

Corrigé de la première épreuve de mathématiques.

ENSAE MP 97.

PARTIE I.

I.1) Supposons que $\mathcal{M}(\delta, F)$ soit vide. Comme F est non vide, nous pouvons choisir $x_1 \in F$ et construire par récurrence une suite (x_n) vérifiant :

$$x_{n+1} \in F \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$$

pour tout entier $n \geq 1$. Comme F est bornée, la suite (x_n) l'est également. Comme $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie, la suite (x_n) possède au moins une valeur d'adhérence, ce qui est absurde puisque $d(x_i, x_j) \geq \delta$ dès que i et j sont distincts.

I.2.a) Comme $F \subset F'$, $\mathcal{M}(\delta, F') \subset \mathcal{M}(\delta, F)$, et donc $N(\delta, F) \leq N(\delta, F')$. Pour $\delta < 1$, nous avons donc

$$\frac{N(\delta, F)}{-\ln \delta} \leq \frac{N(\delta, F')}{-\ln \delta},$$

ce qui donne l'inégalité demandée par passage à la limite.

I.2.b) Si F est contenue dans $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$, λF est contenue dans $\bigcup_{i=1}^n B(\lambda x_i, \lambda \delta)$. Ainsi, $N(\delta \lambda, \lambda F) \leq N(\delta, F)$.

En appliquant cette inégalité en remplaçant F par λF et λ par $1/\lambda$, nous obtenons :

$$N(\delta \lambda, \lambda F) = N(\delta, F)$$

pour tout $\delta > 0$. Nous avons alors :

$$\frac{N(\delta, \lambda F)}{-\ln \delta} = \frac{N(\delta/\lambda, F)}{-\ln(\delta/\lambda)} \times \frac{\ln \delta - \ln \lambda}{\ln \delta},$$

et donc

$$\frac{N(\delta, \lambda F)}{-\ln \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \text{B-dim}(F).$$

$\text{B-dim}(\lambda F)$ existe donc et est égale à $\text{B-dim}(F)$.

I.2.c) Quitte à échanger les rôles de F et de F' , nous pouvons supposer que $\text{B-dim}(F) \geq \text{B-dim}(F')$. Remarquons tout d'abord la double inégalité :

$$N(\delta, F) \leq N(\delta, F \cup F') \leq N(\delta, F) + N(\delta, F').$$

La première inégalité a été prouvée au **2.a)**. Pour la seconde, il suffit de remarquer que s'il existe n boules de rayon δ recouvrant F et n' boules de rayon δ recouvrant F' , alors les $n + n'$ boules recouvrent $F \cup F'$. Nous allons alors distinguer deux cas :

- $\text{B-dim}(F) > \text{B-dim}(F')$.

Nous avons alors $\frac{\ln N(\delta, F)}{-\ln \delta} \geq \frac{\ln N(\delta, F')}{-\ln \delta}$, c'est à dire $N(\delta, F) \geq N(\delta, F')$, pour δ assez petit (et strictement inférieur à 1). Alors $N(\delta, F) \leq N(\delta, F \cup F') \leq N(\delta, F) + N(\delta, F') \leq 2N(\delta, F)$, puis

$$\frac{\ln N(\delta, F)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N(\delta, F \cup F')}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln 2 + \ln N(\delta, F)}{-\ln \delta}$$

pour δ assez petit. Cette inégalité prouve que $\text{B-dim}(F \cup F')$ existe et est égale à $\text{B-dim}(F)$.

- $\text{B-dim}(F) = \text{B-dim}(F') = a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\delta_0 \in]0, 1[$ tel que

$$a - \varepsilon \leq \frac{\ln N(\delta, F)}{-\ln \delta} \leq a + \varepsilon,$$

$$a - \varepsilon \leq \frac{\ln N(\delta, F')}{-\ln \delta} \leq a + \varepsilon$$

pour $\delta \in]0, \delta_0[$. Nous avons alors, pour $\delta < \delta_0$:

$$e^{-(a-\varepsilon)\ln \delta} \leq N(\delta, F) \leq N(\delta, F \cup F') \leq N(\delta, F) + N(\delta, F') \leq 2e^{-(a+\varepsilon)\ln \delta},$$

soit

$$a - \varepsilon \leq \frac{\ln N(\delta, F \cup F')}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln 2}{-\ln \delta} + a + \varepsilon.$$

Soit alors $\delta'_0 \in]0, \delta_0]$ tel que $\frac{\ln 2}{-\ln \delta} < \varepsilon$ pour $\delta \in]0, \delta'_0[$. Nous obtenons alors :

$$a - \varepsilon \leq \frac{\ln N(\delta, F \cup F')}{-\ln \delta} \leq a + 2\varepsilon$$

pour tout $\delta \in]0, \delta'_0[$. Cette inégalité prouve que $\text{B-dim}(F \cup F')$ existe et est égale à a .

