1. 1) On raisonne par récurrence sur le nombre k de dérivations. La propriété est vraie pour $k=0$ (avec $P_0 = Q_0 = 1$), et si elle est vraie pour k , alors une dérivation supplémentaitre donne :

$$\frac{d^{k+1}\phi_0}{dx^{k+1}} = \left(\frac{2x}{x^3}\frac{P_k(x)}{Q_k(x)} + \left(\frac{P_k(x)}{Q_k(x)}\right)'\right) e^{-1/x^2} \quad ,$$

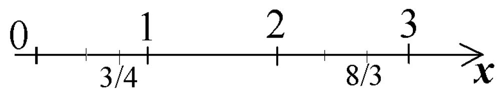
qui est bien de la forme $\dfrac{P_{k+1}(x)}{Q_{k+1}(x)}.e^{-1/x^2}$. Or, par croissances comparées, $x^\alpha e^{-1/x^2} \to 0$ quand $x \to 0$, donc, comme une fraction rationnelle équivaut en $x=0$ à un terme de la forme $a.x^\alpha$, on a que toutes les dérivées k-ièmes de ϕ_0 admettent une limite nulle quand $x \to 0^+$, donc aussi quand $x \to 0$. Par le théorème limite de la dérivée appliqué indéfiniment, on en déduit que ϕ_0 est indéfiniment dérivable en 0 (et avec $\dfrac{d^k\phi_0}{dx^k}(0) = 0$. Par ailleurs, par quotient et composées de fonction C^∞ , ϕ_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'étant clairement sur $\mathbb{R}_-^*$, ϕ_0 est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. 2) La fonction $h(x) = \phi_0(x)\phi_0(1-x)$ est C^∞ par produit de fonctions C^∞ , elle est nulle en dehors de $[0,1]$ puisqu'à chaque fois un des deux facteurs du produit est nul.

Par composition de fonctions C^∞ , la fonction $\psi_{a,b}(x) = h\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et convient.

1. 3)

1. 3.a) Un petit schéma éclaire la situation :



Si on a $\frac{3}{4} \leqslant 2^{-q}|x| \leqslant \frac{8}{3}$, alors d'une part $2^{-q-2}|x| \leqslant \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, d'où $\psi(2^{-q'}x) = 0$ pour $q' \geqslant q+2$; d'autre part, $2^{-q+2}|x| \geqslant 3 > \frac{8}{3}$, d'où $\psi(2^{-q'}x) = 0$ pour $q' \leqslant q-2$. On a bien seulement deux termes non nuls au plus dans la somme $\sum_{q \geqslant 0} \psi(2^{-q}|x|)$.

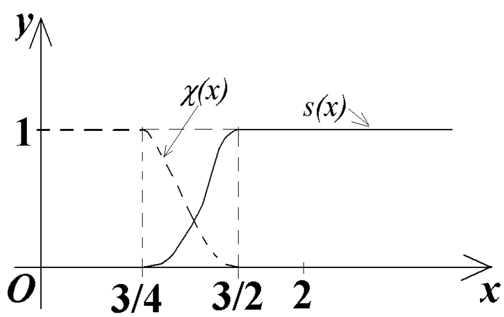
Si maintenant $|x| \geqslant \frac{3}{2}$, il y a effectivement deux termes consécutifs non nuls dans la somme ci-dessus, par exemple $\phi(2^{-q}|x|)$ et $\phi(2^{-q-1}|x|)$. Notons $y = 2^{-q}|x|$. On a alors :

$$\sum_{q=0}^{\infty} \phi(2^{-q}|x|) = \frac{\psi(y)}{\psi(2y)+\psi(y)+\psi(y/2)} + \frac{\psi(y/2)}{\psi(y)+\psi(y/2)+\psi(y/4)} \quad ,$$

et la somme fait 1 car $\psi(y/4) = 0 = \psi(2y)$.

