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_k = \alpha$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_0}{n} = \alpha$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_0}{n} = 0$. Par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha$, donc, comme $\alpha \neq 0$, $\boxed{u_n \sim \alpha n}$.

Puisque $u_{n+1} - u_n \sim \alpha$ et que $\sum \alpha$ est une série (grossièrement) divergente dont les termes gardent un signe constant, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \sim \sum_{k=0}^{n-1} \alpha$, *i.e.* $u_n - u_0 \sim \alpha n$. En particulier $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$ donc $u_n - u_0 \sim u_n$. Finalement, $\boxed{u_n \sim \alpha n}$.

4. Traitons les cas $\ell \in \,]0,+\infty[$, $\ell = 0$ et $\ell = +\infty$ ensemble en décrétant que $\ln(0) = -\infty$ et que $\ln(+\infty) = +\infty$ et en supposant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Avec notre convention, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\ell)$ donc d'après le lemme de Cesàro, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(\ell)$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n) - \ln(u_0)}{n} = \ln(\ell)$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_0)}{n} = 0$. Par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(\ell)$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = \ln(\ell)$. On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell}$.

En considérant la suite $(n!)$, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$.

Enfin, comme

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp(1+o(1)) = e+o(1)$$

on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = e$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e}$.

5. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - a$ et $v_n = b_n - b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+u_k)(b+v_{n-k}) = ab + \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, le lemme de Cesàro assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} v_k = 0$. De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k = 0$. Montrons pour finir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, elles sont bornées : on dispose de $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ et $|v_n| \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$ et $|v_n| \leqslant \varepsilon$. Pour tout $n \geqslant 2n_0$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} |u_k||v_{n-k}| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k||v_{n-k}| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} M\times\varepsilon + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon\times M = M\varepsilon,$$

ce qui montre par définition de la limite (rappelons que le réel M ne dépend pas de ε) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = 0$. Finalement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab}$.

6. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$. D'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} = AB$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} &= \sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2\\ k+\ell=n}} A_k B_\ell = \sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2\\ k+\ell=n}} \sum_{\substack{i\in[\![0,n]\!]\\ i\leqslant k}} \sum_{\substack{j\in[\![0,n]\!]\\ j\leqslant \ell}} a_i b_j = \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j\leqslant n}} a_i b_j \sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![i,n]\!]\times[\![j,n]\!]\\ k+\ell=n}} 1 \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j\leqslant n}} \mathrm{Card}\left(\{(k,\ell)\in[\![i,n]\!]\times[\![j,n]\!]\,;\, k+\ell=n\}\right) a_i b_j \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j\leqslant n}} \mathrm{Card}\left(\{(k,n-k)\,;\, k\in[\![i,n-j]\!]\ \}\right) a_i b_j \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j\leqslant n}} (n-i-j+1) a_i b_j
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} C_k = \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \sum_{\substack{\ell\in[\![0,n]\!]\\ \ell\leqslant k}} \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j=\ell}} a_i b_j = \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j\leqslant k}} a_i b_j = \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j\leqslant n}} a_i b_j \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\geqslant i+j}} 1 = \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j\leqslant n}} (n-i-j+1) a_i b_j.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_k$. On conclut que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_k = AB}$.

7. Considérons la suite $\boxed{(u_n) = ((-1)^n)}$. Alors la suite (u_n) ne converge pas et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$ et $\sigma_{2n+1} = 0$, la suite (σ_n) converge (vers 0).

8. Supposons d'emblée que $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, que (σ_n) tend vers ℓ et que (u_n) est monotone. Cette dernière hypothèse assure que (u_n) tend vers une limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donc d'après la question **1**, (σ_n) tend vers ℓ'. Comme (σ_n) tend vers ℓ, l'unicité de la limite assure que $\ell' = \ell$ donc $\boxed{(u_n) \text{ tend vers une } \ell}$.

9. L'indication peut se montrer via un calcul direct mais une récurrence immédiate donne le résultat encore plus rapidement : l'initialisation vient de la définition de e_1 et si $n \geqslant 1$ est tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k$, alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k + (n+1)e_{n+1} = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k + (n+1)(u_{n+2} - u_{n+1}) = (n+1)u_{n+2} - \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{n+1},$$

ce qui prouve l'hérédité. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k}$.

Supposons maintenant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ne_n = 0$. Alors d'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} ke_k + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ke_k + \frac{n}{n-1} \times \sigma_{n-1} - \frac{u_0}{n-1}.$$

Or, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ne_n = 0$, le lemme de Cesàro assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ke_k = 0$. Comme d'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n-1} = \ell$, on en déduit finalement que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

10a. Ici encore, un calcul direct peut aboutir mais une récurrence sur $m \geqslant n+1$ (à $n \in \mathbb{N}$ fixé) donne le résultat plus rapidement : l'initialisation vient de la définition de e_n et si $m \geqslant n+1$ est tel que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$ (remarquons que cette dernière somme peut aussi s'arrêter à $j = m$), alors

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} u_k - (m+1-n)u_n = u_{m+1} - u_n + \sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m}(u_{j+1} - u_j) + \sum_{j=n}^{m}(m-j)e_j = \sum_{j=n}^{m}(e_j + (m-j)e_j)$$

ce qui prouve l'hérédité. Finalement, $\boxed{\text{pour tous } n \geqslant 0 \text{ et } m > n, \ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1}(m-j)e_j}$.