I.2.d) Le résultat s'obtient immédiatement en considérant la double inégalité

$$\frac{\ln N(\delta, F)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N(\delta, F'')}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N(\delta, F')}{-\ln \delta},$$

valable pour tout $\delta \in]0, 1[$.

I.3) Soit $F = \{x_1, \dots, x_k\}$ une partie non vide finie de $\mathbb{R}^d$, et soit δ_0 la plus petite distance séparant deux points distincts de F :

$$\delta_0 = \min\{\|x_j - x_i\|, 1 \leq i < j \leq k\}.$$

Nous avons $N(\delta, F) = k$ dès que $\delta < \delta_0/2$, puisqu'une boule de rayon δ (et donc de diamètre strictement inférieur à δ_0) ne peut contenir deux points de F . Nous obtenons alors :

$$\frac{\ln N(\delta, F)}{-\ln \delta} = \frac{\ln k}{-\ln \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0,$$

ce qui prouve que $\text{B-dim}(F)$ existe et que $\text{B-dim}(F) = 0$.

I.4.a) L'application est clairement une norme équivalente à la norme euclidienne.

I.4.b) Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $i \in \{1, \dots, d\}$. La projection P_i de la boule $B(x, \delta)$ sur la droite $\text{Vect}(v_i)$ est un segment de longueur 2δ . Notons N_i le nombre de segments de la forme $[k\delta v_i, (k+1)\delta v_i]$ (avec k entier relatif) intersectant P_i . Comme les segments $[k\delta v_i, (k+1)\delta v_i]$ sont de longueur $\delta\|v_i\|$, nous avons

$$(N_i - 2)\delta\|v_i\| \leq 2\delta,$$

l'égalité étant obtenue quand les extrémités de P_i sont chacune de la forme $k\delta v_i$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous obtenons donc une majoration de N_i :

$$N_i \leq 2 + \frac{2}{\|v_i\|}.$$

D'autre part, si $B(x, \delta)$ rencontre $C(k_1, k_2, \dots, k_d, \delta)$, alors $[k_i \delta, (k_i + 1) \delta] \cap P_i \neq \emptyset$ pour tout i . On en déduit donc que $B(x, \delta)$ rencontre au maximum $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_d$ δ -cubes, chaque entier k_i ne pouvant prendre que N_i valeurs distinctes. Nous obtenons donc le résultat demandé avec

$$\gamma = \prod_{i=1}^d \left(2 + \frac{2}{\|u_i\|} \right).$$

I.4.c) F est recouverte par $N(\delta, F)$ boules de rayons δ . Comme chacune de ces boules rencontre au maximum γ δ -cubes, F rencontre au maximum $\gamma N(\delta, F)$ δ -cubes. Nous en déduisons la première inégalité :

$$\frac{1}{\gamma} A(\delta, F) \leq N(\delta, F).$$

Deux δ -cubes C_1 et C_2 étant isométriques, nous avons $N(\delta, C_1) = N(\delta, C_2)$. Notons γ_2 cet entier, qui ne dépend que de δ et de $(v_1, \dots, v_d)$. Comme F est contenu dans la réunion des $A(\delta, F)$ δ -cubes qui le rencontrent, on en déduit que F est recouvert par la réunion de $\gamma_2 A(\delta, F)$ boules ouvertes de rayon δ . On obtient ainsi la seconde inégalité :

$$N(\delta, F) \leq \gamma_2 A(\delta, F).$$

I.4.d) Le résultat est clair, les inégalités précédentes montrant que les expressions $\frac{\ln A(\delta, F)}{-\ln \delta}$ et $\frac{\ln N(\delta, F)}{-\ln \delta}$ sont équivalentes au voisinage de 0.