1. 3.b) Remarquons que ϕ est C^∞ sur $]3/8, 16/3[$ comme quotient de fonctions C^∞ car le dénominateur, ayant trois termes consécutifs $\geqslant 0$ dont un au moins > 0 , ne s'annule pas sur cet intervalle. Comme $\phi = \psi = 0$ en dehors du segment $[3/4, 8/3] \subset]3/8, 16/3[$, on a bien que ϕ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit $s(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \phi(2^{-q}|x|)$. Tous les termes de la somme s sont nuls pour $|x| \leqslant 3/4$, et on a vu que la somme vaut 1 pour $|x| \geqslant 3/2$. De plus, comme au voisinage de tout point, seulement deux termes au plus de la somme sont non nuls, s est C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme finie de fonction C^∞ . On complète alors s par la fonction χ , paire, valant $1 - s(x)$ pour $0 \leqslant |x| \leqslant 2$, et 0 pour $x \geqslant 2$, suivant le schéma ci-dessous :



1. 3.c) On utilise un lemme : si deux nombres réels a et b ont pour somme 1 , alors $a^2 + b^2 \geqslant 1/2$.

somme 1 , on a bien l'inégalité

$$\chi(x)^2 + \sum_{q=0}^{\infty} \phi^2(2^{-q}|x|) \geqslant \frac{1}{2} \quad .$$

De plus, sur le compact $[-2,2]$, la somme dese carrés ci-dessus est une fonction continue qui atteint son minimum en un point, et ce minimum ne peut donc pas être nul, sinon tous les termes seraient nuls ce qui contredirait $\chi(x)+s(x)=1$.

NB : à quoi sert cette question ? ? ?

1. 4) La fonction $\xi \mapsto \mathcal{F}_u(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x)\, dx$ est continue, car il s'agit d'une intégrale à paramètre sur un intervalle J compact (le support de u), l'intégrande $(x,\xi) \mapsto e^{-ix\xi}u(x)$ étant continue des deux variables sur $J \times \mathbb{R}$ et dominée pour tout ξ par la fonction constante $\|u\|_\infty$, intégrable sur J . On en déduit que les fonctions $\xi \mapsto \phi(2q|\xi|)\mathcal{F}_u(\xi)$ et $\xi \mapsto \chi(\xi)\mathcal{F}_u(\xi)$ sont continues et à support compact sur $\mathbb{R}$. Or on a le lemme suivant :
Si u est une fonction continue à support compact, $\mathcal{S}_u$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
En effet, on a encore un intégrale à paramètre sur un compact, et on peut dériver indéfiniment sous le signe $\displaystyle\int$, en dominant toujours les intégrandes par des constantes : $\dfrac{d^k}{dx^k}(\mathcal{S}_u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (i\xi)^k e^{ix\xi} u(x)\, dx$.
On en conclut que les fonction $\Delta_q u$ et $\Delta_{-1} u$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. 5) Appelons K_u un intervalle compact contenant le support de u , $K_q = 2^q K_0$ un intervalle compact contenant le support de $\xi \mapsto \phi(2^{-q}|\xi|)$. On peut appliquer le théorème de Fubini sur les intégrales doubles, car il s'agit en fait d'intégrales doubles sur un pavé $K_u \times K_q$:

$$\begin{aligned}
\Delta_q u(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_q} e^{ix\xi} \phi(2^{-q}|\xi|) \left(\int_{K_u} e^{-it\xi} u(t)\, dt \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{K_u} \left(\int_{K_q} e^{i(x-t)\xi} \phi(2^{-q}|\xi|)\, d\xi \right) u(t)\, dt \\
&= cqfd. \quad (3)
\end{aligned}$$

1. 6) Le caractère C^∞ de h_q a déjà été vu (lemme du **1.4**). Comme $\phi(2^{-q}\xi)$ est à support compact, $|h_q|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\phi(2^{-q}\xi)|\, d\xi$. De plus, toujours parce que ϕ , donc aussi ϕ' , ϕ'' , sont à support compact, on a, par intégration par parties et pour $A > 0$ suffisamment grand :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi'(2^{-q}\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = -2^q \underbrace{\left[\phi(2^{-q}\xi) e^{ix\xi} \right]_{-A}^{A}}_{=0} + 2^q \int_{-A}^{A} i\xi \phi(2^{-q}\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \quad ,$$