10b. Soit n et m des entiers tels que $2 \leqslant n < m$. Remarquons que $(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k$ donc, d'après la question précédente, $\dfrac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n = \dfrac{1}{m-n}\displaystyle\sum_{j=n}^{m-1}(m-j)e_j$ donc

$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant \frac{1}{m-n}\sum_{j=n}^{m-1}(m-j)|e_j| \leqslant \sum_{j=n}^{m-1}|e_j|.$$

Or, comme $e_j = O\left(\dfrac{1}{j}\right)$, on dispose d'une constante $C > 0$ (qui ne dépend donc pas de n ni de m) telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $|e_j| \leqslant \dfrac{C}{j}$. En exploitant l'inégalité « pour tout $j \geqslant 2$, $\dfrac{1}{j} \leqslant \ln j - \ln(j-1)$ » établie à la question **2** (on peut aussi montrer cette inégalité en exploitant la concavité du logarithme), on a donc finalement :

$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant \sum_{j=n}^{m-1}\frac{C}{j} \leqslant C\sum_{j=n}^{m-1}(\ln j - \ln(j-1)) = C(\ln(m-1) - \ln(n-1)) = C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right).$$

D'où, $\boxed{\text{en notant } C = 1 + \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{N}^*}(j|e_j|) > 0, \text{ on a : pour tous } m > n \geqslant 2, \ \left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)}$.

Soit n et m des entiers tels que $2 \leqslant n < m$. On écrit :

$$u_n - \ell = u_n - \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} + \frac{(m+1)(\sigma_m - \ell) - (n+1)(\sigma_n - \ell)}{m-n}.$$

donc, d'après ce qui précède :

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (n+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n} \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (m+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n}$$

donc $\boxed{\text{pour tous } n \geqslant 2 \text{ et } m > n,\ |u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|)}$.

10c. Soit $\alpha > 1$ (que l'on choisira ultérieurement). Posons pour tout $n \geqslant 2$, $m_n = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ (remarquons que $m_n > \alpha n > n$ et que m_n est un entier). D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$, on a donc :

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m_n - 1}{n-1}\right) + \frac{m_n + 1}{m_n - n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

Or, $m_n \sim \alpha n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{m_n - 1}{n-1}\right) = \ln \alpha$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{m_n + 1}{m_n - n} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_{m_n} = \ell$. Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} C \ln\left(\frac{m_n - 1}{n-1}\right) + \frac{m_n + 1}{m_n - n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) = C \ln \alpha.$$

Comme $C \ln \alpha < 2C \ln \alpha$, on dispose donc de $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$C \ln\left(\frac{m_n - 1}{n-1}\right) + \frac{m_n + 1}{m_n - n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) \leqslant 2C \ln \alpha \quad \text{donc} \quad |u_n - \ell| \leqslant 2C \ln \alpha.$$

Finalement, pour tout $\alpha > 1$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 2C \ln \alpha$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\alpha = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right) > 1$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 2C \ln \alpha = \varepsilon$, ce qui montre que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell}$.

Section 2

1a. Supposons $R > 1$. On sait que la somme dune série entière sur le disque ouvert de convergence est continue. Comme $R > 1$, le disque fermé unité est inclus dans le disque ouvert de convergence. On en déduit que la restriction de f à $\Delta_{\theta_0} \cup \{1\}$ est continue. D'où $\boxed{\text{(Abel) dans la cas où } R > 1}$.

1b.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1) \sum\limits_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)}$.

1c. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Comme $|z| < R$, le membre de gauche de l'expression trouvée à la question précédente converge lorsque $N \to +\infty$ vers $f(z) - S$. D'autre part, comme $|z| < 1$, $\lim\limits_{N \to +\infty} z^N = 0$ et comme $\lim\limits_{N \to +\infty} R_N = 0$, on a : $\lim\limits_{N \to +\infty} R_N (z^N - 1) = 0$. Comme $z - 1 \neq 0$, on déduit finalement de ces remarques et de la question précédente que la série $\sum R_n z^n$ converge (ce que nous aurions aussi pu montrer directement) et que, en faisant $N \to +\infty$, $\boxed{f(z) - S = (z-1) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n z^n}$.

1d. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, on dispose de $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $|R_n| \leqslant \varepsilon$. D'après la question précédente, on a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ (*a priori* dans $[0, +\infty]$) :

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + |z-1| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \varepsilon |z|^n \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} |z|^{N_0+1} \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Finalement, $\boxed{\text{il existe } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |z| < 1,\ |f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}}$.

