

Centrale – Supélec, 2001
Mathématiques I, PC

Preliminaire:

1) D'une part $(e^x - 1)^m = (x + o(x))^m = x^m + o(x^m)$. D'autre part:

$$\begin{aligned}(e^x - 1)^m &= (-1)^m + \sum_{k=1}^m C_m^k (-1)^{m-k} e^{kx} \\ &= (-1)^m + \sum_{k=1}^m C_m^k (-1)^{m-k} \sum_{j=0}^m \frac{k^j}{j!} x^j + o(x^m).\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un DL on obtient le résultat demandé.

2) Pour $k < n$ on a: $(u_1 \dots u_n)^k - (u_1 \dots u_k)^n = (u_1 \dots u_k)^k [(u_{k+1} \dots u_n)^k - (u_1 \dots u_k)^{n-k}] \geq 0$ car d'une part $(u_{k+1} \dots u_n)^k \geq (u_k^{n-k})^k$ et d'autre part $(u_1 \dots u_k)^{n-k} \leq (u_k^k)^{n-k}$ puisque la suite (u_k) est croissante.

I.A.1) Puisque f est de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux on peut écrire:

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2} \text{ et } |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}.$$

On en déduit: $|2hf'(x)| \leq |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| + |-f(x+h) + f(x) + hf'(x)| + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leq h^2 M_2 + 2M_0$ d'où le résultat en divisant par $2h > 0$.

I.A.2) La fonction définie par $\varphi(h) = \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ a pour dérivée $\varphi'(h) = \frac{M_2 h^2 - 2M_0}{2h^2}$ qui s'annule pour $h_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. On obtient $|f'(x)| \leq \varphi(h_0) = \sqrt{2M_0 M_2}$.

I.B.1) On applique de même l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 entre x et $x+h$ puis entre x et $x-h$:

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - h^2 f''(x)| \leq \frac{h^3 M_3}{6} \text{ et } |f(x-h) - f(x) + hf'(x) - h^2 f''(x)| \leq \frac{h^3 M_3}{6}.$$

On en déduit: $|2hf'(x)| \leq |f(x-h) - f(x) + hf'(x) - h^2 f''(x)| + |-f(x+h) + f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x)| + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leq \frac{h^3 M_3}{3} + 2M_0$ d'où $|f'(x)| \leq \frac{h^2 M_3}{6} + \frac{M_0}{h}$.

La fonction définie par $\varphi(h) = \frac{M_0}{h} + \frac{M_3 h^2}{6}$ a pour dérivée $\varphi'(h) = \frac{M_3 h^3 - 3M_0}{3h^2}$ qui s'annule pour $h_0 = \left(\frac{3M_0}{M_3}\right)^{1/3}$. On obtient $|f'(x)| \leq \varphi(h_0) = \frac{1}{2}(9M_0^2 M_3)^{1/3}$.

I.B.2) f' et $f^{(3)}$ étant bornées sur $\mathbb{R}$, le I.A.2 entraine que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$.

II.A. L'inégalité de Taylor-Lagrange s'écrit: $|f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j| \leq \frac{M_n h^n}{n!}$ d'où avec l'inégalité

triangulaire: $\left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \right| \leq \frac{M_n h^n}{n!} + 2M_0.$

En ajoutant pour h de 1 à $n-1$ on obtient:

$$\left| \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h C_{n-1}^h \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \right| \leq \sum_{h=1}^{n-1} C_{n-1}^h \left(\frac{M_n h^n}{n!} + 2M_0 \right).$$

En permutant les sommations sur h et j et en utilisant le 1) pour $m = n-1$ on obtient:

$|f^{(n-1)}(x)| \leq C_1 M_n + C_2 M_0$ où C_1 et C_2 sont des constantes. $f^{(n-1)}$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

II.B. Il suffit d'appliquer le II.A. à f et $f^{(k)}$ pour k de $n-1$ à 1 .

