Mathématiques C : éléments de correction

I. Convergence faible

(1) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$ et $v, w \in \mathrm{H}$ tels que $v_n \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} v$ et $v_n \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} w$.

On a alors en particulier $\langle v_n | v-w\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle v|v-w\rangle$ et $\langle v_n|v-w\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle w|v-w\rangle$.

Par unicité de la limite (usuelle, dans $\mathbb{R}$), on en déduit $\langle v|v-w\rangle = \langle w|v-w\rangle$, donc

$$||v-w||^2 = \langle v-w|v-w\rangle = 0$$

par bilinéarité, d'où l'on tire $v-w=0$ et $v=w$.

(2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathrm{H}$ tels que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$. Soit $z \in \mathrm{H}$.

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle v_n - v|z\rangle| \leqslant \underbrace{||v_n - v||}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} ||z||,$$

d'où l'on tire $\langle v_n - v|z\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $\langle v_n|z\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle v|z\rangle$.

Cela montre $v_n \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} v$.

(3) Supposons $v_n \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} v$ et $||v_n|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||v||$. On a alors

$$\begin{aligned} ||v_n - v||^2 &= ||v_n||^2 - 2\langle v_n|v\rangle + ||v||^2 \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} ||v||^2 - 2\langle v|v\rangle + ||v||^2 = 0, \end{aligned}$$

donc $||v_n - v|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$, donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(4) Supposons H de dimension finie. Il suffit de montrer que la convergence faible entraîne la convergence forte, grâce à la question **(I.2)**. Soit donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathrm{H}$ tels que $v_n \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} v$.

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de H.

On a alors $\forall i \in [\![1, r]\!], \langle v_n|e_i\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle v|e_i\rangle$, donc

$$v_n = \sum_{i=1}^{r} \langle v_n|e_i\rangle\, e_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{r} \langle v|e_i\rangle\, e_i = v,$$

ce qui conclut.

(5) Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, ||v_n|| \leqslant \mathrm{M}$. On a alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|\langle v|w\rangle - \langle v_n|w_n\rangle| \leqslant |\langle v|w\rangle - \langle v_n|w\rangle| + |\langle v_n|w\rangle - \langle v_n|w_n\rangle|.$$

- Comme $v_n \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} v$, $\langle v|w\rangle - \langle v_n|w\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\langle v_n|w\rangle - \langle v_n|w_n\rangle| &= |\langle v_n|w - w_n\rangle| \\ &\leqslant \mathrm{M}\, ||w - w_n|| \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

1. `mailto:maxime.bourrigan@gmail.com`

Cela entraîne $\langle v_n|w_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle v|w\rangle$.

(6.a) — On a clairement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|c_n\| = \sqrt{\int_0^1 \cos^2(nt)\,dt} \leqslant 1$.

— Soit $z\in\mathrm{H}$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\langle c_n|z\rangle &= \int_0^1 \cos(nt)\,z(t)\,dt\\ &= \left[\frac{\sin(nt)}{n}z(t)\right]_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{\sin(nt)}{n}z'(t)\,dt\\ \text{donc}\quad |\langle c_n|z\rangle| &\leqslant \frac{1}{n}\left(|z(1)|+\int_0^1 |z'|\right),\end{aligned}$$

ce qui montre $\langle c_n|z\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(6.b) On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\langle c_n|c_n\rangle &= \int_0^1 \cos^2(nt)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\int_0^1 \cos(2nt)\,dt\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{t=0}^1,\\ \text{donc}\quad \langle c_n|c_n\rangle &= \frac{1}{2}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

ce qui entraîne que la suite $(\langle c_n|c_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/2$ et donc (par unicité de la limite) qu'elle ne converge pas vers 0.

II. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

(J'omets les suffixes $-;\mathbb{C}$ dans les noms des différents espaces fonctionnels et ne préciserai le codomaine que quand il sera $\mathbb{R}$.)

(1) Soit $t_0\in\mathbb{R}$ et $\varphi : s\mapsto f(t_0,s)$. Puisque f est lisse, toutes ses dérivées partielles existent, donc en particulier toutes les dérivées de φ existent, ce qui montre $\varphi\in\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ (et on a alors l'appartenance $\forall n\in\mathbb{N}, \varphi^{(n)} : s\mapsto \partial^{(0,n)}f(t_0,s)$).

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application polynomiale.

L'application $\mathrm{P} : (t,s)\mapsto p(s)$ est alors polynomiale et l'on a

$$\forall s\in\mathbb{R}, \left(p\,\varphi^{(n)}\right)(s) = \mathrm{P}(t_0,s)\partial^{(0,n)}f(t_0,s),$$

donc le caractère borné de $\mathrm{P}\,\partial^{(0,n)}f$ (qui provient de l'hypothèse $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) entraîne le caractère borné de $p\,\varphi^{(n)}$.

Cela démontre $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Naturellement, on procède de même pour la fonction $\psi : t\mapsto f(t,s_0)$, pour un certain $s_0\in\mathbb{R}$.

(2) Soit $\gamma : \begin{cases}\mathbb{R}\to & \mathbb{C}\\ t\ \mapsto & e^{-t^2}.\end{cases}$

— La fonction γ est lisse par opérations.

