I Résultats préliminaires

I.A – Calcul d'une intégrale classique

I.A.1)

Q 1. Soit $t \in [0,1]$. On a $0 < 1+t^2 \leqslant 2$ donc $0 < \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Ainsi $\boxed{\mathrm{I}_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}}$

Q 2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Par ailleurs $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable en $+\infty$ car $2n > 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$\boxed{\text{Ce qui justifie l'existence de } \mathrm{K}_n}$ et $\boxed{\mathrm{K}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{2}}$

Q 3. On a $\forall t \geqslant 1,\ 1+t^2 \geqslant 1+t > 0$.
Soit $n \geqslant 2$. Par calcul dans $[0,+\infty]$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} (1+t)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{-n+1}}{-n+1}\right]_{t=1}^{t\to+\infty} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} < +\infty$$

Or quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}} \sim \dfrac{2}{n2^n} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$

On a bien $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)}$

Q 4. À l'aide de la relation de Chasles et Q3, on a quand $n \longrightarrow +\infty$,

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{K}_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right) = o\left(\mathrm{I}_n\right)$$

car $\dfrac{1}{n2^n} = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\dfrac{1}{2^n} = \mathrm{O}\left(\mathrm{I}_n\right)$ selon Q1.

On en déduit que $\boxed{\mathrm{I}_n \sim \mathrm{K}_n}$

Q 5. Sous réserve de validité, on effectue une intégration par parties : *(argument « classe $\mathcal{C}^1$ »inutile)*

$$\mathrm{K}_n = \left[t \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

L'intégration par parties est valide car le bloc tout intégré est nul.

Ainsi $\mathrm{K}_n = 2n\mathrm{K}_n - 2n\mathrm{K}_{n+1}$ ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n+1} + \dfrac{1}{2n}\mathrm{K}_n}$

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On d'après ce qui précède : $\mathrm{K}_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}\mathrm{K}_n$.

Ainsi par récurrence immédiate, on a $\mathrm{K}_n = \dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n-1}(2i)}\mathrm{K}_1 = \dfrac{\prod_{k=1}^{2n-2} k}{\left(\prod_{i=1}^{n-1}(2i)\right)^2}\dfrac{\pi}{2}$. D'où

$$\mathrm{K}_n = \frac{(2n-2)!}{\left(2^{n-1}\cdot(n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$$

En utilisant Stirling, quand $n \to +\infty$, on a :

$$\frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2} \sim \frac{\left(\frac{2n-2}{\mathrm{e}}\right)^{2n-2}\sqrt{2\pi(2n-2)}}{\left(\left(\frac{n-1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}\right)^2} \sim \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi n}}$$

À l'aide de Q4, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{I}_n \sim \mathrm{K}_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}}$

I.A.2)

Q 7. On effectue le changement de variable : $u = \sqrt{n}t$; $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$, pour obtenir : $\boxed{\sqrt{n}\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+u^2/n\right)^n}\,\mathrm{d}u}$

L'argument « classe $\mathcal{C}^1$ »est inutile.

Q 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n : $\left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1+u^2/n\right)^n} & \text{si } u \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$.

On va utiliser le théorème de convergence dominée.

(i) (*inutile*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

(ii) Soit $u > 0$. Quand $n \to +\infty$, on a $f_n(u) = \exp\left(-n\ln(1+u^2/n)\right)$ et $-n\ln(1+u^2/n)) \sim -nu^2/n \longrightarrow -u^2$.
Ainsi comme exp est continue, on a $f_n(u) \longrightarrow \mathrm{e}^{-u^2}$ (valable pour $u = 0$)
Ainsi $(f_n)_n$ converge simplement vers $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ sur $[0,+\infty[$.

(iii) (*inutile*) La fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in [0,\sqrt{n}]$, on a avec la formule du binôme :

$$\left(1+u^2/n\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{u^{2k}}{n^k} \geqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{u^2}{n} = 1+u^2 > 0$$

Ce qui permet d'établir l'hypothèse de domination : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0,+\infty[\,,\ |f_n(u)| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$.
or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. (Q2)

Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème s'applique $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ avec Q7 $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u}$

Q 9. D'après Q6, on a $\sqrt{n}\,\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ Par unicité de la limite, on a donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Par parité, on a alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{2}t$; $\mathrm{d}u = \sqrt{2}\mathrm{d}t$ (*argument inutile* : qui est $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Ainsi $\sqrt{\pi} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$. D'où $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}}$

I.B – Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Q 10. On a $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$ car $x > 0$ et $\varphi(t) \geqslant 0$. Ainsi

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_{t=x}^{t\to+\infty}$$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}}$

Q 11. Je considère la fonction $\psi : u \longmapsto (u^2+1)\displaystyle\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - u\varphi(u)$.