I.5.a) Un δ -cube $C(k_1, \dots, k_d, \delta)$ rencontre U_α si et seulement si $[k_i \delta, (k_i + 1) \delta] \cap [-\alpha, \alpha]$ est non vide pour tout i compris entre 1 et p et si $0 \in [k_i \delta, (k_i + 1) \delta]$ pour tout i compris entre $p + 1$ et d . Pour i entier compris entre 1 et p fixé, notons N_i l'entier naturel défini par la condition :

$$N_i \delta \|v_i\| \leq \alpha < (N_i + 1) \delta \|v_i\|.$$

Il existe alors exactement $2(N_i + 1)$ intervalle de la forme $[k_i \delta, (k_i + 1) \delta]$ rencontrant $[-\alpha, \alpha]$. Nous en déduisons que

$$A(\delta, U_\alpha) = 2^{d-p} \times 2(N_1 + 1) \times 2(N_2 + 1) \dots \times 2(N_p + 1).$$

Nous obtenons ensuite (en prenant δ assez petit pour avoir $N_i \geq 1$ pour tout i) :

$$2^d \left(\frac{\alpha}{\delta \|v_1\|} - 1 \right) \dots \left(\frac{\alpha}{\delta \|v_p\|} - 1 \right) \leq A(\delta, U_\alpha) \leq 2^d \left(\frac{\alpha}{\delta \|v_1\|} \right) \dots \left(\frac{\alpha}{\delta \|v_p\|} \right),$$

puis

$$d \ln 2 - p \ln \delta + \ln(\alpha - \delta \|v_1\|) + \dots + \ln(\alpha - \delta \|v_p\|) \leq \ln A(\delta, U_\alpha) \leq d \ln 2 - p \ln \delta + p \ln \alpha.$$

Ceci prouve que $\frac{\ln A(\delta, U_\alpha)}{-\ln \delta}$ tend vers p quand δ tend vers 0^+ . B-dim(U_α) est donc bien définie, et est égale à p .

I.5.b) L'équivalence des normes obtenue à la question **I.4.b)** prouve l'existence de α_1 et α_2 réels strictement positifs tels que :

$$\{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in [-\alpha_1, \alpha_1]\} \subset B(0, R) \subset \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in [-\alpha_2, \alpha_2]\}.$$

Nous obtenons la relation demandée par intersection avec le sous-espace L .

I.5.c) Comme B-dim(U_{α_1}) et B-dim(U_{α_2}) existent et sont tous deux égaux à p , on sait d'après le **I.2.d.** que B-dim($B(0, R)$) existe et est égale à p .

PARTIE II.

II.1.a) Nous avons $|\lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)| \leq \lambda^{(s-2)k}$ pour tout réel t et pour tout entier $k \geq 1$. Comme la série de terme général $\lambda^{(s-2)k}$ est convergente (ce terme général est négligeable devant $1/k^2$), la série définissant f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions sommées étant continues par rapport à t .

II.1.b) G est l'image du compact $[0, 1]$ par l'application continue $t \mapsto (t, f(t))$. G est ainsi une partie compacte, donc bornée, de $\mathbb{R}^2$.

II.2) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \in]0, 1/\lambda[$. Notons N la partie entière de $-\frac{\ln h}{\ln \lambda}$. Nous avons

$$N \geq 1, \lambda^{-(N+1)} < h \leq \lambda^{-N}.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-(2-s)k} (\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{-(2-s)k} \underbrace{|\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)|}_{\leq \lambda^k h} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda^{-(2-s)k} \underbrace{|\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)|}_{\leq 2}. \end{aligned}$$

Notons A_N et B_N ces deux dernières sommes. Nous obtenons facilement les majorations de A_N et de B_N :

$$\begin{aligned} A_N &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{-(2-s)k} \lambda^k h = h \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-1)k} = h \frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1} - 1} (\lambda^{(s-1)N} - 1) \\ &\leq h \frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1} - 1} (\lambda^N)^{s-1} \leq h \frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1} - 1} h^{1-s} = \frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1} - 1} h^{2-s} \\ B_N &\leq 2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda^{-(2-s)k} = 2 \frac{\lambda^{-(2-s)(N+1)}}{1 - \lambda^{-(2-s)}} \leq \frac{2}{1 - \lambda^{-(2-s)}} h^{2-s} \end{aligned}$$

puisque $\lambda^N < h^{-1}$ et $\lambda^{-(N+1)} \leq h$. Nous obtenons ainsi l'inégalité demandée, en posant

$$c = \frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1} - 1} + \frac{2\lambda^{2-s}}{\lambda^{2-s} - 1}.$$

