SESSION 2002

Filière MP (groupes M/MP/MPI)

(Épreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan)

Filières MP et PC (groupe I)

(Épreuve commune aux ENS de Paris et Lyon)

MATHÉMATIQUES

Corrigé de M. Quercia (michel.quercia@prepas.org)

Première partie : introduction

Question 1a.
Pour $x = 0$ tout $y \in \mathbb{R}^2$ de norme 1 convient. Pour $x \neq 0$, alors $y = x/\|x\|_2$ convient (et c'est la seule solution).

Question 1b.
$y = (y_1, \ldots, y_n)$ avec $y_i = 1$ si $x_i \geqslant 0$ et $y_i = -1$ si $x_i < 0$ convient.

Question 1c.
Soit i un entier tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ avec $y_i = 1$ si $x_i \geqslant 0$, $y_i = -1$ si $x_i < 0$, et $y_j = 0$ si $j \neq i$. Alors y satisfait aux conditions demandées.

Question 2.
Notons, pour $p \in \{1, 2, \infty\}$, $\|\varphi_x\|_p^*$ la norme de φ_x en tant qu'élément de $(\ell_n^p)^*$.

Cas $p = 2$: d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\|y\|_2 = 1$ alors on a : $|\varphi_x(y)| \leqslant \|x\|_2\|y\|_2 = \|x\|_2$ avec égalité si y est le vecteur trouvé en **1a**. Ceci prouve que $\|\varphi_x\|_2^* = \|x\|_2$.

Cas $p = \infty$: d'après l'inégalité triangulaire, si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\|y\|_\infty = 1$ alors on a : $|\varphi_x(y)| \leqslant \|x\|_1\|y\|_\infty = \|x\|_1$ avec égalité si y est le vecteur trouvé en **1b**. Ceci prouve que $\|\varphi_x\|_\infty^* = \|x\|_1$.

Cas $p = 1$: idem, $\|\varphi_x\|_1^* = \|x\|_\infty$.

Dans tous les cas, on a ainsi prouvé que $\Phi : x \longmapsto \varphi_x$ est une isométrie entre les espaces normés considérés. Étant clairement linéaire, Φ est alors injective, puis surjective puisque les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension finie.

Question 3a.
Calcul immédiat (identité du parallélogramme).

Question 3b.
Si $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|(x + y)/2\|_2$ alors on déduit de l'identité du parallélogramme que $\|x - y\|_2^2 = 0$ d'où $x = y$.

Question 3c.
ℓ_n^1 contient des vecteurs x, y distincts tels que $\|x_1\| = \|y\|_1 = \|(x + y)/2\|_1$, par exemple $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (0, \ldots, 0, 1)$. L'existence de ces vecteurs contredit l'existence éventuelle d'une isométrie entre ℓ_n^1 et ℓ_n^2 donc ces deux espaces normés ne sont pas isométriques. On montre de même la non isométrie de ℓ_n^2 et ℓ_n^∞ à l'aide des vecteurs $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (1, 0, \ldots, 0, 1)$.

Question 4a.
Soient U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$ denses (pour une norme quelconque $\| \ \|$) et $x \in \mathbb{R}^n$. Il existe une suite (u_k) d'éléments de U convergeant vers x. On note ε_k un réel strictement positif tel que la boule ouverte de centre u_k et de rayon ε_k est incluse dans U et, quitte à diminuer les ε_k, on peut supposer que $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Comme u_k est limite d'une suite d'éléments de V, il existe $v_k \in V$ tel que $\|u_k - v_k\| < \varepsilon_k$. Alors $v_k \in U \cap V$ et $\|v_k - x\| \leqslant \|u_k - x\| + \varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Ceci prouve que x est limite d'une suite d'éléments de $U \cap V$ et donc que cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Question 4b.

Soit π une projection quelconque dans $\mathbb{R}^n$ de direction E. π est linéaire partant d'un espace vectoriel de dimension finie, donc est continue. Alors $E = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \pi(x) = 0\} = \pi^{-1}(\{0\})$ est fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue), donc $\mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert. Pour démontrer la densité, considérons un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $u \in \mathbb{R}^n \setminus E$. La suite $(x + \frac{1}{k}u)_{k \geqslant 1}$ converge vers x, et tous ses termes sauf au plus un sont dans $\mathbb{R}^n \setminus E$, donc x est bien adhérent à $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Question 4c.