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ alors ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi'(u) = 2u\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + (u^2+1)\left(-\varphi(u)\right) - \varphi(u) - u\left(\frac{-u}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\right) = 2\left(u\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(u)\right)$$

Ainsi $\forall u > 0,\ \psi'(u) = 2u\left(\displaystyle\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\varphi(u)}{u}\right) \leqslant 0$ selon Q10.

Ainsi ψ est décroissante sur $[0,+\infty[$ car ψ y est continue. Le théorème de la limite monotone nous fournit $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$

Par ailleurs on a $\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) + x\varphi(x) \geqslant 0$ et par croissance comparée $x\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ainsi pour $x \geqslant 0$, on a $\psi(x) \geqslant \ell \geqslant 0$, en particulier $\dfrac{\psi(x)}{x^2+1} \geqslant 0$ d'où $\boxed{\dfrac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t}$

Q 12. On a donc $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\varphi(x)$.

Or quand $x \to +\infty$, on a $\dfrac{x}{x^2+1} \sim \dfrac{1}{x}$. Ainsi par encadrement d'équivalents, on a

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Or selon Q9 et Chasles, on a
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x) + \int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où $1 - \Phi(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi $\boxed{\text{quand } x \longrightarrow +\infty, \text{ on a } 1 - \Phi(x) \sim \dfrac{\varphi(x)}{x} \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$

Remarque : on aurait pu obtenir cet équivalent à l'aide d'une intégration par parties et en utilisant une intégration de relation comparaison (ici "petit o").

I.C – Une inégalité maximale

Q 13. On a $\boxed{\mathrm{A} = \bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p \text{ (réunion disjointe)}}$ (si $n = 1$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$).

Q 14. On a donc
$$\mathrm{A} \subset (\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup (\mathrm{A} \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\})) = \left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup \left(\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right)\right)$$

La réunion étant disjointe, on a donc bien
$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right)}$$

Q 15. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Soit $\omega \in \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}$.

On a donc $|\mathrm{R}_p(\omega)| \geqslant 3x$ et $|\mathrm{R}_n(\omega)| < x$. Ainsi selon la deuxième inégalité triangulaire :
$$|\mathrm{R}_n(\omega) - \mathrm{R}_p(\omega)| \geqslant |\mathrm{R}_p(\omega)| - |\mathrm{R}_n(\omega)| > 3x - x = 2x$$
or $\omega \in \mathrm{A}_p$ d'où $\omega \in \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$.

On a bien l'inclusion $\boxed{\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}}$

Q 16. D'après Q14 et Q15, on a :
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On a
$$\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\} = \left\{\left|\sum_{j=p+1}^{n} \mathrm{Z}_j\right| > 2x\right\}$$
Ainsi cet événement ne peut s'écrire qu'en fonction de $\mathrm{Z}_{p+1}, \ldots, \mathrm{Z}_n$ alors que A_p s'exprime à l'aide de $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p$.
Donc le lemme des coalitions s'applique, on l'indépendance des événements A_p et $\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$
Remarque : en temps limité, je déconseille de formaliser davantage et même de chercher à écrire
$$\mathrm{A}_p = \bigcap_{i=1}^{p-1} \left\{\left|\sum_{j=1}^{i} \mathrm{Z}_j\right| < 3x\right\} \cup \left\{\left|\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Z}_j\right| \geqslant 3x\right\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

or en utilisant l'union disjointe de Q13, on a

$$\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{A}\right) \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)}$

Q 17. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $\forall a, b \in [-x, x]$, $|a - b| \leqslant 2x$. Ainsi

$$\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_k| > 2x\} \subset \left(\{|\mathrm{R}_n| > x\} \cup \{|\mathrm{R}_k| > x\}\right) \subset \left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup \{|\mathrm{R}_k| \geqslant x\}\right)$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_k| > 2x\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_k| \geqslant x\}\right) \leqslant 2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right)$.