II.C.1) $M_k = 0$ entraîne $f^{(k)} = 0$ d'où f est une fonction polynôme. f étant bornée, il en résulte que f est constante ce qui est exclu par hypothèse. On a donc $M_k > 0$.

II.C.2) $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 2 \frac{M_{k+1}M_{k-1}}{M_k^2} \geq 1$ d'après la question I.A.2) appliquée à $f^{(k-1)}$. On peut donc utiliser la question 2) du préliminaire qui donne en remplaçant les u_k :

$$\left(\frac{M_k}{M_0} 2^{0+1+\dots+(k-1)} \right)^n \leq \left(\frac{M_n}{M_0} 2^{1+\dots+(n-1)} \right)^k \text{ d'où } M_k^n \leq M_n^k M_0^{n-k} 2^{kn(n-1)/2 - nk(k-1)/2}$$

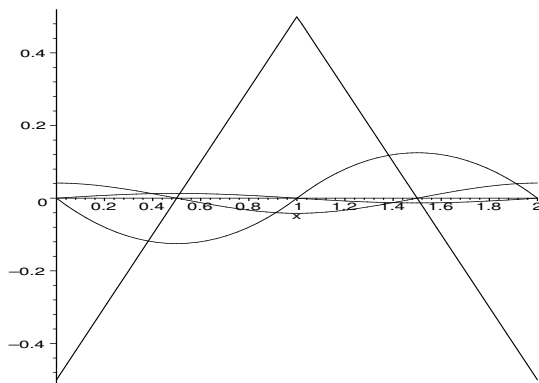
d'où enfin $M_k \leq M_n^{k/n} M_0^{1-k/n} 2^{k(n-k)/2}$.

Ce n'est pas la meilleure majoration pour $n=3$ et $k=1$ car le coefficient $\frac{9^{1/3}}{2} = 1,04\dots$ obtenu au I.B.1) est inférieur au 2 obtenu dans la formule précédente.

III.A. Soit $x \mapsto g(x) = \int_0^x f(t) dt + a$ une primitive de f . La fonction $x \mapsto g(x+1) + g(x)$ est constante puisque sa dérivée est nulle ($f \in E$). $g \in F$ si et seulement si $g(1) + g(0) = 0$ soit $a = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt$.

III.B.1) Il suffit de déterminer φ_k sur $[0,1]$: $\varphi_1(x) = x-1/2$, $\varphi_2(x) = x^2/2-x/2$, $\varphi_3(x) = x^3/6-x^2/4+1/24$ et $\varphi_4(x) = x^4/24-x^3/12+x/24$. la relation $\varphi_k(x+1) = -\varphi_k(x)$ donne φ_k sur $[1,2]$.

φ_1 et φ_3 s'annulent en $x=1/2$ alors que φ_2 s'annule en 0 et 1; on en déduit les premières valeurs de la suite (λ_n) : $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/8$, $\lambda_3 = 1/24$, $\lambda_4 = 5/384$.



III.B.2) La seconde propriété est équivalente à la première car $\varphi_k \in E$ donc $\varphi_k(-x) + \varphi_k(-x+1) = 0$. Montrons la par récurrence sur k . Elle est vérifiée pour $k=0$ car $\varphi_0(x) = -1$ sur $]-1,0[$ et de plus les fonctions de E sont 2-périodiques.

Supposons la vérifiée pour un entier $k-1$ et soit $h(x) = \varphi_k(-x) + (-1)^k \varphi_k(x)$. $h'(x) = -\varphi_{k-1}(-x) + (-1)^k \varphi_{k-1}(x) = 0$ par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de montrer que $h(0) = (1 + (-1)^k) \varphi_k(0)$ est nul. C'est immédiat si k est impair. Si k est pair, φ_{k-1} étant une fonction paire on calcule:

$\varphi_k(0) = T\varphi_{k-1}(0) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_{k-1}(t) dt = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \varphi_{k-1}(t) dt = -\frac{1}{4} (\varphi_k(1) - \varphi_k(-1)) = 0$ car φ_k est une primitive de φ_{k-1} et est 2-périodique. On a donc $h = 0$ ce qui achève la démonstration par récurrence.