1e. Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$. Écrivons $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ où $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$. Alors

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho}{1 - |1 - \rho\cos(\theta) - i\rho\sin(\theta)|} = \frac{\rho}{1 - \sqrt{(1-\rho\cos(\theta))^2 + \rho^2\sin^2(\theta)}} = \frac{\rho}{1 - \sqrt{1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2}}$$

donc

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{\rho}{1 - \sqrt{1 - 2\rho\cos(\theta_0) + \rho^2}}.$$

Or,

$$\frac{\rho}{1 - \sqrt{1 - (2\rho\cos(\theta_0) - \rho^2)}} \underset{\rho\to 0}{\sim} \frac{\rho}{\frac{1}{2}(2\rho\cos(\theta_0) - \rho^2)} \underset{\rho\to 0}{\sim} \frac{\rho}{\rho\cos(\theta_0)} = \frac{1}{\cos(\theta_0)}$$

donc $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho}{1 - \sqrt{1 - 2\rho\cos(\theta_0) + \rho^2}} = \dfrac{1}{\cos(\theta_0)}$. Comme $\dfrac{1}{\cos(\theta_0)} < \dfrac{2}{\cos(\theta_0)}$, on dispose de $\rho(\theta_0) > 0$ tel que pour tout $\rho \in \,]0, \rho(\theta_0)]$,

$$\frac{\rho}{1 - \sqrt{1 - (2\rho\cos(\theta_0) - \rho^2)}} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } z \in \Delta_{\theta_0} \text{ de la forme } z = 1 - \rho e^{i\theta} \text{ avec } 0 < \rho \leqslant \rho(\theta_0),\ \frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}}$.

Pour de tels complexes z, on a donc : $|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \dfrac{2\varepsilon}{\cos(\theta_0)}$. Or, $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \dfrac{2\varepsilon}{\cos(\theta_0)} = \dfrac{2\varepsilon}{\cos(\theta_0)}$. Comme $\dfrac{2}{\cos(\theta_0)} < \dfrac{3}{\cos(\theta_0)}$, on dispose de $\rho_0 \in \,]0, \rho(\theta_0)]$ tel que pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ de la forme $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $0 < \rho \leqslant \rho_0$, $|z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \dfrac{2\varepsilon}{\cos(\theta_0)} \leqslant \dfrac{3\varepsilon}{\cos(\theta_0)}$. Pour de tels complexes z, on a donc : $|f(z) - S| \leqslant \dfrac{3\varepsilon}{\cos(\theta_0)}$. Par définition de la limite, on a donc établi $\boxed{\text{(Abel)}}$.

2. On considère la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, dont le rayon de convergence est 1 et dont la somme sur $]-1, 1[$ est Arctan. Remarquons que la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge. D'après (Abel) appliqué avec $\theta_0 = 0$, on peut donc affirmer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, *i.e.* $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$.

Remarque. Cette question pouvait aussi être traitée en appliquant directement le théorème d'Abel radial, qui est désormais explicitement au programme de MP et de MPI.

3. On considère la série entière $\sum (-1)^n z^n$, dont le rayon de convergence est 1 et dont la somme f sur le disque ouvert unité est $z \mapsto \dfrac{1}{1+z}$. Alors $\boxed{\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z<1}} f(z) = \frac{1}{2} \text{ tandis que la série } \sum (-1)^n \text{ diverge (grossièrement)}}$.

4a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$. Alors

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i - \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k \frac{x^k}{k}$$

donc (*a priori* dans $[0,+\infty]$) :

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} |a_k| \sum_{i=0}^{k-1} 1 + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \sup_{k>n}(k|a_k|)\frac{x^\ell}{\ell} = (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sup_{k>n}(k|a_k|)\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{x^\ell}{\ell}.$$

Or, la série entière $\sum\limits_{\ell \geqslant n+1} \dfrac{t^\ell}{\ell}$ est de rayon de convergence égal à 1 donc, comme $x \in [0,1[$, en notant h sa somme, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ et

$$\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{x^\ell}{\ell} = h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{\ell \geqslant n+1} t^{\ell-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leqslant \frac{1}{n(1-x)}.$$

Finalement $\boxed{|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \dfrac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}}$.

4b. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ou $n \geqslant 2$ si on veut que $x_n \in]0,1[$) : $|S_n - f(x_n)| \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k|a_k| + \sup\limits_{k>n}(k|a_k|)$. Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n|a_n| = 0$, on a d'une part, par définition de la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k>n}(k|a_k|) = 0$ et d'autre part, d'après le lemme de Cesàro : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k|a_k| = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - f(x_n) = 0$. Or, (x_n) est une suite de $]0,1[$ qui converge vers 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = S$. Par somme, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, ce qui établit $\boxed{\text{(Taubérien faible)}}$.