Ce qui avec Q16, permet d'obtenir le résultat attendu :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n} |\mathrm{R}_p| \geqslant 3x\right\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + 2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right)}$$

II Étude d'une suite de fonctions

La suite $\left(x_{n,k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est arithmétique de raison $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Ainsi

$$-\infty < -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,0} - \frac{1}{\sqrt{n}} < x_{n,0} + \frac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,1} - \frac{1}{\sqrt{n}} < \cdots < x_{n,n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} < +\infty$$

Les intervalles sur lesquels est définie la fonction B_n constituent donc une partition de $\mathbb{R}$ constituée de $n+3$ ensembles. La fonction B_n est donc bien définie.

II.A –

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On a $n - k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi $x_{n,n-k}$ est bien défini et

$$x_{n,k} + x_{n,n-k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} + -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}} = -2\sqrt{n} + \frac{2n}{\sqrt{n}} = 0$$

On conclut $\boxed{-x_{n,k} = x_{n,n-k}}$

Q 19. Par composition, la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi

$$\forall x \geqslant 0,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(0) \geqslant \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0$$

De plus la fonction φ est paire et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(0)$. Ainsi φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, la fonction B_n prend un nombre fini de valeurs (au plus $n+3$).

Ainsi la fonction B_n est bornée sur $\mathbb{R}$.

Par somme la fonction $\varphi - \mathrm{B}_n$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et y admet donc une norme infinie Δ_n.

On a bien $\boxed{\text{l'existence du réel } \Delta_n}$

Q 20. On a l'inclusion $\{|\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)| \mid x \geqslant 0\} \subset \{|\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$

Ainsi la partie de $\mathbb{R}$ non vide $\{|\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)| \mid x \geqslant 0\}$ est majorée par $\Delta_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$.

Cette partie admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\Delta_n \geqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Nous allons procéder par disjonction exhaustive de cas.

Premier cas Si $y \geqslant 0$, on a $|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| \leqslant \sup\limits_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$.

Deuxième cas : Si $y < -\sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,0} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Alors $-y > \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et ainsi $\mathrm{B}_n(y) = 0 = \mathrm{B}_n(-y)$ et on a aussi $\varphi(y) = \varphi(-y)$.

D'où comme $-y > 0$, on a

$$|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| = |\mathrm{B}_n(-y)-\varphi(-y)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Troisième cas : $y < 0$ et il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $y \in \left]x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

Alors, avec Q18, $-y \in \left]x_{n,n-k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,n-k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$. Donc

$$\mathrm{B}_n(-y) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{n-k}\frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \mathrm{B}_n(y)$$

Comme $-y \geqslant 0$, on a

$$|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| = |\mathrm{B}_n(-y)-\varphi(-y)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Quatrième et dernier cas : $y < 0$ et il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $y = x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

À l'aide du troisième cas, on a

$$\forall t \in \left]x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[,\ |\mathrm{B}_n(t)-\varphi(t)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Or la restriction de la fonction B_n à $\left[x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$ est continue car constante et φ également.

En faisant tendre t vers $y = x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on obtient :

$$|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

On vient de montrer $\forall y \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| \leqslant \sup\limits_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$

Ce qui permet de conclure $\boxed{\Delta_n = \sup\limits_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|}$

Q 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ **:** La suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est à valeurs dans $]0,+\infty[$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} \times \frac{k!\cdot(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}$$

Comme $k+1>0$, on a

$$\frac{n-k}{k+1} \leqslant 1 \Longleftrightarrow n-k \leqslant k+1 \Longleftrightarrow \frac{n+1}{2} \leqslant k \Longleftrightarrow \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant k$$

On note alors $q = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. De sorte que

$$\forall k \in [\![q, n]\!],\ \binom{n}{k+1} \leqslant \binom{n}{k}$$

Ainsi la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{q\leqslant k\leqslant n}$ est décroissante.

Notations et premier cas : Soit $z \leqslant y$ dans $\mathbb{R}^+$.

Si $y \geqslant \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a alors $\mathrm{B}_n(z) \geqslant 0 = \mathrm{B}_n(y)$.

Sinon, comme $y < -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'après la remarque en début de partie II, il existe un unique $k_y \in [\![0, n]\!]$ tel que $y \in \left[x_{n,k_y} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k_y} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

On note de même $k_z \in [\![0, n]\!]$ et on remarque que $0 \leqslant k_z \leqslant k_y \leqslant n$.

On a $x_{n,k_z} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ car $z \geqslant 0$.

On a ainsi $-\sqrt{n} + \frac{2k_z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ donc $k_z > \frac{n-1}{2}$.