Soient $E_1, \ldots, E_k$ des sous-espaces stricts de E. Alors les ensembles $U_i = E \setminus E_i$ sont des ouverts relatifs de E, denses dans E, donc leur intersection est aussi un ouvert dense dans E par récurrence sur k à l'aide de **4a**. En particulier cette intersection est non vide, ce qui prouve que $E \neq E_1 \cup \ldots \cup E_k$. Par contraposée, on obtient le résultat demandé.

Question 5a.

Coquille de l'énoncé : lire $a = (a_1, \ldots, a_m)$.

Pour fixer les idées, on suppose que $|a_1| > \max(|a_2|, \ldots, |a_m|)$. L'ensemble $F = \{t = (t_1, \ldots, t_m) \in E \text{ tq } t_1 = 0\}$ est un sous-espace de E de codimension au plus 1 (noyau d'une forme linéaire), donc n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $\dim E \geqslant 2$. Choisissons un élément $t \neq 0$ dans ce sous-espace et posons $b = a + \varepsilon t$ avec $\varepsilon > 0$ à choisir. On a $b_1 = a_1$ et pour $i \geqslant 2$, $|b_i| \leqslant |a_i| + \varepsilon |t_i| < |a_1|$ si ε est choisi suffisament petit. Avec un tel choix on a, $b \in E$, $b \neq a$, $\|b\|_\infty = \|a\|_\infty$, et le vecteur $c = (a+b)/2 = a + (\varepsilon/2)t$ a aussi même norme infinie que a et b car $c_1 = a_1$ et $|c_i| \leqslant |a_i| + (\varepsilon/2)|t_i| < |a_1|$ si $i \geqslant 2$. Alors les vecteurs $x = a/\|a\|_\infty$ et $y = b/\|a\|_\infty$ vérifient les conditions demandées.

Question 5b.

Notons pour $i, j \in \{1, m\}$ distincts : $E^+_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_i = x_j\}$ et $E^-_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_i = -x_j\}$. Si E ne vérifie pas la condition **5a**, alors E est inclus dans la réusion des $2C^2_m$ sous-espaces $E \cap E^+_{i,j}$, $E \cap E^-_{i,j}$ obtenus quand i, j décrivent $\{1, m\}$ en restant distincts. D'après **4c**, E est égal à l'un de ces sous-espaces, c'est-à-dire qu'il existe $i, j \in \{1, m\}$ distincts tels que $E \subset E^+_{i,j}$ ou $E \subset E^-_{i,j}$. On conclut en remarquant que $E^+_{i,j}$ et $E^-_{i,j}$ sont isométriques à ℓ^∞_{m-1} via l'application « suppression de x_j » : $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Question 5c.

On démontre par récurrence sur $m \geqslant 2$ que tout sous-espace E de dimension au moins 2 de ℓ^∞_m contient deux vecteurs unitaires x, y distincts dont la demi-somme est aussi unitaire. Lorsque $m = 2$ on a $E = \ell^\infty_2$ et c'est un fait connu depuis la question **3c**. Si l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $m-1$ et si E est un sous-espace de dimension au moins 2 de ℓ^∞_m, alors E relève de l'un des cas **5a** ou **5b** et l'existence de x, y est établie directement dans **5a**, et par application de l'hypothèse de récurrence dans le cas **5b**. Ceci achève la démonstration.

Question 5d.

Si ℓ^2_n était isométrique à un sous-espace E d'un ℓ^∞_m pour un certain entier m et pour $n \geqslant 2$, alors les vecteurs x, y mis en évidence dans E à la question précédentes fourniraient une contradiction à **3b**. Par contre, dans le cas $n = 1$, ℓ^2_1 est isométrique à ℓ^∞_1 via l'application identité.

Question 6a.