II.3.a) Supposons qu'un tel ε n'existe pas. Pour chaque entier n , il existe donc $t_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$|\sin(t_n + h) - \sin(t_n)| \leq \frac{1}{n+1}$$

pour tout $h \in [1/2, 1[$. La fonction sinus étant de période 2π , nous pouvons supposer que $t_n \in [0, 2\pi]$ pour tout n . La suite (t_n) est alors bornée et nous pouvons en extraire une sous-suite $(t_{\psi(n)})$ qui converge vers un élément t de $[0, 2\pi]$. Fixons n_0 tel que l'on ait $|t_{\psi(n)} - t| < 1/8$ pour tout entier n au moins égal à n_0 . Nous obtenons alors

$$t_{\psi(n)} + 1/2 < t + 1/2 + 1/8 < t + 1 - 1/8 < t_{\psi(n)} + 1$$

pour tout $n \geq n_0$, ce qui permet d'affirmer que l'inégalité

$$|\sin(t+h) - \sin(t)| \leq \frac{1}{\psi(n)}$$

est vérifiée dès que $n \geq n_0$ et $5/8 \leq h \leq 7/8$. En faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons

$$\sin(t+h) = \sin(t)$$

pour tout h compris entre $5/8$ et $7/8$, ce qui est absurde.

II.3.b) Soit t, h et N tels que $0 \leq t < t+h$ et $\lambda^{-(N+1)} \leq h \leq \lambda^{-N}$. En utilisant les mêmes majorations qu'à la question **II.2)**, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-(2-s)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)| &\leq \frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1}-1} \left(\lambda^{(s-1)(N-1)} - 1 \right) h \leq \frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1}-1} \lambda^{(s-1)(N-1)} h \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{s-1}-1} \lambda^{N(s-1)} h \leq \frac{1}{\lambda^{s-1}-1} \lambda^{(s-1)N} \lambda^{-N} \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{s-1}-1} \lambda^{N(s-2)} \\ \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda^{-(2-s)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)| &\leq 2 \frac{\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \\ &\leq \frac{2 \lambda^{s-2}}{1 - \lambda^{s-2}} \lambda^{(s-2)N} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\lambda^{s-1}-1}$ et $\frac{2 \lambda^{s-2}}{1 - \lambda^{s-2}}$ tendent vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, il existe λ_0 ne dépendant que de s et de ε tel que $\frac{1}{\lambda^{s-1}-1} + \frac{2 \lambda^{s-2}}{1 - \lambda^{s-2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $\lambda \geq \lambda_0$. Nous avons alors

$$\left| f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N} (\sin(\lambda^N(t+h)) - \sin(\lambda^N t)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \lambda^{(s-2)N}$$

pour tout $\lambda \geq \lambda_0$.

II.3.c) Soit $t' = \lambda^N t$. Fixons $h' \in [1/2, 1[$ tel que $|\sin(t' + h') - \sin t'| > \varepsilon$ et posons $h = \lambda^{-N} h'$. Nous avons

$$\lambda^{-(N+1)} \leq \frac{1}{2\lambda^N} \leq h < \frac{1}{\lambda^N}$$

puis

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\geq \left| \lambda^{(s-2)N} (\sin(t' + h') - \sin(t')) \right| - \left| f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N} (\sin(t' + h') - \sin(t')) \right| \\ &\geq \varepsilon \lambda^{(s-2)N} - \frac{\varepsilon}{2} \lambda^{(s-2)N} = \frac{\varepsilon}{2} \lambda^{(s-2)N}. \end{aligned}$$

II.4) Soit $\delta \in]0, 1/\lambda[$. Pour tout réel t et pour tout $h \in [0, \delta]$, nous avons

$$|f(t+h) - f(t)| \geq c h^{2-s} \leq c \delta^{2-s}$$

d'après le **II.2)**. Nous obtenons donc la première inégalité demandée, pour $\delta < 1/\lambda$, en posant

$$C_1 = c.$$

Soit $\delta > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On sait d'après le **II.3.c)** qu'il existe $h \in]0, \delta[$ tel que