Si n est impair : on a $q = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} + 1$.

Donc $q \leqslant k_z \leqslant k_y \leqslant n$ et selon l'étude ci dessus on a $\binom{n}{k_z} \geqslant \binom{n}{k_y}$. D'où

$$\mathrm{B}_n(z) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k_z}\frac{1}{2^n} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k_y}\frac{1}{2^n} = \mathrm{B}_n(y)$$

On donc montré $\mathrm{B}_n(z) \geqslant \mathrm{B}_n(y)$ dans tous les cas at ainsi B_n est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ si n est impair.

Si n est pair : on a $q = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$.

Comme $k_z > \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ et que k_z et $\frac{n}{2}$ sont entiers, on a alors

$$k_z \geqslant \frac{n}{2} = q$$

Ainsi de façon analogue au cas précédent on a $\mathrm{B}_n(z) \geqslant \mathrm{B}_n(y)$.

Ce qui donne la décroissance pour n est pair.

Dans tous les cas, $\boxed{\mathrm{B}_n \text{ est une application décroissante sur } \mathbb{R}^+}$

II.B –

Interprétons le :

« `Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que` n `et` k `varient de sorte que` $k \in \mathrm{I}_n$`.` »

Ici le « k » utilisé par l'énoncé (qui dépend de n) doit être considéré comme le terme général d'une suite $(k_n)_n$ *choisie de façon que* $k_n \in \mathrm{I}_n$ *dès que* $\mathrm{I}_n \neq \emptyset$*.*
Avant d'obtenir des résultats asymptotiques, il s'agit dans un premier temps d'établir que la suite (k_n) *est définie à partir d'un certain rang.*
Par ailleurs dans l'optique du passage de la question 24 à la question 25, il s'agit de prouver que les divers O *des questions 22 à 24, sont indépendants du choix de la suite* (k_n)*.*
Je trouve que le fait de devoir gérer tout cela en temps limité est un peu rude même sur ce concours.

Q 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$k \in \mathrm{I}_n \iff 0 \leqslant -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \leqslant \ell + 1 \iff \frac{n}{2} \leqslant k \leqslant \frac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}$$

On a $\dfrac{n}{2} \geqslant 0$ et quand $n \to +\infty$, on a

$$\frac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2} \sim \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2} - \frac{n}{2} \sim \frac{\sqrt{n}\,(\ell+1)}{2} \to +\infty > 1$$

Comme $\mathrm{I}_n = [\![0, n]\!] \cap \left[\dfrac{n}{2}, \dfrac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}\right]$, alors à partir d'un certain rang I_n est non vide et la suite (k_n) est bien définie à partir d'un certain rang.
Ainsi par encadrement d'équivalents, on a :

$$k_n \sim \frac{n}{2} \quad \text{et aussi} \quad n - k_n \sim \frac{n}{2}$$

car on a $n - k_n = n - \left(\dfrac{n}{2} + o(n)\right) = \dfrac{n}{2} + o(n)$
Ainsi $k_n \longrightarrow +\infty$ et $n - k_n \longrightarrow +\infty$, on peut utiliser deux fois Stirling AOC grand cru :

$$k_n!(n-k_n)! = \left[\left(\frac{k_n}{\mathrm{e}}\right)^{k_n} \sqrt{2\pi k_n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k_n}\right)\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{n-k_n}{\mathrm{e}}\right)^{n-k_n} \sqrt{2\pi(n-k_n)}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n-k_n}\right)\right)\right]$$

À l'aide des équivalents on a

$$\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k_n}\right)\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n-k_n}\right)\right) = \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par ailleurs comme $(n - k_n)$ et $k_n \in \left[\dfrac{n - \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}, \dfrac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}\right]$ les $\mathrm{O}(1/n)$ sont indépendants du choix de la suite (k_n). De plus, on a :

$$\left[\left(\frac{k_n}{\mathrm{e}}\right)^{k_n} \sqrt{2\pi k_n}\right] \cdot \left[\left(\frac{n-k_n}{\mathrm{e}}\right)^{n-k_n} \sqrt{2\pi n - k_n}\right] = 2\pi k_n^{k_n+1/2}\,(n-k_n)^{n-k_n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}$$

On peut conclure avec les termes de l'énoncé (que l'on gardera pour la suite) et avec un O indépendant du choix de (k_n) :

$$\boxed{k!(n-k)! = 2\pi \mathrm{e}^{-n} k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Q 23. Quand n tendant vers $+\infty$, on a à l'aide de la question précédente et de Stirling grand cru :

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}\frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi\mathrm{e}^{-n}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}$$

On a utilisé $1/\left(1+\mathrm{O}(1/n)\right) = 1-\mathrm{O}(1/n) = 1+\mathrm{O}(1/n)$, on peut alors conclure que

$$\boxed{\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}}$$

avec un O indépendant du choix de k_n.