d'où on voit que $xh_q(x) = -i2^{-q} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi'(2^{-q}\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$, et de même $x^2 h_q(x) = -2^{-2q} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi''(2^{-q}\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$; comme ci-dessus, ces fonctions sont donc bornées sur $\mathbb{R}$.
(On en déduit en particulier que h_q est un $O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ en $\pm\infty$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.)
Notons ϕ_q la fonction $x \mapsto \phi(2^{-q}|x|)$. ϕ_q est dans $L^2 \cap L^1(\mathbb{R})$, donc, (2) s'applique, or :

$$h_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{S}\phi_q \quad ,$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_q(x)\, dx = \big(\mathcal{F}\mathcal{S}\phi_q\big)(0) = \phi_q(0) = 0$ (par définition de ϕ).
Comme $\phi_{q+1}(x) = \phi_q(x/2)$, le changement de variable $u = x/2$ donne :

$$h_{q+1}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} 2\phi_q(u) e^{2izu}\, du = 2h_q(2z) \quad ,$$

donc, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |h_{q+1}(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |h_q(2x)|\, 2dx = \int_{\mathbb{R}} |h_q(u)|\, du$.

1. 8) Par **1.6** $C_0 = \int_{\mathbb{R}} |h_q|$, indépendant de q , convient pour la première inégalité. Mais $\Delta_q u'$ a la même expression que $\Delta_q u$ sauf qu'on met h'_q a la place de h_q(dérivation sous le signe $\int$ sur un compact), et, dérivation sour le signe $\int$ toujours, et changement de variables $u = 2^{-q}\xi$:

$$\begin{aligned} h'_q(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\phi_q(\xi)e^{i\xi z}\,d\xi \\ &= \frac{4^q}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\phi(\xi)e^{i2^q\xi z}\,d\xi \\ &= 4^q h'_1(2^q z) \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\int_{\mathbb{R}} |h'_q(z)|\,dz = 2^q \int_{\mathbb{R}} |h'_1(2^q z)|\,2^q dz = 2^q \int_{\mathbb{R}} |h'_1(u)|\,du$. Donc, la deuxième inégalité est satisfaite avec $C_1 = \int_{\mathbb{R}} |h'_1(u)|\,du$, et les deux inégalités avec $C = \mathrm{Max}(C_0, C_1)$.

Partie II

2.1) La positivité et la définie-positivité sont évidentes, l'homogénéité résulte de la propriété générale $\mathop{\mathrm{Sup}}_{z\in A} |\lambda v(z)| = |\lambda| \mathop{\mathrm{Sup}}_{z\in A} |v(z)|$ (se montre par double inégalité), montrons donc juste l'inégalité triangulaire. Celle-ci est vraie pour $\|\ .\ \|_\infty$, et, pour toutes fonction u et v , on a, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x<y \Rightarrow \frac{|u(y)+v(y)-u(x)-v(x)|}{|y-x|^\alpha} &\leqslant \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\alpha} + \frac{|v(y)-v(x)|}{|y-x|^\alpha} \\ \Rightarrow \frac{|u(y)+v(y)-u(x)-v(x)|}{|y-x|^\alpha} &\leqslant \mathop{\mathrm{Sup}}_{x<y} \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\alpha} + \mathop{\mathrm{Sup}}_{x<y} \frac{|v(y)-v(x)|}{|y-x|^\alpha} \quad , \end{aligned}$$

donc comme le sup est plus petit que tout majorant, on en déduit bien l'inégalité triangulaire sur la norme indiquée. <u>Complétude</u> : On sait que C^0 est complet pour la norme $\|\ .\ \|_\infty$. Or une suite de Cauchy pour la norme $\|\ .\ \|_{C^{0,\alpha}}$ est a fortiori une suite de Cauchy pour la norme $\|\ .\ \|_\infty$. Soit (u_n) une telle suite de Cauchy. On a donc déjà que u_n converge (simplement et uniformément) vers une limite v continue. Mais de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, à partir du rang n_0 où $\forall\, p \geqslant 0 \quad \|u_{n+p} - u_n\|_{C^{0,\alpha}} < \varepsilon$, on a a fortiori :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x<y \Rightarrow \forall\, p\geqslant 0 \quad \frac{|u_{n+p}(y)-u_n(y)-u_{n+p}(x)+u_n(x)|}{|y-x|^\alpha} < \varepsilon \quad ;$$