5a. Admettons (Taubérien fort cas $S=0$) et établissons (Taubérien fort cas général) en supposant donc que $\lim\limits_{\substack{x\to1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \in \mathbb{C}$ et que $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Posons alors $b_0 = a_0 - S$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_n$. Alors la série entière $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence 1 et de somme $f - S$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1^- \\ x\in\mathbb{R}}} (f-S)(x) = 0$. Comme d'autre part $b_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, (Taubérien fort cas $S=0$) assure que la série $\sum b_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = 0$, donc la série $\sum a_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = S + b_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = S$, ce qui établit (Taubérien fort cas général). Finalement, $\boxed{\text{traiter le cas } S = 0 \text{ suffit}}$.

5b. Remarquons que $\Theta \subset \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, que la fonction identiquement égale à 0 appartient à Θ et, par linéarité de la sommation et de la limite, que Θ est stable par combinaisons linéaires. Finalement, Θ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ donc $\boxed{\Theta \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.

5c. D'après la question précédente, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X^k \in \Theta$. Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, en notant P_k le polynôme X^k, on a : pour tout $x \in [0,1[$, $x^k \in [0,1[$ donc, comme le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à 1, la série $\sum a_n \left(x^k\right)^n$ converge, *i.e.* $\sum a_n P_k(x^n)$ converge, et sa somme est $f\left(x^k\right)$. Or, $P_k([0,1[) = [0,1[$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x^k = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x^k\right) = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n P_k(x^n) = 0$. Finalement pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X^k \in \Theta$, d'où $\boxed{\text{le résultat}}$.

5d. Par linéarité de la sommation, de la limite et de l'intégrale, il suffit d'établir le résultat lorsque $P = X^k$, où k est un entier naturel quelconque. Soit donc $k \in \mathbb{N}$. Remarquons que pour tout $x \in [0,1[$, la série géométrique $\sum \left(x^{k+1}\right)^n$ converge de somme $\dfrac{1}{1-x^{k+1}}$ donc $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(x^k\right)^n = \dfrac{1-x}{1-x^{k+1}}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(x^k\right)^n = \dfrac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$. D'où $\boxed{\text{le résultat}}$.

5e. Supposons que $g \in \Theta$. Alors pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum a_n g(x^n)$ converge et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = 0$. Or, pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x^n) = 1$ si et seulement si $x^n \geqslant \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $n \leqslant -\dfrac{\ln 2}{\ln x}$, et, dans le cas contraire, $g(x^n) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{\lfloor -(\ln 2)/(\ln x)\rfloor} a_n$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\lfloor -(\ln 2)/(\ln x)\rfloor} a_n = 0$. Comme la suite d'éléments de $]0,1[$ définie par $(e^{-(\ln 2)/N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1, on en déduit en particulier que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n = 0$, ce qui établit (Taubérien fort cas $S = 0$) puis, d'après la question **a**, $\boxed{\text{(Taubérien fort)}}$

5f. On remarque que pour tout $x \in [0,1]$, $h(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0,1/2[\\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit les fonctions $f_n, g_n \in \mathcal{C}^0([0,1])$ en posant, pour tout $x \in [0,1/2] \cup [1/2+1/n, 1]$ et pour tout $y \in [0, 1/2-1/n] \cup [1/2, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0,1/2] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1/2+1/n, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad g_n(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-y} & \text{si } y \in [0,1/2-1/n] \\ \dfrac{1}{y} & \text{si } y \in [1/2,1], \end{cases}$$

sachant que l'on impose en outre que la restriction de f_n au segment $[1/2, 1/2+1/n]$ et que celle de g_n au segment $[1/2-1/n, 1/2]$ soient affines. Alors $-2 \leqslant f_n \leqslant h \leqslant g_n \leqslant 2$ et

$$\int_0^1 (g_n - f_n) = \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} (g_n - f_n) \leqslant \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} 4 = \frac{8}{n}.$$

Ainsi, en considérant $n_0 = 2 + \lfloor 8/\varepsilon \rfloor$, on a : $n_0 \geqslant 2$ et $\dfrac{8}{n_0} \leqslant \varepsilon$ donc $\boxed{\text{les fonctions } s_1 = f_{n_0} \text{ et } s_2 = g_{n_0} \text{ conviennent}}$.