Q 24. Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a par définition de $x_{n,k}$:

$$1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = 2-\frac{2k}{n} \text{ et } 1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = \frac{2k}{n} \text{ et } \left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\frac{x_{n,k}^2}{n}$$

Ainsi

$$\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2} = \left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2k}{n}\right)^{k-n/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n/2-k}$$

Comme $\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} = -\frac{n}{2}+k$, on a $\left(\frac{2k}{n}\right)^{k-n/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n/2-k} = \left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}$.

Avec 23, on peut en déduire que $\boxed{\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}}$

En notant D le dénominateur, on a

$$2\ln(\mathrm{D}) = (n+1)\ln\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right) + x_{n,k}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) - x_{n,k}\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)$$

À l'aide des encadrements de 22, on a $x_{n,k} = \mathrm{O}(1)$ car $k \in \mathrm{I}_n$ donc $\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ et $x_{n,k}\sqrt{n} = \mathrm{O}(n)$. Ainsi

$$\ln\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \;;\; \ln\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad\text{et}\quad \ln\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right) = -\frac{x_{n,k}^2}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $2\ln(\mathrm{D}) = x_{n,k}^2+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)}\exp\left[-\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

On conclut : $\boxed{\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$ où O est toujours indépendant du choix de (k_n).

Q 25. Comme quand $n \to +\infty$, $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \leqslant 1$, alors selon Q24 :

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec un O uniforme pour tout choix de (k_n). On note alors δ_n ce $\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ainsi on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall k \in \mathrm{I}_n,\ \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi\left(x_{n,k}\right)\right| \leqslant \delta_n \quad \text{et} \quad \delta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ce qui nous fournit $n_3 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_3,\ \forall k \in \mathrm{I}_n,\ \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi\left(x_{n,k}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$.

La fonction φ est continue sur le segment $[0, \ell]$ donc elle y est uniformément continue selon le théorème de Heine. Cela nous fournit $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y, z \in [0, \ell],\ |y - z| \leqslant \alpha \Longrightarrow |\varphi(y) - \varphi(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on dispose alors de $n_2 \geqslant n_3$ tel que $(k_n)_{n \geqslant n_2}$ est définie vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_2 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \alpha$$

De plus $x_{n,n} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on dispose alors de $n_1 \geqslant n_2$, tel que

$$\forall n \geqslant n_1,\ x_{n,n} = \sqrt{n} \geqslant \ell + 3$$

Soit $n \geqslant n_1$. Soit $y \in [0, \ell]$.

Comme $(x_{n,p})_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est subdivision régulière d'un segment contenant $[0, \ell + 1]$ et de pas $2/\sqrt{n}$, on dispose d'un unique $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant y < x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}$. De plus, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \alpha$, alors

$$|y - x_{n,k}| \leqslant \alpha \text{ et } x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant y < x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} < x_{n,k+1} \leqslant \ell + 1$$

car $x_{n,k+1} - y \leqslant x_{n,k+1} - x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}} \leqslant 1$ car $\sqrt{n} \geqslant \ell + 3 \geqslant 3$.

Si $x_{n,k} \geqslant 0$, alors $k \in \mathrm{I}_n$ et comme $\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \mathrm{B}_n(y)$, on a

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \left|\mathrm{B}_n(y) - \mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right)\right| + \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi\left(x_{n,k}\right)\right| + \left|\varphi\left(x_{n,k}\right) - \varphi(y)\right| \leqslant 0 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$

Dans le cas où $x_{n,k} < 0$ alors comme $x_{n,k+1} > 0$, on est donc dans le cas où n est impair $(2k + 1 = n)$ et $k + 1 \in \mathrm{I}_n$. Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$, alors

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k+1}\right) = \mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \mathrm{B}_n(y) \text{ et } x_{n,k} = -x_{n,k+1} \text{ et } \varphi\left(x_{n,k+1}\right) = \varphi\left(x_{n,k}\right) \text{ puis}$$

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k+1}\right) - \varphi\left(x_{n,k+1}\right)\right| + \left|\varphi\left(x_{n,k}\right) - \varphi(y)\right| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour tout entier $n \geqslant n_1$, on a $\boxed{\sup_{x \in [0, \ell]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}}$

II.C –

Q 26. Soit $\ell > 0$.