en faisant tendre p vers $+\infty$ dans cette dernière inégalité, on en déduit

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x<y \Rightarrow \frac{|v(y)-u_n(y)-v(x)+u_n(x)|}{|y-x|^\alpha} \leqslant \varepsilon \quad ,$$

puis (sup inférieur au majorant)

$$\mathop{\mathrm{Sup}}_{x<y} \frac{|v(y)-u_n(y)-v(x)+u_n(x)|}{|y-x|^\alpha} \leqslant \varepsilon \quad (\forall\, n\geqslant n_0\ ) \ .$$

On a donc bien que $u_n \to v$ au sens de la norme $\|\ .\|_{C^{0,\alpha}}$, cqfd.

2.2) **Notation** : on note désormais $\|u\|_\alpha = \mathop{\mathrm{Sup}}_{x<y} \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|^\alpha}$.

Par ajout de $-u(x)v(y) + v(y)u(x)$ au numérateur, on a pour tout couple $x<y$:

$$\begin{aligned} \frac{|(uv)(y)-(uv)(x)|}{|x-y|^\alpha} &\leqslant \|u\|_\infty \frac{|v(y)-v(x)|}{|x-y|^\alpha} + \|v\|_\infty \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leqslant \|u\|_\infty\|v\|_\alpha + \|v\|_\infty\|u\|_\alpha \quad , \end{aligned}$$

d'où, puique le sup est inférieur au majorant,

$$\begin{aligned} \|uv\|_{C^{0,\alpha}} &\leqslant \|u\|_\infty\|v\|_\infty + \|u\|_\infty\|v\|_\alpha + \|v\|_\infty\|u\|_\alpha \\ &\leqslant \|u\|_\infty\|v\|_{C^{0,\alpha}} + \|v\|_\infty\|u\|_{C^{0,\alpha}} \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, la constante $C = 1$ convient.

est dans $C^{0,1}$ puisqu'alors sa dérivée est bornée et on utilise le théorème des accroissements finis.
L'inclusion inverse $C^{0,1} \subset C^1$ est fausse, on peut trouver des contre-exemples où la fonction admet des points anguleux. Par exemple, $u : x \mapsto e^{-|x|}$ est dans $C^{0,1}$ (avec $\|u\|_{C^{0,1}} = 2$) mais n'est pas C^1 .

2.4) A x fixé dans $\mathbb{R}$ et pour tout $y \neq x$ on a $\dfrac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant \|u\|_{C^{0,\alpha}}$, d'où

$$\frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|} \leqslant \|u\|_{C^{0,\alpha}} |x-y|^{\alpha-1} \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Donc u est dérivable en tout point et à dérivée nulle, donc est constante. La réciproque est immédiate.

2.5) Dans les formules (3) et (4) , l'intégrabilité des fonctions h et g demeurent (elles sont définies de la même façon), donc, puisque u est une fonction bornée les intégrales définissant $\Delta_q u$ existent et donnent de fonction bornées sur $\mathbb{R}$ (respectivement par $\|u\|_\infty \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |h_q|$ et $\|u\|_\infty \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g|$.
Pour $q \geqslant 0$, la formule (5) $\Delta_q u(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big(u(y)-u(x)\big) h_q(x-y)\, dy$ vient de l'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_q(x-y)\, dy = 0$ vue en **1.6**.
La fonction $x \mapsto x^\alpha h(x) = \dfrac{x^2 h(x)}{x^{2-\alpha}}$ est intégrable en $\pm\infty$ puisque $2-\alpha > 1$ et que $|x^2 h(x)|$ est bornée (**1.6** toujours), d'autre part on a la majoration $|u(y)-u(x)| \leqslant \|u\|_\alpha . |x-y|^\alpha \leqslant \|u\|_{C^{0,\alpha}} |x-y|^\alpha$, et donc (5) donne finalement :

$$\forall\, q \geqslant 0 \quad \|\Delta_q u\|_\infty \leqslant \|u\|_{C^{0,\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |h(x)|\, dx \quad .$$