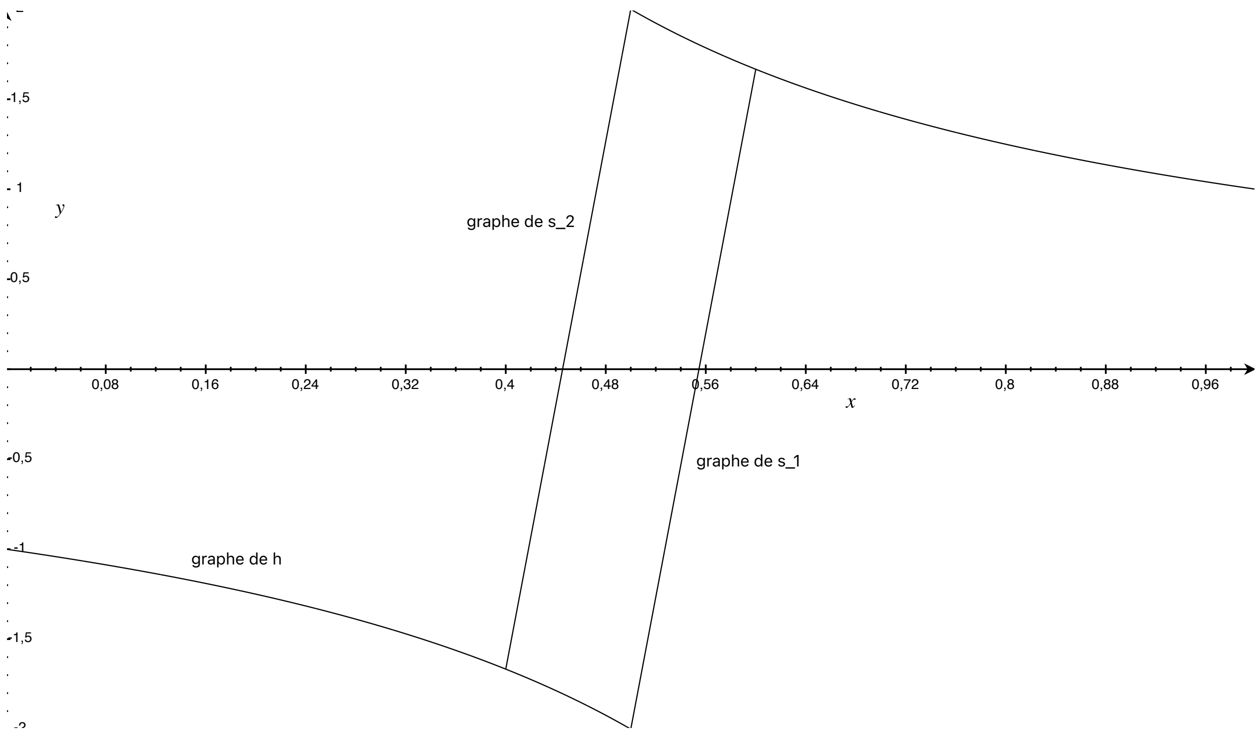

Figure 1 – On a représenté ici h, s_1 et s_2 lorsque $\varepsilon = 1$ (donc lorsque $n_0 = 10$).

5g. La continuité des fonctions réelles s_1 et s_2 sur le segment $[0,1]$ ainsi que le théorème de Weierstrass assurent $\boxed{\text{le résultat}}$.

5h. Les vérifications de $P_1(0) = P_2(0) = 0$ et de $P_1(1) = P_2(1) = 1$ sont immédiates, ce qui montre d'ailleurs que $Q \in \mathbb{R}[X]$. D'autre part, pour tout $x \in \,]0,1[$,

$$g(x) - P_1(x) = x(1-x)(h(x) - T_1(x) + \varepsilon) \geqslant x(1-x)(s_1(x) - T_1(x) + \varepsilon) \geqslant 0$$

et comme $g(0) - P_1(0) = g(1) - P_1(1) = 0$, on a bien : $g - P_1 \geqslant 0$. De même $P_2 - g \geqslant 0$. En particulier $Q = P_2 - P_1 \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 Q \geqslant 0$. Enfin, pour tout $x \in \,]0,1[$,

$$Q(x) = T_2(x) - T_1(x) + 2\varepsilon = s_2(x) - s_1(x) + 2\varepsilon + (T_2(x) - s_2(x)) + (s_1(x) - T_1(x)) \leqslant s_2(x) - s_1(x) + 4\varepsilon$$

donc par continuité de Q et de $s_2 - s_1 + 4\varepsilon$ en 0 et en 1, on a : $Q \leqslant s_2 - s_1 + 4\varepsilon$, donc $\displaystyle\int_0^1 Q \leqslant \int_0^1 (s_2 - s_1 + 4\varepsilon) \leqslant 5\varepsilon$. D'où $\boxed{\text{le résultat}}$.

5i. Soit $x \in \,]0,1[$. On a déjà remarqué que la série $\sum a_n g(x^n)$ est à support fini donc converge. Comme par ailleurs $P_1(0) = 0$, la question **c** assure que la série $\sum a_n P_1(x^n)$ converge. On remarque enfin que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) = a_0(g(1) - P_1(1)) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (g(x^n) - P_1(x^n)).$$

Comme $g(1)=P_1(1)=1$, on obtient (*a priori* dans $[0,+\infty]$) :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||g(x^n)-P_1(x^n)|.$$

Or, $0 \leqslant g-P_1 \leqslant P_2-P_1$ et comme $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on dispose d'une constante $M>0$ (qui ne dépend ni de x ni de ε) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{n}$. Ainsi (toujours *a priori* dans $[0,+\infty]$) :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{n}(P_2(x^n)-P_1(x^n)) = M\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n)\frac{1-x^n}{n} = M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leqslant n$, on en déduit que

$$\boxed{\text{en notant } M = 1+\sup_{n\in\mathbb{N}^*}(n|a_n|)>0, \text{ on a : pour tout } x\in\,]0,1[,\ \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n)}.$$