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \lambda^{s-2} \delta^{2-s}.$$

Comme $\omega(t, t + \delta) \leq |f(t + h) - f(t)|$, on en déduit la seconde inégalité demandée en posant

$$C_2 = \frac{\varepsilon}{2} \lambda^{s-2}.$$

II.5) Pour i entier relatif, notons N_i le nombre de δ -cubes de la forme $[i\delta, i\delta + \delta] \times [j\delta, j\delta + \delta]$ qui intersectent la partie G . Tout d'abord, un tel δ -cube intersecte G si et seulement si $[i\delta, i\delta + \delta]$ intersecte $[0, 1]$ et $[j\delta, j\delta + \delta]$ intersecte $f([i\delta, i\delta + \delta])$. La première condition impose à i d'être compris (au sens large) entre -1 et q . Comme $f(0) = 0$, nous avons clairement $N_{-1} = 2$. Si $q = 1/\delta$, nous aurons $N_q = 1$ ou 2 suivant l'appartenance de $\delta f(1)$ à $\mathbb{Z}$. Si $q > 1/\delta$, $N_q = 0$. Nous avons donc dans tous les cas :

$$N_{-1} = 2, \quad 0 \leq N_q \leq 2.$$

Soit maintenant $i \in [0, q-1]$. Comme f est continue, l'image par f de $[i\delta, i\delta + \delta]$ est un intervalle, de diamètre $\omega(i\delta, i\delta + \delta)$. Nous pouvons donc en déduire l'encadrement :

$$(N_i - 2)\delta \leq \omega(i\delta, i\delta + \delta) \leq N_i\delta.$$

En effet, $f([i\delta, i\delta + \delta])$ est contenue dans la réunion de N_i intervalles de longueur δ et contient au moins $N_i - 2$ de ces intervalles disjoints. Nous en déduisons donc l'encadrement de N_i :

$$\frac{1}{\delta} \omega(i\delta, i\delta + \delta) \leq N_i \leq 2 + \frac{1}{\delta} \omega(i\delta, i\delta + \delta).$$

Nous pouvons maintenant sommer les encadrements obtenus :

$$2 + \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{q-1} \omega(i\delta, i\delta + \delta) \leq \sum_{i=-1}^q N_i = A(\delta, G) \leq 2q + 4 + \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{q-1} \omega(i\delta, i\delta + \delta).$$

Cette majoration est presque celle demandée. Il y a une petite erreur d'énoncé, la majoration demandée étant fausse pour $\delta = 1$.

II.6) Nous déduisons des deux questions précédentes l'encadrement :

$$\frac{q}{\delta} C_1 \delta^{2-s} \leq A(\delta, G) \leq 2q + 4 + \frac{q}{\delta} C_2 \delta^{2-s}$$

pour δ assez petit. Or $1/\delta \leq q < 1 + 1/\delta$, donc

$$C_1 \delta^{-s} \leq A(\delta, G) \leq \frac{2}{\delta} + 6 + 2 C_2 \delta^{-s} + C_2 \delta^{1-s},$$

puis

$$-s \ln \delta + \ln C_1 \leq \ln A(\delta, G) \leq -s \ln \delta + \underbrace{\ln(2 C_2 + 2 \delta^{s-1} + C_2 \delta + 6 \delta^s)}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \ln 2 C_2}.$$

On en déduit que $\ln A(\delta, G)$ est équivalent à $-s \ln \delta$ au voisinage de 0, puis que B-dim(G) existe et est égale à s . Nous avons ainsi "construit" une courbe de dimension s pour s élément quelconque de $]1, 2[$. Il suffit en effet de calculer un ε convenable, puis de choisir λ tel que

$$\frac{1}{\lambda^{s-1} - 1} + \frac{2 \lambda^{s-2}}{1 - \lambda^{s-2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le graphe de l'application f définie sur $[0, 1]$ par la relation $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$ est alors une courbe fractale de dimension s .

PARTIE III.

III.1) Si A est une partie compacte non vide de E , l'image de A par chaque S_i est une partie compacte non vide de E (S_i est continue car lipschitzienne de rapport c_i). $\varphi(A)$ est alors une réunion finie de parties compactes non vides : c'est donc un compact non vide de E .