Or, on a vu que $h_{q+1}(x) = 2h_q(2x)$, on a donc immédiatement (faire le changement de variables $u = 2x$) que $2^{q\alpha} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |h_q(x)|\, dx$ est une constante M indépendante de q . On a donc finalement établi une majoration du type

$$\forall\, q \geqslant 0 \quad 2^{-q\alpha} \|\Delta_q u\|_\infty \leqslant \|u\|_{C^{0,\alpha}} M \quad ,$$

et il suffit d'ajuster la constante M pour qu'elle soit aussi valable pour $q = -1$ (puisque $\Delta_{-1} u$ est bornée).

2.6)

2.6.1) Il y a convergence normale de la série définissant $R_p u$, puisqu'on a une majoration de la forme $\|\Delta_q u\| \leqslant \dfrac{K}{(2^\alpha)^q}$, terme général d'une série géométrique convergente ($2^\alpha > 1$). Les fonctions $\Delta_q u$ étant continues, $R_p u$ est donc bien continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2.6.2) Par linéarité de l'intégrale, on a

$$S_p u = \mathcal{S}\Big(\big(\chi(\xi) + \sum_{q=0}^{p-1} \phi_q(\xi)\big) \mathcal{F}u(\xi)\Big) \quad .$$

Or, par (2) , puisque la somme finie $\chi(\xi) + \displaystyle\sum_{q=0}^{p-1} \phi_q(\xi)$ est à support compact, on a $\mathcal{F}S_p u = \chi(\xi) + \displaystyle\sum_{q=0}^{p-1} \phi_q(\xi) \mathcal{F}u$, et comme par (1) $\mathcal{F}$ conserve la norme $\| \,.\|_2$, on a :

$$\|S_p u - u\|_2 = \|\mathcal{F}S_p u - \mathcal{F}u\|_2 = \Big\|\big(\chi(\xi) + \sum_{q=0}^{p-1} \phi_q(\xi) - 1\big)\mathcal{F}u\Big\|_2 \quad .$$

On sait par **1.3b)** que la fonction $h(\xi) = \chi(\xi) + \displaystyle\sum_{q=0}^{p-1} \phi_q(\xi) - 1$ tend (simplement) vers 0 quand $p \to \infty$. Mais on supposera ici de plus que h est construit comme dans **1.3** à partir d'une fonction $\psi > 0$, d'où d'une part $0 \leqslant h \leqslant 1$, et d'autre part $h = 0$ sur $\left[-3.2^{p-2}, 3.2^{p-2}\right]$ (en effet, les termes $\phi_q(x)$ sont nuls pour $q \geqslant p$ lorsque x est dans cet intervalle, et donc la somme infinie de somme 1 est alors en fait une somme finie jusqu'à $p-1$). On en déduit la majoration

$$\big\|h(\xi)\mathcal{F}u(\xi)\big\|_2^2 \leqslant \int_{|\xi| \geqslant 3.2^{p-2}} \big|\mathcal{F}u(\xi)\big|^2 d\xi \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

On a vu que la série des $\Delta_q u$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}$, donc on peut définir la fonction $v = \sum_{q=-1} \Delta_q u$, continue sur $\mathbb{R}$. Soit $A > 0$ quelconque. Comme il y a convergence uniforme de $S_p u$ vers v sur $[-A, A]$ (et donc aussi de $|S_p u - u|^2$ vers $|v - u|^2$), on a que $\int_{-A}^{A} |S_p u(x) - u(x)|^2 \, dx \to \int_{-A}^{A} |v(x) - u(x)|^2 \, dx$ quand $p \to \infty$. Mais puisque $\|S_p u - u\|_2^2 \to 0$, on a a fortiori $\int_{-A}^{A} |S_p u(x) - u(x)|^2 \, dx \to 0$ quand $p \to \infty$. Par unicité d'une limite, on en déduit que pour tout $A > 0$, $\int_{-A}^{A} |v(x) - u(x)|^2 = 0$. On a donc $v = u$ sur $\mathbb{R}$ et la convergence de $S_p u$ vers u est aussi ponctuelle.