D'une manière générale, toute partie A compacte non vide d'un espace vectoriel normé contient une suite dense. La propriété demandée dans l'énoncé résulte de l'application de ce résultat en prenant pour A la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour $\| \ \|_2$ dont la compacité est connue.

Démonstration : A est recouvert par un nombre fini de boules de rayon 1 dont les centres appartiennent à A (propriété de Borel-Lebesgue), on note $x_1, \ldots, x_{n_1}$ les centres des boules associées à un tel recouvrement. Ensuite, A est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$ dont les centres appartiennent à A, centres que l'on note $x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2}$, etc. On construit ainsi de proche en proche une suite (x_i) d'éléments de A telle que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in A$ il existe un indice i tel que x appartienne à la boule de centre x_i et de rayon $1/k$, soit $\|x_i - x\| \leqslant 1/k$. Ceci prouve que l'ensemble $\{x_i, \ i \in \mathbb{N}\}$ est dense dans A.

Question 6b.

Soit $f : \begin{cases} \ell_n^2 & \longrightarrow & \ell_{\mathbb{N}}^\infty \\ x & \longmapsto & (< x, x_k >)_{k\in\mathbb{N}} \end{cases}$ où (x_k) est une suite de vecteurs unitaires de ℓ_n^2 dense dans la sphère unité de ℓ_n^2, notée S_n^2. L'application f est clairement linéaire et l'on a pour $x \in \ell_n^2$:

$$\|f(x)\|_\infty = \sup\{|< x, x_k >| \text{ tq } k \in \mathbb{N}\} \leqslant \|x\|_2,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, si $y \in S_n^2$ est le vecteur mis en évidence dans **1a**, alors il existe une sous-suite (x_{k_p}) convergeant vers y, donc $|< x, x_{k_p} >| \xrightarrow[p\to\infty]{} |< x, y >| = \|x\|_2$, d'où $\|f(x)\|_\infty = \|x\|_2$. Ceci prouve que la corestriction de f à son image définit une isométrie de ℓ_n^2 sur un sous-espace de $\ell_{\mathbb{N}}^\infty$.

Deuxième partie : distance entre evn

Question 1.

Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E et l'on a $(f^{-1})^{-1} = f$ donc $\rho(E, F) = \rho(F, E)$ car il s'agit des bornes inférieures de deux ensembles égaux. On en déduit $d(E, F) = d(F, E)$.

Pour trois espaces, E, F, G de même dimension, considérons un isomorphisme f de E sur F et un isomorphisme g de F sur G. Alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G de réciproque $g^{-1} \circ f^{-1}$ et l'on a :

$$\rho(E, G) \leqslant \|f \circ g\|\|g^{-1} \circ f^{-1}\| \leqslant \|f\|\|f^{-1}\|\|g\|\|g^{-1}\|.$$

A g fixé, on prend la borne inférieure des deux membres lorsque f décrit l'ensemble des isomorphismes de E sur F, ce qui donne :

$$\rho(E, G) \leqslant \rho(E, F)\|g\|\|g^{-1}\|,$$

pour tout isomorphisme g de F sur G. En prenant maintenant les bornes inférieures par rapport à g on obtient finalement : $\rho(E, G) \leqslant \rho(E, F)\rho(F, G)$. L'inégalité triangulaire demandée s'ensuit en passant aux logarithmes.

Question 2.

Déjà, E^* et F^* ont même dimension, celle commune à E et F. Considérons alors un isomorphisme f de E sur F et l'application $\Phi : \begin{cases} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \ell & \longmapsto & \ell \circ f \end{cases}$ (Φ est l'application *transposée* de f). Alors Φ est linéaire, bijective de réciproque $m \longmapsto m \circ f^{-1}$, et l'on a pour $\ell \in F^*$: $\|\Phi(\ell)\| = \|\ell \circ f\| \leqslant \|\ell\|\|f\|$. Ceci montre que $\|\Phi\| \leqslant \|f\|$ et l'on a par un raisonnement similaire : $\|\Phi^{-1}\| \leqslant \|f^{-1}\|$. Ainsi, $\rho(F^*, E^*) \leqslant \|\Phi\|\|\Phi^{-1}\| \leqslant \|f\|\|f^{-1}\|$, d'où, en prenant la borne inférieure par rapport à f : $\rho(F^*, E^*) \leqslant \rho(E, F)$. Ceci prouve que $d(E^*, F^*) = d(F^*, E^*) \leqslant d(E, F)$.