III.2) On montre facilement que si A et B sont deux parties de E vérifiant $A \subset B$, alors $\varphi(A) \subset \varphi(B)$. La suite $(\varphi^k(E))$ est donc une suite décroissante, puisque $\varphi(E) \subset E$. F est alors un compact non vide comme intersection d'une suite décroissante de compacts non vides.

• Montrons que F est contenu dans $\varphi(F)$. Soit donc $x \in F$. Pour tout $n \geq 1$, choisissons $i_n \in \{1, \dots, m\}$ et $y_n \in \varphi^{n-1}(E)$ tel que

$$x = S_{i_n}(y_n).$$

L'ensemble décrit par la suite (i_n) étant fini, il existe un indice i et une application $\delta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que

$$i_{\delta(n)} = i$$

pour tout entier naturel n . La suite $(y_{\delta(n)})$ est alors une suite d'éléments du compact E : on peut en extraire une sous-suite convergeant dans E . Soit donc $y \in E$ et $\delta' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que

$$y_{\delta(\delta'(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y.$$

Pour $k \geq 1$, nous avons $y_{\delta(\delta'(n))} \in \varphi^k(E)$ pour n assez grand (la suite $\varphi^n(E)$ est décroissante). Comme $\varphi^k(E)$ est fermé, y est élément de $\varphi^k(E)$, et donc $y \in F$. D'autre part,

$$x = S_i(y_{\delta(\delta'(n))})$$

pour tout n et S_i est continue. On en déduit que $x = S_i(y)$ en passant à la limite, et donc $x \in \varphi(F)$.

• Montrons que $\varphi(F)$ est contenu dans F . Soit donc $x \in \varphi(F)$. Choisissons $i \in \{1, \dots, m\}$ et $y \in F$ tel que $x = S_i(y)$. Comme $y \in \varphi^k(E)$ pour tout $k \geq 1$, $x \in \varphi^k(E)$ pour tout $k \geq 2$. Nous obtenons donc

$$x \in \bigcup_{k=2}^{+\infty} \varphi^k(E) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \varphi^k(E) = F.$$

III.3) Soient A et B deux compacts non vides distincts de E . On peut, quitte à échanger A et B , supposer que A ne contient pas B . Choisissons donc $y \in B \setminus A$. Soit $\mu_0 = d(y, A)$. Comme A est compact, la distance de y à A est atteinte : nous pouvons choisir x dans A tel que $\mu_0 = d(x, y) > 0$. Si μ est strictement plus petit que μ_0 , nous aurons alors

$$\mu < d(x, y) \leq d(z, y)$$

pour tout z dans A , et donc $x \notin A^\mu$. B ne sera donc pas inclus dans A^μ . La définition de $d(A, B)$ permet alors d'affirmer que $d(A, B) \geq \mu_0 > 0$.

Réciproquement, il est clair que $d(A, A) = 0$ pour tout élément A de $\mathcal{K}$, puisque $A \subset A^\mu$ pour tout $\mu > 0$.

III.4) Soient $\mu > \max_{1 \leq i \leq m} d(A_i, B_i)$. Nous avons alors $A_i \subset B_i^\mu$ et $B_i \subset A_i^\mu$ pour tout i ¹. Nous allons montrer alors que

$$\bigcup_{i=1}^m A_i \subset \left(\bigcup_{i=1}^m B_i \right)^\mu.$$

¹ On utilise ici le fait que, pour A et B compacts non vides de E , l'ensemble des μ tels que $A \subset B^\mu$ et $B \subset A^\mu$ est un intervalle.

Nous aurons alors par symétrie l'inclusion

$$\bigcup_{i=1}^m B_i \subset \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right)^\mu,$$

ce qui achèvera de prouver l'inégalité demandée.

Pour cela, prenons un élément x de $\bigcup_{i=1}^m A_i$. Soit i tel que $x \in A_i$. Comme $A_i \subset B_i^\mu$, il existe $y \in B_i$ tel que $\|x - y\| \leq \mu$. Mais comme $y \in \bigcup_{i=1}^m B_i$, nous avons prouvé que x était élément de $\left(\bigcup_{i=1}^m B_i \right)^\mu$.