2.6.3) Par changement de variables $\xi = 2^q u$, on obtient $h_q(z) = 2^q h_0(2^q z)$, d'où

$$\Delta_q u(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^q h_0\big(2^q(x-y)\big) u(y) \, dy = \big(\Delta_0 u_q\big)(2^q x) \quad ,$$

où on a posé $u_q(y) = u(2^{-q} y)$. On a alors $\big(\Delta_q u\big)'(x) = 2^q \big(\Delta_0 u_q\big)'(2^q x)$, donc il suffit de montrer que $\frac{\|\Delta_0 u_q\|_\infty}{\|(\Delta_0 u_q)\|_\infty}$ est majoré indépendemment de q .

Appelons $T(x)$ une fonction C^∞ à support compact valant x sur $[-3, 3]$ par exemple (qui contient le support de $\phi(|x|)$). Comme T est C^∞ , on voit par des intégrations par parties que la transformée de Fourier inverse $\mathcal{S}T$ est à décroissance rapide en $+\infty$ (i.e. est un $o\big(x^{-n}\big)$ pour tout $n \in N$), et donc en particulier elle est dans $L^1(\mathbb{R})$ et on peut appliquer à T la formule d'inversion (2) $\mathcal{F}\mathcal{S}T = T$. Pour alléger les notations, notons $v(s)$ la fonction $\phi(|s|)\mathcal{F}_u(s)$. On a alors d'une part :

$$\Delta_0 u(x) = \int_{\mathbb{R}} v(s) e^{isx} \, ds = \int_{-3}^{3} v(s) e^{isx} \, ds \quad ,$$

et d'autre part, en utilisant (2) et Fubini :

$$\begin{aligned}
(\Delta_0 u)'(x) &= \int_{-3}^{3} isv(s) e^{ixs} \, ds = \int_{-3}^{3} iT(s) v(s) e^{ixs} \, ds \\
&\overset{T=\mathcal{F}\mathcal{S}T}{=} \int_{-3}^{3} iv(s) \Big(\int_{\infty}^{\infty} \mathcal{S}T e^{-its} \, dt \Big) e^{ixs} \, ds \\
&\overset{Fubini}{=} i \int_{\mathbb{R}} \mathcal{S}T(t) \Big(\int_{-3}^{3} v(s) e^{i(x-t)s} \, ds \Big) \, dt \\
&= i \int_{\mathbb{R}} \mathcal{S}T(t) \Delta_0 u(x-t) \, dt \quad .
\end{aligned}$$

(Fubini est justifié par le fait que, comme on l'a remarqué, la fonction $(s, t) \mapsto |v(s)||\mathcal{S}T(t)|$ est intégrable sur $[-3, 3] \times \mathbb{R}$).

On voit ainsi que $\|(\Delta_0 u)'\|_\infty \leqslant K.\|(\Delta_0 u)'\|_\infty$, où $K = \|\mathcal{S}T\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{S}T(t)| \, dt$ est une constante indépendante de u , cqfd.

2.6.4) On a supposé une majoration de la forme $\|\Delta_q u\|_\infty \leqslant \frac{K}{2^{q\alpha}}$, donc on déduit de ci-dessus $\|(\Delta_q u)'\|_\infty \leqslant C_0 K 2^{q(1-\alpha)}$. Donc, somme de dérivées et inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\|(S_p u)'\| &\leqslant C_0 K \sum_{q=-1}^{p-1} \big(2^{1-\alpha}\big)^q \\
&\leqslant C_0 K \frac{2^{p(1-\alpha)} - 2^{\alpha-1}}{2^{1-\alpha} - 1} \\
&\leqslant \frac{C_0 K}{2^{1-\alpha} - 1} 2^{p(1-\alpha)} \quad , \ cqfd.
\end{aligned}$$