III.B.3) Il suffit d'étudier φ_k sur $[0, 1/2]$. Avec $\varphi_{2k}(0) = 0$ et $\varphi_{2k-1}(1/2) = 0$ on montre par récurrence les

tableaux de variation: $\left| \begin{array}{ccc} x & 0 & 1/2 \\ \varphi_{4k+1} & \nearrow & 0 \\ \varphi_{4k+2} & 0 & \searrow \\ \varphi_{4k+3} & \searrow & 0 \\ \varphi_{4k+4} & 0 & \nearrow \end{array} \right|$ d'où les expressions de λ_{2k} et λ_{2k-1} .

III.C.1) Du III.A on déduit $2Tf(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$ par la relation de Chasles.

III.C.2) Pour $x \in [0, 1]$ on a $|2Tf(x)| \leq xN(f) + (1-x)N(f) = N(f)$. C'est encore vrai pour $x \in [-1, 0]$ puisque $Tf(x) = -Tf(1+x)$ et donc aussi sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité. On a donc $2N(Tf) \leq N(f)$.

III.D. Soit $f \in E$ de norme 1 telle que $N(Tf) = 1/2$. Puisque Tf est continue et que $N(Tf) = \sup_{x \in [0,1]} |Tf(x)|$, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $|Tf(x_0)| = 1/2$. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer $Tf(x_0) = 1/2$. On en déduit $1 = 2Tf(x_0) = \int_0^{x_0} f(t) dt + \int_1^{x_0} f(t) dt \leq x_0 + (1-x_0) = 1$. Il y a donc égalité dans chacune des majorations et par suite $\int_0^{x_0} f(t) dt = x_0$ et $\int_1^{x_0} f(t) dt = 1-x_0$. On en déduit que $f(x) = 1$ sur $[0, x_0]$ et $f(x) = -1$ sur $[x_0, 1]$ (sauf en un nombre fini de points où f prend une valeur quelconque entre -1 et 1). La relation $f(1+x) = -f(x)$ définit ensuite f pour $x \notin [0, 1]$. Réciproquement une telle fonction f vérifie bien $f \in E$, $N(f) = 1$ et donc $N(Tf) \leq 1/2$ avec égalité car $Tf(x_0) = 1/2$.

III.E. Une fonction f déterminée au III.D a nécessairement une discontinuité en x_0 , même si $x_0 = 0$ (car alors $f(x) = -1$ sur $[0, 1]$ et donc $f(x) = 1$ sur $[-1, 0]$) où si $x_0 = 1$ (idem en échangeant 1 et -1). Elle ne peut donc pas appartenir à F .

III.F.1)

a) Supposons que f s'annule en $x_1, \dots, x_q$ avec $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_q < 2p$. Puisque f est de classe C^1 on peut appliquer le théorème de Rolle: Pour $1 \leq k \leq q$ on a $f(x_k) = f(x_{k+1})$ donc f' a au moins un zéro y_k sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ (en posant $x_{q+1} = x_1 + 2p$). Si $y_q \geq 2p$, $f'(y_q - 2p) = f'(y_q) = 0$ et $y_q - 2p \in [0, 2p]$. f' a donc bien au moins q zéros distincts sur $[0, 2p]$.

b) Si f a q zéros distincts sur $[0, 2p]$, nous venons de montrer que f' a au moins q zéros distincts des zéros de f sur $[0, 2p]$. Si f' a exactement q zéros distincts sur $[0, 2p]$, ils sont donc distincts des zéros de f .