*L'auteur nous force donc à écraser le ℓ introduit par lui-même en début de la sous-partie **II-B**. La métaphore du « serpents se mordant la queue » s'applique donc.*

On peut appliquer la sous-partie II-B au segment $[0, \ell]$ et à $\varepsilon = 2\varphi(\ell) > 0$. En effet, on ne s'est pas servi de la relation entre ℓ et ε : $2\varphi(\ell) \leqslant \varepsilon$.

La partie II-B nous fournit $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_2, \ \sup_{x\in[0,\ell]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{2\varphi(\ell)}{2} = \varphi(\ell)$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant n_2,\ \mathrm{B}_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell)}$

Q 27. Soit $\delta > 0$.

Comme $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on dispose de $\mathrm{A} > 0$ tel que $\varphi(\mathrm{A}) \leqslant \dfrac{\delta}{3}$.

En appliquant la partie II-B à $\varepsilon = \dfrac{2\delta}{3}$ et $\ell = \mathrm{A}$ ($\ell > 0$ et $\varphi(\ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ *(vérification complètement inutile !)*),

on dispose de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1, \ \sup\limits_{x\in[0,\ell]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\delta}{3} \leqslant \delta$.

De plus la question 26 nous fournit $n_2 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n \geqslant n_2$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{A}) = \mathrm{B}_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell) = 2\varphi(\mathrm{A})$.

On pose $\mathrm{N} = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geqslant \mathrm{N}$. Soit $y \in \mathbb{R}^+$.

Si $y \in [0, \mathrm{A}]$, on a donc

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \sup_{x\in[0,\mathrm{A}]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \delta$$

Si $y > \mathrm{A}$, avec les positivités et les décroissances sur $\mathbb{R}^+$ de φ et de B_n (Q21), on a

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \mathrm{B}_n(y) + \varphi(y) \leqslant \mathrm{B}_n(\mathrm{A}) + \varphi(\mathrm{A}) \leqslant 3\varphi(\mathrm{A}) \leqslant \delta$$

Ainsi $\Delta_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \delta$. Comme $\Delta_n \geqslant 0$, on a donc montré :

$$\forall \delta > 0, \ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow |\Delta_n| \leqslant \delta$$

Ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$

III Applications

III.A – Théorème central limite

Q 28. Pour g fonction bornée sur I, je note $\|g\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathrm{I}} |g(x)|$.

Comme (f_n) converge uniformément sur I vers f, on dispose de $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_0$, $f - f_n$ est bornée sur I.

Soit $w \in \mathrm{I}$. Soit $n \geqslant \mathrm{N}_0$. On a

$$\left| \int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x - \int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \int_w^v f - \int_w^{v_n} f + \int_w^{v_n} f - \int_w^{v_n} f_n \right| \leqslant \left| \int_v^{v_n} f \right| + \left| \int_w^{v_n} (f - f_n) \right|$$

Je note la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_v^x f$ qui est continue sur I car localement lipschitzienne (f étant bornée sur tout segment) .

Ainsi

$$\left| \int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x - \int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant |\mathrm{F}(v) - \mathrm{F}(v_n)| + \left| \int_w^{v_n} \|f - f_n\|_\infty \,\mathrm{d}x \right| \leqslant |\mathrm{F}(v) - \mathrm{F}(v_n)| + |w - v_n| \cdot \|f - f_n\|_\infty$$

Or le membre de droite est de limite nulle, ainsi $\left| \int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x - \int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où

$$\int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x$$

De manière analogue, on a $\int_{u_n}^{w} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x$

Par somme, on obtient : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x}$

Q 29. Par indépendance mutuelle des X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, les Y_i le sont également selon le lemme des coalitions. De plus on remarque que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Y}_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ (loi de Bernoulli).