III.5) Remarquons tout d'abord que si S est une application de E dans E lipschitzienne de rapport K , si A et B sont deux compacts non vides de E et si μ est un réel strictement positif tel que $A \subset B^\mu$, alors $S(A) \subset S(B)^{K\mu}$. En effet, si $X \in S(A)$, il existe $x \in A$ tel que $S(x) = X$. Mais $x \in B^\mu$, donc il existe $y \in B$ tel que $\|x - y\| \leq \mu$. On en déduit donc qu'il existe $Y = S(y) \in S(B)$ tel que

$$\|X - Y\| = \|S(x) - S(y)\| \leq K\|x - y\| \leq K\mu.$$

Cette inégalité prouve que X est élément de $S(B)^{K\mu}$.

Soient alors A et B deux compacts non vide de E . Nous déduisons de la propriété précédente que

$$d(S_i(A), S_i(B)) \leq c_i d(A, B_i)$$

pour tout entier i compris entre 1 et m . Nous obtenons alors :

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} c_i d(A, B),$$

et donc

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) \leq M d(A, B)$$

où $M = \max_{1 \leq i \leq m} c_i \in [0, 1[$ ².

III.6) Si F' est un compact non vide de E vérifiant $\varphi(F') = F'$, nous avons

$$d(F, F') = d(\varphi(F), \varphi(F')) \leq M d(F, F').$$

Comme $M < 1$, nous en déduisons que $d(F, F') = 0$, soit $F = F'$. F est ainsi le seul compact invariant par φ .

III.7) Nous avons pour tout entier naturel k et pour tout compact non vide A de E :

$$d(\varphi^{k+1}(A), F) \leq M d(\varphi^k(A), F),$$

d'où

$$d(\varphi^k(A), F) \leq M^k d(A, F)$$

par récurrence évidente. Comme $M < 1$, M^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini, ce qui prouve que $\varphi^k(A)$ tend vers F quand k tend vers l'infini, et ceci pour tout élément A de $\mathcal{K}$ (et en particulier pour $A = E$).

² Cette relation prouve que $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ est contractante pour la distance (de Hausdorff) d . Comme $\mathcal{K}$ est complet pour cette métrique, le théorème du point fixe s'applique : φ possède un unique point fixe F , qui est la limite de toute suite de la forme $(\varphi^k(A))_{k \geq 1}$ où A est un compact non vide de E .

III.8.a) L'application $f : s \mapsto \sum_{i=1}^m c_i^s$ est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ ($0 < c_i < 1$ pour tout i). Mais $f(0) = m$ et $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$, donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, m]$. Comme $0 < 1 \leq m$, il existe un unique s_0 tel que $f(s_0) = 1$.

III.8.b) Comme $\delta^s N(\delta, F)$ tend vers 1 quand s tend vers 0^+ , nous avons

$$s \ln \delta + \ln N(\delta, F) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0.$$

Nous en déduisons que $\text{B-dim}(F)$ existe et est égale à s .

D'autre part, les parties $S_i(E)$ étant disjointes, F est la réunion des m compacts disjoints $S_i(F)$. Soit δ_0 défini par :

$$\delta_0 = \min_{1 \leq i < j \leq m} \left(\min\{\|x - y\|, (x, y) \in S_i(F) \times S_j(F)\} \right) > 0.$$

Si δ est strictement plus petit que $\delta_0/2$, nous aurons

$$N(\delta, F) = \sum_{i=1}^m N(\delta, S_i(F))$$

puisque une boule de rayon δ (et donc de diamètre strictement inférieur à δ_0) ne peut intersecter deux ensembles $S_i(F)$ différents. Il semble alors naturel de penser³ que $N(\delta, S_i(F))$ est équivalent à $C \left(\frac{c_i}{\delta}\right)^s$ pour δ tendant vers 0. En passant à la limite dans l'égalité

$$\delta^s N(\delta, F) = \sum_{i=1}^m c_i^s \left(\frac{\delta}{c_i}\right)^s N(\delta, S_i(F)),$$

nous obtenons $C = C \sum_{i=1}^m c_i^s$, soit $s = s_0$ (la constante C est non nulle car $N(\delta, F)$ est non nul).

³ Mais cela n'est pas si simple à démontrer, et je n'ai plus le courage de chercher la preuve.