III.F.2)

a) l est de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux puisque $\varphi_n^{(n)} = \varphi_0$. Pour x non entier on a $l^{(n)}(x) = \varepsilon - \nu f^{(n)}(x + \rho)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $|\nu f^{(n)}(x + \rho)| \leq \nu < 1$. $l^{(n-1)}$ est donc strictement monotone sur chaque intervalle $[k, k+1]$ avec k entier et par suite s'annule au maximum $2p$ fois sur $[0, 2p]$.

b) Soit x_0 un réel tel que $|\varphi_n(x_0)| = \lambda_n$; puisque $|\nu f(x_0 + \rho)| \leq \nu \lambda_n < \lambda_n$, $l(x_0)$ a le signe de $\varphi_n(x_0)$. De $\varphi_n(x+1) = -\varphi_n(x)$ on déduit, par continuité, que l s'annule sur chaque intervalle $[x_0 + k, x_0 + k+1]$ (k entier) et par suite au moins $2p$ fois sur $[0, 2p]$.

c) En appliquant le F1)a) à f et ses dérivées on déduit, en partant du fait que l s'annule au moins $2p$ fois sur $[0, 2p]$, que $l^{(k)}$ a au moins $2p$ zéros sur $[0, 2p]$ (pour $1 \leq k \leq n-1$). Mais puisque $l^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur cet intervalle, chacune des dérivées s'y annule exactement $2p$ fois.

III.F.3)

a) Puisque f' est continue sur $[0, 2p]$ il existe $\alpha \in [0, 2p]$ tel que $|f'(\alpha)| = N(f')$. Puisque $\varphi'_n = \varphi_{n-1}$ est

continue sur $[0, 2p[$ ($n \geq 2$) et que $\varphi_{n-1}(x+1) = -\varphi_{n-1}(x)$, il existe $\beta \in [0, 2p[$ tel que $\varphi'_n(\beta) = \varepsilon N(\varphi_{n-1})$ où $\varepsilon = \frac{f'(\alpha)}{N(f')} = \pm 1$ ($N(f') \neq 0$ car f n'est pas constante).

b) $h'(\beta) = \varphi'_n(\beta) - \lambda_{n-1}f'(\alpha)/N(f') = 0$ par définition de β . Les fonctions f' et φ'_n sont de classe C^1 ($n \geq 3$) et possèdent un extremum respectivement en α et β ; par suite leurs dérivées s'annulent en ces points et donc $h''(\beta) = 0$.

c) Supposons $N(f) \leq \lambda_n$ et $N(f^{(n)}) \leq 1$; si l'on avait de plus $N(f') > \lambda_{n-1}$, la fonction $l = h$ où $\nu = \frac{\lambda_{n-1}}{N(f')}$ vérifierait la conclusion du F2)c): h' et h'' auraient exactement $2p$ zéros distincts sur $[0, 2p[$ et donc n'auraient aucun zéro commun d'après le F1)b): contradiction avec $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$.

d) Pour $n = 2$ on a montré au I.A.2) que $N(f') \leq \sqrt{2N(f)N(f'')}$. Si $N(f) \leq \lambda_2 = 1/8$ et $N(f'') \leq 1$ on déduit $N(f') \leq 1/2 = \lambda_1$.

III.G. Soit $g(x) = \int_0^x \sin^n t \, dt$; on montre par récurrence que pour $1 \leq k \leq n$, $g^{(k)}(x) = \sin^{n+1-k}(x)P(x)$ où P est un polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Par suite $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(\pi) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. On définit donc une fonction de classe C^n en posant:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ \frac{g(2\pi(1-|x|))}{g(\pi)} & \text{si } 1/2 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \text{ . De plus on a bien } 0 \leq \omega(x) \leq 1.$$

III.H.1) f_p est le produit de 2 fonctions de classe C^n par morceaux sur $[-p, p]$, $f_p^{(n)}$ est donc continue par morceaux sur $[-p, p]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par $2p$ -périodicité. $N(f_p) \leq \alpha\lambda_n \leq \lambda_n$ puisque $N(\omega) = 1$.

$$f_p^{(n)}(x) = \alpha \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) \frac{\omega^{(k)}(x/p)}{p^k} \text{ d'où } N(f_p^{(n)}) \leq \alpha \left(1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{N(f^{(n-k)})N(\omega^{(k)})}{p^k} \right).$$

Quand p tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $\alpha < 1$; par suite on a bien $N(f_p^{(n)}) \leq 1$ pour p assez grand.