Ainsi $\mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ (loi de binomiale). Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On a alors

$$\mathbb{P}\left(\{\mathrm{T}_n = j\}\right) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \frac{\binom{n}{j}}{2^n}$$

D'un autre côté, B_n est constante sur $[x_{n,j} - 1/\sqrt{n}, x_{n,j} + 1/\sqrt{n}[$ égale à $\dfrac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{j}\dfrac{1}{2^n}$. Ainsi

$$\int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{j} \frac{1}{2^n}$$

On peut alors conclure que $\boxed{\mathbb{P}\left(\{\mathrm{T}_n = j\}\right) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x}$

Q 30. On remarque que $\mathrm{T}_n = \dfrac{\mathrm{S}_n + n}{2}$. Ainsi $\mathrm{S}_n = 2\mathrm{T}_n - n$ donc comme T_n est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

$$\left\{ u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \right\} = \left\{ \mathrm{T}_n \in \left[\frac{u\sqrt{n} + n}{2}, \frac{v\sqrt{n} + n}{2} \right] \right\} = \bigcup_{j \in \mathrm{J}_n} \{\mathrm{T}_n = j\}$$

Comme l'union est disjointe, on a bien $\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{ u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \right\}\right) = \sum_{j \in \mathrm{J}_n} \mathbb{P}\left(\{\mathrm{T}_n = j\}\right)}$

Q 31. Le premier résultat : On a $\dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $n-1-\dfrac{n+v\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Ce qui nous fournit $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_0,\ \mathrm{J}_n \cap [\![0, n-1]\!] \neq \emptyset$.

On a vu en début de partie II que $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ x_{n,j} + \dfrac{2}{\sqrt{n}} = x_{n,j+1}$.

Soit $n \geqslant \mathrm{N}_0$. Je note $j_m = \min(\mathrm{J}_n)$ et $j_{\mathrm{M}} = \max(\mathrm{J}_n)$.

On a à l'aide des deux questions précédentes et la relation de Chasles :

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \sum_{j\in \mathrm{J}_n} \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{n,j_m}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j_\mathrm{M}}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Par définition de J_n, on a $j_m - 1 < \dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant j_m$

donc $\dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant j_m < \dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} + 1$. Ainsi

$$\frac{n+u\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \leqslant x_{n,j_m} < \frac{n+u\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

À l'aide du théorème des gendarmes, on a $x_{n,j_m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ puis $x_{n,j_m} - 1/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$

De même $x_{n,j_\mathrm{M}} + 1/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$

Par ailleurs les fonctions φ et B_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$ selon la partie II.

Ainsi Q28 s'applique et on a

$$\int_{x_{n,j_m}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j_\mathrm{M}}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x}$

Pour le deuxième résultat je propose deux méthodes que je désigne par (a) et (b).

Étape 1(a) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on a :

$$\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}$$

Ainsi par continuité croissante : $\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right)$

Il s'agit donc d'établir l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right) = \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right)$$

Pour pouvoir obtenir à l'aide du résultat précédent

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \lim_{p\to+\infty} \int_u^{u+p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Étape 2(a) : on va établir le résultat de double limite (échange de limites).

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $f_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right) \end{array} \right.$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \end{array} \right.$.

(i) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a vu, selon le premier résultat que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_p(n) = \int_u^{u+p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(i)}$$

(ii) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme on a l'union disjointe

$$\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\} \cup \left\{u+p < \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}$$

Ainsi on a

$$0 \leqslant f(n) - f_p(n) = \mathbb{P}\left(\left\{u+p < \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right)$$

On a $S_n = \sum\limits_{i=1} X_i$ où les X_i sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2 car bornées.

On a $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^n \left(\mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2\right) = \sum\limits_{i=1}^n (1-0) = n$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 0$ et $\mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\sqrt{n}^2} = 1$.

On choisit $p_0 = 1 + |\lfloor -u \rfloor|$ et on suppose que $p \geqslant p_0$ de sorte que $u+p > 0$.

Comme $\left\{u+p < \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} \subset \left\{u+p \leqslant \left|\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right|\right\}$, en appliquant Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{u+p < \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{(u+p)^2}$$

On a donc montré

$$\forall p \geqslant p_0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(n) - f_p(n)| \leqslant \frac{1}{(u+p)^2}$$

Or on a $\dfrac{1}{(u+p)^2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (majorant indépendant de n).

Ainsi la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{N}^*$.

Avec **(i)** et **(ii)**, le théorème de la double limite s'applique ce qui nous donne l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} f_p(n) = \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_p(n)$$

Étape 3(a) : on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \lim_{p\to+\infty} \int_u^{u+p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)}$ en utilisant Q9.