Remarque : l'inégalité inverse est aussi vraie, mais non triviale (et donc il y a en fait égalité). C'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach qui implique que tout espace vectoriel normé E de dimension finie est isométrique à son bidual E^{**}.

Question 3.

Si f est un isomorphisme quelconque de E sur F alors, pour tout réel $\lambda \neq 0$, λf est aussi un isomorphisme de E sur F et l'on a : $\|\lambda f\|\|(\lambda f)^{-1}\| = |\lambda|\|f\| \times |\lambda^{-1}|\|f^{-1}\| = \|f\|\|f^{-1}\|$. En prenant $\lambda = 1/\|f\|$ on obtient :

$$\rho(E, F) = \inf\{\|f\|\|f^{-1}\| \text{ tq } f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } F \text{ et } \|f\| = 1\} = \inf\{\|f^{-1}\| \text{ tq } f \in S\}$$

où S est l'ensemble des isomorphismes de E sur F de norme 1. Considérons une *suite minimisante*, c'est-à-dire une suite (f_k) d'éléments de S telle que $\|f_k^{-1}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho(E, F)$. La suite (f_k) est bornée dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$, donc, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge vers une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$. De plus, la suite (f_k^{-1}) est elle aussi bornée (dans $\mathcal{L}(F, E)$) donc on peut également supposer qu'elle converge vers une application linéaire $g \in \mathcal{L}(F, E)$. Comme la composition des applications linéaires est continue par rapport aux opérandes, la relation $f_k \circ f_k^{-1} = \mathrm{id}_F$ entraîne $f \circ g = \mathrm{id}_F$ par passage à la limite. On a de même $g \circ f = \mathrm{id}_E$, donc f et g sont deux isomorphismes réciproques. Enfin, on a $\|f\| = \lim \|f_k\| = 1$ et $\|f^{-1}\| = \|g\| = \lim \|f_k^{-1}\| = \rho(E, F)$ d'où $\rho(E, F) = \|f\|\|f^{-1}\|$.

Question 4.
Pour f isomorphisme quelconque de E sur F on a $\|f\|\|f^{-1}\| \geqslant \|f \circ f^{-1}\| = \|\mathrm{id}_F\| = 1$, d'où $\rho(E,F) \geqslant 1$ et $d(E,F) \geqslant 0$.

Lorsque E et F sont isométriques, soit f une isométrie de E sur F : on a $\|f\| = \|f^{-1}\| = 1$ par définition, donc $\rho(E,F) \leqslant 1$, $d(E,F) \leqslant 0$, d'où $d(E,F) = 0$ d'après le premier paragraphe.

Réciproquement, si $d(E,F) = 0$, d'après la question précédente il existe un isomorphisme f de E sur F tel que $\|f\| = \|f^{-1}\| = 1$. Alors, si $x \in E$, on a :

$$\|x\| = \|f^{-1}(f(x))\| \leqslant \|f^{-1}\|\|f(x)\| = \|f(x)\| \leqslant \|f\|\|x\| = \|x\|,$$

d'où $\|f(x)\| = \|x\|$, ce qui prouve que f est une isométrie de E sur F.

Remarque : on a ainsi prouvé que d induit une distance entre les classes d'équivalence des espaces vectoriels normés de dimension n pour la relation d'équivalence « être isométrique ».

Troisième partie : calcul de $d(\ell_n^2, \ell_n^\infty)$

Question 1.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ donc, en notant f l'application identité de ℓ_n^2 dans ℓ_n^∞, on a $\|f\| \leqslant 1$ et $\|f^{-1}\| \leqslant \sqrt{n}$ d'où $\rho(\ell_n^2, \ell_n^\infty) \leqslant \sqrt{n}$, ce qu'il fallait démontrer.

Question 2a.
La formule demandée est une généralisation immédiate de l'identité du parallélogramme.