III.H.2) Puisque f_p est $2p$ -périodique, de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux, on peut lui appliquer le résultat du III.F3c: pour p assez grand, $N(f'_p) \leq \lambda_{n-1}$ (c'est immédiat si f est constante). Soit x_0 tel que $N(f') = |f'(x_0)|$ et p un entier assez grand pour que $N(f'_p) \leq \lambda_{n-1}$ et $|x_0| \leq p/2$. De $f'_p(x) = \alpha(f'(x)\omega(x/p) + f(x)\omega'(x/p)/p)$ on déduit puisque $\omega(x_0/p) = 1$: $f'(x_0) = \frac{f'_p(x_0)}{\alpha} - \frac{f(x_0)\omega'(x_0/p)}{p}$ d'où $N(f') \leq \frac{\lambda_{n-1}}{\alpha} + \frac{\lambda_n N(\omega')}{p}$. En faisant tendre p vers $+\infty$ et α vers 1 on obtient $N(f') \leq \lambda_{n-1}$.

III.I. Soit f de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On peut supposer f non constante; d'après la partie II on sait que $f^{(k)}$ est bornée pour $0 \leq k \leq n$ et que $N(f^{(k)}) > 0$. Posons $g(x) = af(bx)$ et choisissons a et b pour que $N(g) = aN(f) = \lambda_n$ et $N(g^{(n)}) = ab^n N(f^{(n)}) = 1$, c'est-à-dire $a = \frac{\lambda_n}{N(f)}$ et $b = \left(\frac{N(f)}{\lambda_n N(f^{(n)})} \right)^{(1/n)}$.

On déduit de III.H que $N(g') \leq \lambda_{n-1}$ puis par récurrence que $N(g^{(k)}) \leq \lambda_{n-k}$; en effet, de $N(g^{(k)}) \leq \lambda_{n-k}$ et de $N(g^{(k+n-k)}) \leq 1$ on déduit par le III.H appliqué à $g^{(k)}$ que $N(g^{(k+1)}) \leq \lambda_{n-k-1}$.

$$\text{On en déduit } N(f^{(k)}) \leq \frac{\lambda_{n-k}}{ab^k} = \frac{\lambda_{n-k} N(f)}{\lambda_n} \left(\frac{\lambda_n N(f^{(n)})}{N(f)} \right)^{(k/n)}$$

d'où $N(f^{(k)}) \leq N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{(k/n)} \frac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}$.

IV.A. Utilisons l'inégalité triangulaire appliquée à N , la linéarité de l'application T (qui découle du IIC1) et la majoration du IIC2 : $|N(T^n(\psi_p)) - \lambda_n| = |N(T^n(\psi_p)) - N(T^n(\varphi_0))| \leq |N(T^n(\psi_p - \varphi_0))| \leq |N(T(\psi_p - \varphi_0))|/2^{n-1}$.

La fonction $h = T(\psi_p - \varphi_0)$ a pour dérivée $\psi_p - \varphi_0$ qui est négative sur $[0,1]$. Elle décroît donc de $h(0) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (\psi_p - \varphi_0) dt = \frac{1}{2p}$ à $h(1) = -h(0)$. On en déduit que $N(\psi_p - \varphi_0) = \frac{1}{2p}$ puis que $|N(T^n(\psi_p)) - \lambda_n| \leq \frac{1}{2^n p}$. Il en résulte $\lim_{p \rightarrow +\infty} N(T^n(\psi_p)) = \lambda_n$.

IV.B. On peut appliquer le résultat du III.I à la fonction $T^n(\psi_p)$ car elle est de classe C^n ($(T^n(\psi_p))^{(n)} = \psi_p$ est continue). Le rapport $\frac{N(f^{(k)})}{N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{k/n}} = \frac{N(T^{n-k}(\psi_p))}{N(T^n(\psi_p))^{1-k/n}}$ a pour limite $\frac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}$ quand p tend vers $+\infty$. Cela montre bien que l'inégalité ne peut pas être améliorée.