2.6.5) On applique la formule des accroissements finis : $|S_p u(x) - S_p u(y)| \leqslant \|(S_p u)'\|_\infty . |x - y|$. Donc, comme par **2.6.2**, $u(x) - u(y) = S_p u(x) - S_p u(y) + R_p u(x) - R_p u(y)$, on a bien par inégalité triangulaire :

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \|(S_p u)'\|_\infty . |x - y| + 2\|R_p u\|_\infty \quad .$$

$$\|R_p u\|_\infty \leqslant K \sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{2^{q\alpha}} = K 2^{-\alpha p} \times \frac{1}{1-2^{-\alpha}} = K_1 2^{-\alpha p} \quad .$$

Donc, en utilisant l'inégalité de la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leqslant C_1 \Big(2^p |x-y|\Big)^{1-\alpha} + \frac{2K_1}{\big(2^p|x-y|\big)^\alpha} \\ &\leqslant \frac{C_1.2^p|x-y| + 2K_1}{\big(2^p|x-y|\big)^\alpha} \quad . \end{aligned}$$

A x fixé, on peut, pour tout $y \neq x$ tel que $|y-x| < 1$, choisir un p dépendant de y tel que $1 \leqslant 2^p|x-y| < 2$, ce qui donne $\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant 2C_1 + 2K_1$, constante indépendante de x et de y . Comme lorsque $|x-y| \geqslant 1$ on peut majorer $\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$ par la constante $2\|u\|_\infty$, on a finalement que u est bien dans $C^{0,\alpha}$.

Partie III

3. 1) Vu qu'on a l'hypothèse $\operatorname*{Sup}_{q\geqslant -1} 2^q \|\Delta_q u\|_\infty < \infty$, on peut répéter dans le cas $\alpha = 1$ les raisonnements des questions **2.6.1** et **2.6.2**, donc on a $u = S_p u + R_p u$ avec $S_p u$ de classe C^∞ . On utilise cette égalité aux points $(x+y), (x-y)$ et x , ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \Big| S_p u(x+y) - \big(S_p u(x) + y.S_p u'(x)\big) \Big| \leqslant \frac{y^2}{2} \|S_p u''\|_\infty \\ \Big| S_p u(x-y) - \big(S_p u(x) - y.S_p u'(x)\big) \Big| \leqslant \frac{y^2}{2} \|S_p u''\|_\infty \end{cases} ,$$

d'où en faisant la somme membre à membre et par inégalité triangulaire,

$$\Big| S_p u(x+y) + S_p u(x-y) - 2 S_p u(x) \Big| \leqslant y^2 \|S_p u''\|_\infty \quad .$$

Comme avant, la série $\sum_{q\geqslant p} \|\Delta_q u\|_\infty$ converge car majorée par une série géométrique, et sa somme majore $\|R_p u\|_\infty$.
Finalement, par inégalité triangulaire, on obtient bien l'inégalité désirée :

$$(6) \quad \Big| u(x+y) + u(x-y) + -2u(x) \Big| \leqslant y^2 \|S_p u''\|_\infty + 4 \sum_{q\geqslant p} \|\Delta_q u\|_\infty \quad .$$

On traduit l'hypothèse sur les $\|\Delta_q u\|_\infty$ par $\|\Delta_q u\|_\infty \leqslant \frac{K}{2^q}$, et on utilise une inégalité analogue à celle obtenue en **2.6.3** (démonstration identique sauf qu'elle utilise cette fois-ci une fonction $U(x)$ C^∞ à support compact valant x^2 sur $[-3,3]$). On obtient :

$$\|(\Delta_q u)''\|_\infty \leqslant C_0 4^q \|\Delta_q u\|_\infty \leqslant C_0 K 2^q \quad .$$

L'inégalité (6) précédente donne alors :

$$\begin{aligned} \Big| u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) \Big| &\leqslant K \Big[C_0 y^2 \frac{2^p - 2^{-1}}{2-1} + 4 \frac{2^{-p}}{1-2^{-1}} \Big] \\ &\leqslant K \Big(C_0 y^2 2^p + \frac{8}{2^p} \Big) \quad . \end{aligned}$$