5j. D'après la question **e**, il suffit de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)=0$. Remarquons que, d'après la question précédente, pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| + M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n).$$

Or, d'après les questions **c** et **d**, le membre de droite de l'expression précédente admet une limite quand $x\to 1^-$ égale à $M\displaystyle\int_0^1 Q$. Or, d'après la question **h**, $\displaystyle\int_0^1 Q \leqslant 5\varepsilon$. On en déduit que $M\displaystyle\int_0^1 Q < 6M\varepsilon$. On dispose donc de $\eta\in\,]0,1[$ tel que pour tout $x\in[1-\eta,1[$, $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| + M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n) \leqslant 6M\varepsilon$. Finalement, pour tout $x\in[1-\eta,1[$, $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leqslant 6M\varepsilon$, ce qui montre, d'après la définition de la limite, que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)=0$. D'où $g\in\Theta$. La question **e** assure maintenant que $\boxed{\text{(Taubérien fort) est établi}}$.

Section 3

1. Supposons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$. Puisque $f(x)-\ell \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$, que $f-\ell$ est continue sur $[0,+\infty[$ et que la fonction constante égale à 1 est continue, positive et non intégrable sur $[0,+\infty[$, on sait que $\displaystyle\int_0^x (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right)$, *i.e.* que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\ell x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, ce qui montre que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\ell.}$.

2. Remarquons que $\cos\in\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$, que pour tout $x>0$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin x}{x}$ donc $\displaystyle\left|\frac{1}{x}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t=0$. Or, cos n'a pas de limite en $+\infty$. D'où $\boxed{\text{le résultat}}$.

3. Quitte à écrire, pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)=(f(x)-\ell x)+\ell x$ et à établir le résultat demandé avec la fonction continue $x\geqslant 0\mapsto f(x)-\ell x$ et le réel 0, on peut supposer que $\ell=0$; supposons donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x)=0$ et montrons que, alors, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. On écrit, pour tout $x\geqslant 0$:

$$f(x)=f(x-\lfloor x\rfloor)+\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1} f(x-\lfloor x\rfloor+k+1)-f(x-\lfloor x\rfloor+k).$$

En posant $g : x \geqslant 0 \mapsto f(x+1) - f(x)$, on a donc, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x - \lfloor x \rfloor)}{x} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \times \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} g(x - \lfloor x \rfloor + k).$$

Or, la fonction g tend vers 0 en $+\infty$ donc on dispose de $A > 0$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$, $|g(x)| \leqslant 1$ et par continuité de g sur le segment $[0, A]$, la restriction de g à $[0, A]$ est bornée ; on en déduit que g est bornée sur $[0, +\infty[$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|g\|_{\infty,[k,+\infty[} = \sup_{x \geqslant k} |g(x)|$. Remarquons aussi que, par continuité de f sur le segment $[0, 1]$, la restriction de f à $[0, 1]$ est bornée ; notons $\|f\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Nous pouvons donc maintenant remarquer que pour tout $x \geqslant 1$:

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leqslant \frac{\|f\|_{\infty,[0,1]}}{x} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \times \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \|g\|_{\infty,[k,+\infty[}.$$

Or, comme $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on a : $\lim_{k \to +\infty} \|g\|_{\infty,[k,+\infty[} = 0$, donc d'après le lemme de Cesàro, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|g\|_{\infty,[k,+\infty[} = 0$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$, on en déduit finalement que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. D'où $\boxed{\text{le résultat}}$.

4. Posons $g : (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[\mapsto e^{-tx} f(x)$. Alors :

- pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \in]0, +\infty[\mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$,
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \in [0, +\infty[\mapsto g(x, t)$ est continue par continuité de f et intégrable puisque, comme f est bornée, $g(x, t) = \underset{x \to +\infty}{O}(e^{-tx})$ et que $x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-xt}$ est positive et intégrable,
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = -xe^{-tx} f(x)$ est continue par continuité de f,
- pour tout $a \in]0, +\infty[$ et pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times [a, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leqslant \|f\|_\infty x e^{-ax}$. Remarquons que la fonction continue $x \in [0, +\infty[\mapsto \|f\|_\infty x e^{-ax}$ est intégrale puisque, par croissance comparée $\|f\|_\infty x e^{-ax} = \underset{x \to +\infty}{O}(e^{-ax/2})$ et que $x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-ax/2}$ est positive et intégrable.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est bien définie et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et pour tout } t > 0,\ \mathcal{L}(f)'(t) = -\int_0^{+\infty} xe^{-tx} f(x)\, \mathrm{d}x}$.