Question 2b.
Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par $x_1, \ldots, x_n$ et $x \in E^\perp$. D'après l'inégalité donnée, on a $\|x\|_2 \leqslant \beta \times 0 = 0$ donc $x = 0$. Ceci prouve que $E^\perp \subset \{0\}$, d'où $E \supset \{0\}^\perp = \mathbb{R}^n$ donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice à n éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

L'application f : $\begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (< x, x_i >)_{1 \leqslant i \leqslant n} \end{cases}$ est linéaire injective (son noyau est $E^\perp$) donc c'est une bijection. La famille $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ demandée est l'image réciproque par f de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Question 2c.
Il suffit d'appliquer l'inégalité : $\alpha \max\{|< x_i, x >|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \max\{|< x_i, x >|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i^*$.

Question 2d.
On prend $y_i = x_i^*$:

$$A = \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1^* + \ldots + \varepsilon_n x_n^*\|^2 \leqslant \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1} \beta^2 = 2^n \beta^2,$$
$$A = 2^n(\|x_1^*\|^2 + \ldots + \|x_n^*\|^2) \geqslant 2^n n \alpha^2.$$

Question 3.
Soit f : $\begin{cases} \ell_n^2 & \longrightarrow & \ell_n^\infty \\ x & \longmapsto & (f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{cases}$ un isomorphisme quelconque de ℓ_n^2 sur ℓ_n^∞. Les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, donc il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ tels que $f_i(x) = < x_i, x >$ pour tout i et pour tout x. On a alors :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \frac{1}{\|f\|} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |< x_i, x >| = \frac{1}{\|f\|}\|f(x)\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|f^{-1}\|\|f(x)\|_\infty = \|f^{-1}\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |< x_i, x >|,$$

d'où $n/\|f\|^2 \leqslant \|f^{-1}\|^2$ d'après la question précédente, et donc $\|f\|\|f^{-1}\| \geqslant \sqrt{n}$. Ceci prouve que $\rho(\ell_n^2, \ell_n^\infty) \geqslant \sqrt{n}$, soit $d(\ell_n^2, \ell_n^\infty) \geqslant \frac{1}{2}\ln(n)$ et l'inégalité inverse a été établie en **1**, donc il y a égalité.

Question 4.

D'après **I-2** et **II-2**, on a :

$$d(\ell_n^2, \ell_n^1) = d((\ell_n^2)^*, (\ell_n^\infty)^*) \leqslant d(\ell_n^2, \ell_n^\infty) = d((\ell_n^2)^*, (\ell_n^1)^*) \leqslant d(\ell_n^2, \ell_n^1),$$

d'où $d(\ell_n^2, \ell_n^1) = d(\ell_n^2, \ell_n^\infty) = \frac{1}{2}\ln n$.

Quatrième partie, A : inégalités de convexité

*Remarque : toutes les questions qui suivent sont fort ennuyeuses, surtout venant après les parties **II** et **III** plutôt difficiles. L'énoncé aurait pu introduire la définition des espaces ℓ_n^p et admettre les inégalités de Hölder et Minkowski pour permettre aux candidats de se dépenser plus utilement dans la partie **IV-C**.*

Question 1a.

Résulte de la concavité de la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ sur $\mathbb{R}^+$.

Question 1b.

Résulte de la convexité de la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ sur $\mathbb{R}^+$.

Question 2a.

Résulte de la convexité de la fonction $t \longmapsto \exp(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Question 2b.

Si x ou y est nul, l'inégalité est évidente. Si $x > 0$ et $y > 0$ alors on applique l'inégalité de la question précédente avec $\alpha = p\ln(x)$ et $\beta = p^*\ln(y)$.

Quatrième partie, B : espaces ℓ_n^p

Question 1a.

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue.

Question 1b.