A x fixé, pour tout y suffisamment petit on peut choisir un p dépendant de y tel que $C_0 4^p y^2 - 6\sqrt{C_0}|y|2^p + 8 \leqslant 0$. En effet, en posant $X = \sqrt{C_0}2^p|y|$, on a que le polynôme $X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$ est négatif pour $2 \leqslant X < 4$, or on peut toujours trouver une puissance de 2 tel que $2^p \times \sqrt{C_0}|y|$ soit dans cet intervalle si $\sqrt{C_0}|y| < 1$. D'où la majoration pour tout x fixé et pour tout y :

- si $|y| < \dfrac{1}{\sqrt{C_0}}$, $\Big| u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) \Big| \leqslant 6K\sqrt{C_0}|y|$;
- si $|y|\sqrt{C_0} \geqslant 1$, $\Big| u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) \Big| \leqslant 4\|u\|_\infty \sqrt{C_0}|y|$.

$$\Delta_q u(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \big(u(x+y)+u(x-y)-2u(x)\big)h_q(y)\,dy \quad .$$

En effet, h_q est paire (car $\xi \mapsto \phi\big(2^{-q}|\xi|\big)$ l'est) et d'intégrale nulle, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Delta_q u(x) &= \int_{\mathbb{R}} \big(u(y)-u(x)\big)h_q(x-y)\,dy \\
&\overset{v=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}} \big(u(x-v)-u(x)\big)h_q(v)\,dv \\
&\overset{v\longleftarrow -v}{=} \int_{\mathbb{R}} \big(u(x+v)-u(x)\big)h_q(v)\,dv \quad .
\end{aligned}$$

D'où, avec **3.1)** : $|\Delta_q u(x)| \leqslant \dfrac{C}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |y||h_q(y)|\,dy$. Appelons w_q l'intégrale de droite de cette dernière inégalité ; on a , par $h_{q+1}(y) = 2h_q(2y)$,

$$w_{q+1} = \int_{\mathbb{R}} |y||h_{q+1}(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}} |2yh_q(2y)|\,dy = \frac{1}{2}w_q \quad ,$$

d'où $2^q w_q$ est constant, et finalement $\|2^q\Delta_q u\|_\infty$ est borné indépendemment de q .
En conclusion, si u , continue à support compact, vérifie l'inégalité

$$\forall\,(x,y \in \mathbb{R}^2 \quad \Big|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)\Big| \leqslant C|y| \quad ,$$

alors $u \in C^1_*$.

3. 3) On prend la même méthode qu'en **2.6**, sauf qu'ici, puisque $\alpha = 1$, on a $\|(S_p u)'\|_\infty \leqslant C_1 \times p$. On en déduit, pour tout x, y :

$$\big|u(x)-u(y)\big| \leqslant C_1|x-y| \times p + K_1 2^{-p} \quad .$$

Pour chaque $y \neq x$ tel que $|x-y| < 1$, on choisit p dépendant de y tel que $|x-y| \leqslant 2^{-p} < 2|x-y|$, d'où $p < -\ln|x-y|$, et on a :

$$\begin{aligned}
\big|u(x)-u(y)\big| &\leqslant -C_1|x-y|\ln|x-y| + 2K_1|x-y| \\
&\leqslant C|x-y|\big(1-\ln|x-y|\big) \quad ,
\end{aligned}$$

où on prend $C = \mathrm{Max}(2K_1, C_1)$. D'où cqfd puisque le cas $x = y$ est trivial.

3. 4) • Si u est C^1 à support compact, alors par le théorème des accroissements finis,

$$\big|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)\big| \leqslant 2\|u'\|_\infty|y| \quad ,$$

et par **3.2)** on conclut que $u \in C^1_*$. Donc $C^1 \subset C^1_*$ pour les fonctions à support compact.
• L'inclusion réciproque est fausse. En effet, toute fonction u continue à support compact et $C/2$-lipschitzienne vérifie l'inégalité du **3.1)** donc, par **3.2)**, est dans C^1_* . Pourtant elle n'est pas nécessairement C^1 (C^1 par morceaux suffit par exemple. . .) ■

⁂