5a. La convergence de $\int_0^{+\infty} f$ assure que $\boxed{F \text{ est bien définie}}$. Remarquons par ailleurs que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f - \int_0^x f$. Comme la fonction f est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure donc que la fonction $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[}$ et que $\boxed{F' = -f}$. Enfin, comme la fonction F tend vers 0 en $+\infty$, on dispose de $A > 0$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$, $|F(x)| \leqslant 1$ et par continuité de F sur le segment $[0, A]$, la restriction de F à $[0, A]$ est bornée ; on en déduit que $\boxed{F \text{ est bornée sur } [0, +\infty[}$.

5b. Soit $t > 0$. On sait que d'après la question **4** que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\, \mathrm{d}x$ converge. D'après la question précédente, $\int_0^{+\infty} e^{-tx} F'(x)\, \mathrm{d}x$ converge donc (et est égale à $-\mathcal{L}(f)(t)$). Puisque d'autre part le crochet $[e^{-tx} F(x)]_{x=0}^{x \to +\infty}$ converge (puisque les fonctions F et $x \mapsto e^{-tx}$ tendent vers 0 en $+\infty$) et est égal à $-F(0) = -\int_0^{+\infty} f$ et que les fonctions F et $x \mapsto e^{-tx}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit par intégration par parties que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-tx} F(x)\, \mathrm{d}x$ converge et que

$$-\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\, \mathrm{d}x = [e^{-tx} F(x)]_{x=0}^{x \to +\infty} + \int_0^{+\infty} te^{-tx} F(x)\, \mathrm{d}x, \quad i.e. \quad \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f - t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x)\, \mathrm{d}x.$$

Soit $\alpha > 0$ (que l'on choisira ultérieurement). On a donc (*a priori* dans $[0,+\infty]$) :

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}(f)(t) - \int_0^{+\infty} f\right| &\leqslant t\int_0^{+\infty} e^{-tx}|F(x)|\,\mathrm{d}x = t\int_0^{\alpha} e^{-tx}|F(x)|\,\mathrm{d}x + t\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-tx}|F(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|F\|_\infty t\int_0^{\alpha} e^{-tx}\,\mathrm{d}x + \|F\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}t\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|F\|_\infty(1-e^{\alpha t}) + \|F\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}t\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(t,\alpha) \in]0,+\infty[^2$, $\left|\mathcal{L}(f)(t) - \int_0^{+\infty} f\right| \leqslant \|F\|_\infty(1-e^{\alpha t}) + \|F\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, on dispose de $\alpha_0 > 0$ tel que $\|F\|_{\infty,[\alpha_0,+\infty[} \leqslant \varepsilon$. Remarquons d'autre part que $\lim\limits_{t\to 0}\|F\|_\infty(1-e^{\alpha_0 t}) = 0$ donc on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]0,\eta]$, $\|F\|_\infty(1-e^{\alpha_0 t}) \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $t \in]0,\eta]$, $\left|\mathcal{L}(f)(t) - \int_0^{+\infty} f\right| \leqslant 2\varepsilon$. Par définition de la limite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+}\mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f}$.

6. On considère la fonction $f : x \geqslant 0 \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$. Alors $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[)$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on montre via un argument déjà rencontré plusieurs fois que f est bornée. Par ailleurs, puisque $\dfrac{\cos x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et que la fonction positive $x \geqslant 1 \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable, on sait que la fonction continue $x \geqslant 1 \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est intégrable donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Puisque les fonctions cos et inverse sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et que le crochet $[\cos(x)/x]_{x=1}^{x\to+\infty}$ converge, on en déduit par intégration par parties que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge. La continuité de f sur le segment $[0,1]$ donne donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$. On peut finalement appliquer la question **5** qui assure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\mathcal{L}(f)(t)$.

Or, d'après la question **4**, $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}(f)'(t) = -\int_0^{+\infty} xe^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}\sin(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $t > 0$, la fonction $x \geqslant 0 \mapsto e^{ix}e^{-tx} = e^{(-t+i)x}$ est intégrable et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix}e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-t+i)x}}{-t+i}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{t-i}$. On en déduit que pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}(f)'(t) = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-i}\right) = -\frac{1}{t^2+1}.$$

On dispose donc d'une constante $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0$, $\mathcal{L}(f)(t) = K - \operatorname{Arctan} t$. En particulier $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathcal{L}(f)(t) = K - \dfrac{\pi}{2}$. Or, pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-tx}f(x) = 0$ et pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[1,+\infty[$, $|e^{-tx}f(x)| \leqslant \|f\|_\infty e^{-x}$. Comme la fonction $x > 0 \mapsto \|f\|_\infty e^{-x}$ est intégrable, le théorème de convergence dominée version continue assure que $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathcal{L}(f)(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$. L'unicité de la limite assure finalement que $K = \dfrac{\pi}{2}$ puis que pour tout $t > 0$, $\mathcal{L}(f)(t) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t$. En particulier $\lim\limits_{t\to 0^+}\mathcal{L}(f)(t) = \dfrac{\pi}{2}$.

On peut conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$.