Supposons l'inégalité de Hölder établie pour tous vecteurs $x, y \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_{p^*} = 1$, et considérons deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Si $x = 0$ ou $y = 0$ l'inégalité à démontrer est évidente. Sinon, on pose $x' = (1/\|x\|_p)(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, $y' = (1/\|y\|_{p^*})(|y_1|, \ldots, |y_n|)$. Alors $x', y' \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $\|x'\|_p = \|y'\|_{p^*} = 1$, donc, d'après l'inégalité de Hölder restreinte, on a $< x', y' > \leqslant 1$. D'où :

$$|< x, y >| \leqslant |x_1||y_1| + \ldots + |x_n||y_n| = \|x\|_p\|y\|_{p^*} < x', y' > \leqslant \|x\|_p\|y\|_{p^*}.$$

Démonstration de l'inégalité de Hölder restreinte : on considère $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, nombres réels positifs tels que $x_1^p + \ldots + x_n^p = y_1^{p^*} + \ldots + y_n^{p^*} = 1$. En appliquant pour $i = 1, \ldots, n$, l'inégalité $x_i y_i \leqslant x_i^p/p + y_i^{p^*}/p^*$ et en sommant on obtient : $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \leqslant 1/p + 1/p^* = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Question 2.

L'inégalité de Minkowski est connue pour $p = 1$ et $p = \infty$, donc on peut se restreindre au cas $1 < p < \infty$ dans cette question.

Question 2a.

Si l'inégalité de Minkowski est établie pour tous $x, y \in (\mathbb{R}^+)^n$, alors on la prolonge au cas $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques grâce à l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue.

Question 2b.

Comme $1/p^* = 1 - 1/p = (p-1)/p$, on a $p^*(p-1) = p$ et $p/p^* = p - 1$, d'où :

$$\|z\|_{p^*}^{p^*} = (x_1 + y_1)^{p^*(p-1)} + \ldots + (x_n + y_n)^{p^*(p-1)} = (x_1 + y_1)^p + \ldots + (x_n + y_n)^p = \|x + y\|_p^p.$$

On en déduit : $\|z\|_{p^*} = \|x + y\|_p^{p/p^*} = \|x + y\|_p^{p-1}$.

Question 2c.

$\|x+y\|_p^p = (x_1+y_1)z_1 + \ldots + (x_n+y_n)z_n = (x_1z_1 + \ldots + x_nz_n) + (y_1z_1 + \ldots + y_nz_n)$ et on applique l'inégalité de Hölder.

Question 2d.

D'après **2b** et **2c**, on a $\|x+y\|_p^p \leqslant (\|x\|_p + \|y\|_p)\|z\|_{p^*} = (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}$.

Si $\|x+y\|_p > 0$ alors on peut simplifier par $\|x+y\|_p^{p-1}$ et donc $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.
Si $\|x+y\|_p = 0$ alors l'inégalité demandée est triviale.

Question 2e.

L'inégalité triangulaire vient d'être prouvée. Les autres propriétés : homogénéité et définie-positivité sont évidentes.

Fin des questions ennuyeuses.

Question 3.

Coquille de l'énoncé. Lire : muni.

Ici aussi, on suppose $1 < p < \infty$, les cas $p = 1$ et $p = \infty$ ayant été vus en **I-2**. Pour $x \in \ell_n^{p^*}$ et $y \in \ell_n^p$ on a $|\varphi_x(y)| \leqslant \|x\|_{p^*}\|y\|_p$ d'après l'inégalité de Hölder, donc $\|\varphi_x\|_p^* \leqslant \|x\|_{p^*}$. Il y a manifestement égalité si $x = 0$. Pour $x \neq 0$, soit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ avec $y_i = x_i^{p^*-1}$ si $x_i \geqslant 0$ et $y_i = -|x_i|^{p^*-1}$ si $x_i < 0$. On a donc $|\varphi_x(y)| = \|x\|_{p^*}^{p^*}$, et $\|y\|_p = (|x_1|^{p(p^*-1)} + \ldots + |x_n|^{p(p^*-1)})^{1/p} = (|x_1|^{p^*} + \ldots + |x_n|^{p^*})^{1/p} = \|x\|_{p^*}^{p^*-1}$. D'où $\|\varphi_x\|_p^* \geqslant |\varphi_x(y)|/\|y\|_p = \|x\|_{p^*}$ et finalement $\|\varphi_x\|_p^* = \|x\|_{p^*}$, ce qui montre que $x \longmapsto \varphi_x$ est une isométrie de $\ell_n^{p^*}$ sur $(\ell_n^p)^*$.