Étape 1(b) : On montre $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = u\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. L'application $X \longmapsto \int_u^X \varphi$ étant continue sur $\mathbb{R}$ nous fournit $w > u$ tel que $0 \leqslant \int_u^w \varphi \leqslant \varepsilon/2$.

D'après ce qui précède on a $\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant w\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^w \varphi$ ce qui nous fournit N_0 tel que

$$\forall n \geqslant N_0,\ 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = u\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant w\right\}\right) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Étape 2(b) : On montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \sim -S_n$ (loi symétrique).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \sim -X_i$.

Or les X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont mutuellement indépendantes, il en est donc de même pour les $-X_i$ selon le lemme des coalitions.

Ainsi la distribution de probabilités du vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$ est le produit de celles des X_i et il en est de même pour les $-X_i$. Par conséquent, on a

$$(X_1, \ldots, X_n) \sim (-X_1, \ldots, -X_n)$$

En utilisant la fonction $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$, on obtient :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \sum_{i=1}^{n} (-X_i) = -S_n$$

Étape 3(b) : On montre l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right)$$

Selon Q9, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ainsi par parité de φ, on a : $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

Selon l'étape 2b : on a $\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right)$

or on a $\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right\}\right)$ donc

$$2\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 2\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right) = 1 + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right\}\right)$$

Selon l'étape 1b, on a le résultat voulu, par passage à la limite.

Étape 4(b) : On montre $\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

Premier cas : on suppose $u \geqslant 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) - \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant u\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = u\right\}\right)$$

Par passage à la limite et à l'aide de ce qui précède on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{u} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + 0$$

On conclut à l'aide de Chasles, pour ce cas.

Deuxième cas : on suppose $u < 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) - \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right\}\right)$$

Par passage à la limite et en utilisant Chasles, on établit le résultat pour cet autre cas.

Étape 5(b) : La conclusion. À l'aide de Q9, on sait que

$$\int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Selon l'étape 4b, on a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$

III.B – Critère de tension

Q 32. Soit $x > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} = \left\{x \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} \cup \left\{-x \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}$ (union disjointe).

Comme en Q31, on peut montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2(1-\Phi(x))$$

En utilisant Q12, on obtient $2x^2(1-\Phi(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ce qui nous fournit $x_0 \geqslant 1$ tel que $\forall x \geqslant x_0,\ \left|2x^2(1-\Phi(x))\right| \leqslant \varepsilon/2$.

Soit $x \geqslant x_0$. On a

$$x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2x^2(1-\Phi(x))$$

ce qui nous fournit $n_x \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_x,\ \left|x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) - 2x^2(1-\Phi(x))\right| \leqslant \varepsilon/2$$

On a bien l'existence de $\boxed{n_x \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_x,\ x^2\mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon}$

Q 33. On a donc $\forall m \geqslant n_x, \quad x^2\mathbb{P}\left(\{|S_m| \geqslant x\sqrt{m}\}\right) \leqslant \varepsilon$.

On a $x\sqrt{n} > 0$ et par mutuelle indépendance des X_i, la sous-partie IC s'applique et on a :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant 3 \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}\left(\left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right)$$

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Il s'agit d'établir que $x^2\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leqslant \varepsilon$.

Premier cas : si $p \geqslant n_x$ alors la question 32 s'applique et on a

$$x^2\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{p}\}\right) \leqslant \varepsilon$$

Comme $\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\} \subset \left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{p}\right\}$, on a bien le résultat voulu.

Deuxième cas : si $p < n_x$, on applique l'inégalité de Jules-Irénée et Pafnouti à S_p.

Comme les X_i sont dans L^2, alors il en est de même pour S_p. On a $\mathbb{E}(S_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}(X_i) = 0$

et par indépendance des X_i, on a $\mathbb{V}(S_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{p} \left(\mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2\right) = p$.

Comme $x\sqrt{n} > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{|S_p - \mathbb{E}(S_p)| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_p)}{\left(x\sqrt{n}\right)^2} = \frac{p}{x^2 n}$$

On a $1 \leqslant p < n_x \leqslant n\varepsilon$ donc

$$\mathbb{P}\left(\left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant \frac{n\varepsilon}{x^2 n}$$

Conclusion : On a bien établi le résultat voulu pour tout $p \in [\![1, n]\!]$. Ce qui permet de conclure que

$$\boxed{x^2\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant 3\varepsilon}$$

• • • FIN • • •