7. Supposons que $\lim\limits_{t\to 0^+}\mathcal{L}(f)(t) = S$ et que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t}\right)$: on dipose de $M > 0$ et de $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant \dfrac{M}{t}$. Notre objectif est de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = S$. On reprend les idées et les notations de la question **5** de la section **2**. En particulier, on peut supposer sans perte de généralité que $S = 0$. Notre objectif est donc de démontrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\int_0^{+\infty} f(x)g(e^{-tx})\,\mathrm{d}x = 0$. On se fixe donc $\varepsilon > 0$. On introduit les fonctions P_1, P_2 et Q comme à la question **5** de la section **2**.

Soit $t > 0$. On a (*a priori* dans $[0, +\infty]$) :

$$\int_A^{+\infty} \left| f(x)g(e^{-tx}) - f(x)P_1(e^{-tx}) \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_A^{+\infty} \frac{M}{x}(P_2 - P_1)(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x = M \int_A^{+\infty} Q(e^{-tx}) e^{-tx} \frac{1 - e^{-tx}}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \geqslant 0$, par convexité de la fonction exponentielle, $1 + tx \leqslant e^{tx}$. Donc, toujours *a priori* dans $[0, +\infty]$:

$$\int_A^{+\infty} \left| f(x)g(e^{-tx}) - f(x)P_1(e^{-tx}) \right| \mathrm{d}x \leqslant Mt \int_A^{+\infty} Q(e^{-tx}) e^{-tx} \,\mathrm{d}x \leqslant Mt \int_0^{+\infty} Q(e^{-tx}) e^{-tx} \,\mathrm{d}x.$$

Or, puisque la fonction $x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-tx} \in]0, 1]$ est bijective, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'intégrale $\int_0^1 Q(u) \,\mathrm{d}u$ converge, on sait, via le changement de variable $u = e^{-tx}$ que d'une part l'intégrale $t \int_0^{+\infty} Q(e^{-tx}) e^{-tx} \,\mathrm{d}x$ converge et que $t \int_0^{+\infty} Q(e^{-tx}) e^{-tx} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(u) \,\mathrm{d}u$. Finalement, l'intégrale $\int_A^{+\infty} \left(f(x)g(e^{-tx}) - f(x)P_1(e^{-tx}) \right) \mathrm{d}x$ converge absolument donc converge et

$$\int_A^{+\infty} \left(f(x)g(e^{-tx}) - f(x)P_1(e^{-tx}) \right) \mathrm{d}x \leqslant M \int_0^1 Q(u) \,\mathrm{d}u.$$

Or, comme $\int_0^{(\ln 2)/t} f(x) \,\mathrm{d}x$ converge et par définition de g, $\int_0^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x$ converge puis $\int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x$ converge. D'où $\int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x$ converge et $\boxed{\left| \int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| \leqslant M \int_0^1 Q(u) \,\mathrm{d}u}$. On en déduit que $\left| \int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| \leqslant 5M\varepsilon$.

Écrivons, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \\ = \ &\int_0^A f(x) \left(g(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}) \right) \mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| \\ \leqslant \ &\int_0^A |f(x)| \left| g(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}) \right| \mathrm{d}x + \left| \int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| \\ \leqslant \ &\|f\|_\infty \int_0^A \left(P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}) \right) \mathrm{d}x + 5M\varepsilon + \left| \int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right|. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0, A]$, $\lim_{t \to 0^+} P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}) = P_2(1) - P_1(1) = 0$ et pour tout $(x, t) \in [0, A] \times]0, +\infty[$, $|P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx})| \leqslant \|P_2 - P_1\|_{\infty, [0,1]}$. Comme la fonction $x \in [0, A] \mapsto \|P_2 - P_1\|_{\infty, [0,1]}$ est intégrable, le théorème de convergence dominée version continue assure que $\lim_{t \to 0^+} \int_0^A \left(P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}) \right) \mathrm{d}x = 0$. D'autre part, puisque $P_1 \in \mathbb{R}[X]$, que $P_1(0) = 0$ et que $\lim_{t \to 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = 0$, on peut montrer comme à la question **5c** de la section **2** que $\lim_{t \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x = 0$. Finalement,

$$\lim_{t \to 0^+} \|f\|_\infty \int_0^A \left(P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}) \right) \mathrm{d}x + 5M\varepsilon + \left| \int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| = 5M\varepsilon.$$

Comme $5M\varepsilon < 6M\varepsilon$, on dispose donc de $\eta \in]0, +\infty[$ tel que pour tout $t \in]0, \eta[$,

$$\|f\|_\infty \int_0^A \left(P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}) \right) \mathrm{d}x + 5M\varepsilon + \left| \int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| \leqslant 6M\varepsilon.$$

Finalement, pour tout $t \in]0, \eta[$, $\left| \int_0^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x \right| \leqslant 6M\varepsilon$, ce qui montre, d'après la définition de la limite, que $\lim_{t \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(x)g(e^{-tx}) \,\mathrm{d}x = 0$. D'où $\boxed{\text{le résultat}}$.