Quatrième partie, C : calcul de $d(\ell_n^p, \ell_n^q)$

Question 1.

Coquille de l'énoncé. Lire : pour tous $p, q \in [1, \infty]$.

$d(\ell_n^p, \ell_n^q) = d((\ell_n^{p^*})^*, (\ell_n^{q^*})^*) \leqslant d(\ell_n^{p^*}, \ell_n^{q^*}) = d((\ell_n^p)^*, (\ell_n^q)^*) \leqslant d(\ell_n^p, \ell_n^q)$, d'où l'égalité.

Question 2.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\,\|x\|_\infty$ d'après l'inégalité de Hölder. On conclut comme au **III-1**.

Question 3a.

Inégalité $\|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q}\|x\|_q$: on applique l'inégalité de Hölder à $y = (|x_1|^p, \ldots, |x_n|^p)$ et $z = (1, \ldots, 1)$ pour l'exposant $r = q/p > 1$. Il vient :

$$< y, z > = \|x\|_p^p \leqslant \|y\|_r\|z\|_{r^*} = n^{1-p/q}\|x\|_p^{p/q},$$

ce qui donne l'inégalité voulue en prenant les racines p-èmes.

Inégalité $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$: en traitant à part le cas $x = 0$, on se ramène par homothétie au cas $\|x\|_p = 1$. Alors $|x_i| \leqslant 1$ pour tout i, donc $|x_i|^q \leqslant |x_i|^p$ et $\|x\|_q \leqslant (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/q} = \|x\|_p^{p/q} = \|x\|_p$.

Question 3b.

Prenons pour f l'application identité de ℓ_n^p dans ℓ_n^q. L'encadrement de la question précédente implique $\|f\| \leqslant 1$ et $\|f^{-1}\| \leqslant n^{1/q-1/p}$, d'où $\rho(\ell_n^p, \ell_n^q) \leqslant n^{1/q-1/p}$ et $d(\ell_n^p, \ell_n^q) \leqslant (1/p - 1/q)\ln(n)$.

Question 4.

On a déja $d(\ell_n^p, \ell_n^q) \leqslant (1/p - 1/q)\ln(n)$ pour $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ d'après **2** (cas $p < q = \infty$), **3b** (cas $p < q < \infty$), et **II-4** (cas $p = q$). De plus, pour $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, on a d'après **II-1e** et **III-3** :

$$\frac{1}{2}\ln(n) = d(\ell_n^2, \ell_n^\infty) \leqslant d(\ell_n^2, \ell_n^p) + d(\ell_n^p, \ell_n^q) + d(\ell_n^q, \ell_n^\infty) \leqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}\right)\ln(n) = \frac{1}{2}\ln(n),$$

d'où l'égalité.

Question 5.

On applique le résultat précédent en remettant d'abord p et q dans l'ordre si besoin.

Question 6.

D'après le théorème d'existence de bases orthonormales, deux espaces euclidiens de même dimension sont isométriques. Donc ℓ_n^p est euclidien si et seulement s'il est isométrique à ℓ_n^2, soit si et seulement si $d(\ell_n^2, \ell_n^p) = 0$. Or, $d(\ell_n^2, \ell_n^p) = (1/2 - 1/p)\ln(n)$ si $p \geqslant 2$ et $d(\ell_n^2, \ell_n^p) = d(\ell_n^2, \ell_n^{p^*}) = (1/p - 1/2)\ln(n)$ si $p \leqslant 2$ car alors $p^* \geqslant 2$. On en déduit : ℓ_n^p est euclidien si et seulement si $n = 1$ ou $p = 2$.

Question 7.

D'après la relation : $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$, valable pour tous réels a, b positifs ou nuls, l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell_2^\infty & \longrightarrow & \ell_2^1 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x+y, x-y) \end{array} \right.$ est une isométrie de ℓ_2^∞ sur ℓ_2^1. Donc $d(\ell_2^1, \ell_2^\infty) = 0 \neq |\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty}| \ln(2)$.