— La fonction γ ne s'annule clairement en aucun point.

— Par croissance comparée, on a $\gamma(x) = \underset{x\to\pm\infty}{o}(x^{-j})$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. Cela entraîne que, quel que soit $j \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^j \gamma(x)$ est bornée au voisinage de $\pm\infty$, c'est-à-dire hors d'un certain segment. D'après le théorème des bornes atteintes, puisqu'elle est continue, elle est également bornée sur tout segment, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Par combinaison linéaire, le produit $p\gamma$ est donc bornée pour toute fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

— Par une récurrence immédiate, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^{(n)} = q_n \gamma$. Le point précédent entraîne donc que $p\gamma^{(n)}$ est bornée pour toute fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ce qui achève la preuve du fait que $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(3) Commençons par quelques remarques générales.

— Déjà, le lemme de Schwarz entraîne que les endomorphismes ∂_1 et ∂_2 commutent, et que, quels que soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\partial^{(n,m)} f = (\partial_1^n \circ \partial_2^m)(f)$.

— Ensuite, si f (resp. g) est une fonction dérivable, alors $f \otimes g$ est dérivable par rapport à la première (resp. deuxième) variable, et

$$\partial_1(f \otimes g) = f' \otimes g \qquad (\text{resp. } \partial_2(f \otimes g) = f \otimes g').$$

— Par une récurrence immédiate, cela montre que si f et g sont lisses, toutes les dérivées partielles de $f \otimes g$ existent, donc cette fonction est lisse et on a

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \partial^{(n,m)}(f \otimes g) = f^{(n)} \otimes g^{(m)}.$$

— Si h_1 et h_2 sont deux fonctions bornées, il en va clairement de même de $h_1 \otimes h_2$.

— Étant donné quatre fonctions f, g, h_1, h_2, on a clairement l'égalité

$$(f \otimes g)(h_1 \otimes h_2) = (f h_1) \otimes (g h_2).$$

— Par ailleurs, on observe directement

- qu'étant donné deux fonctions polynomiales $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la fonction $p_1 \otimes p_2$ est polynomiale ;
- que toute fonction polynomiale s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de la forme précédente, voire même de fonctions de la forme $\pi_k \otimes \pi_\ell$, où l'on note (et ce jusqu'à la fin du sujet), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k : t \mapsto t^k$.

On peut maintenant procéder à la preuve. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La troisième remarque montre déjà $f \otimes g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Soit maintenant $k, \ell, n, m \in \mathbb{N}$. Comme $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les fonctions $\pi_k f^{(n)}$ et $\pi_\ell g^{(m)}$ sont bornées. Il en va donc de même de

$$(\pi_k f^{(n)}) \otimes (\pi_\ell g^{(m)}) = (\pi_k \otimes \pi_\ell)(f^{(n)} \otimes g^{(m)}) = (\pi_k \otimes \pi_\ell)\partial^{(n,m)} g.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit (grâce à la dernière remarque) que $\mathrm{P}\,\partial^{(n,m)}(f \otimes g)$ est bornée, quels que soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ polynomiale, ce qui achève la preuve de l'appartenance $f \otimes g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

(4) Soit $f \in \mathrm{V}$. Déjà, $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Soit $k, \ell, n, m \in \mathbb{N}$. On a $(\pi_k \otimes \pi_\ell)\partial^{(n,m)} f = \left(\mathrm{M}_1^k \circ \mathrm{M}_2^\ell \circ \partial_1^n \circ \partial_2^m\right)(f)$, donc cette fonction appartient à V et, partant, est bornée.

Par combinaison linéaire, on en déduit (comme à la question précédente) que $\mathrm{P}\,\partial^{(n,m)} f$ est bornée quels que soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

(5) Soit $\Pi = \left\{ hf \,\middle|\, (h,f) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \right\}$ et $V = \mathrm{Vect}(\Pi)$.

Il est déjà clair que V est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et on va montrer qu'il vérifie les hypothèses de la question précédente. On procède par étapes. Notons $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ bornées.

— Soit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Par définition, on peut trouver une fonction polynomiale $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^*$ telle que $\dfrac{h}{P}$ soit bornée.

On a alors

$$hf = \frac{h}{P}(Pf),$$

donc $hf \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ en tant que produit de deux fonctions bornées ($Pf \in L^\infty(\mathbb{R})$ puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$).

On a montré $\Pi \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Comme $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}$, il s'ensuit $V = \mathrm{Vect}(\Pi) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

— Soit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $k \in \{1,2\}$. On a alors

$$M_k(hf) = M_k(h)f.$$

Comme l'énoncé admet que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ est stable sous M_k, il s'ensuit que $M_k(h) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, et donc $M_k(hf) \in \Pi \subseteq V$.

On a montré $\Pi \subseteq M_k^{-1}[V]$. Comme $M_k^{-1}[V]$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, il s'ensuit $V = \mathrm{Vect}(\Pi) \subseteq M_k^{-1}[V]$, c'est-à-dire que V est stable sous M_k.

— Soit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $k \in \{1,2\}$. On a alors

$$\partial_k(hf) = \partial_k(h)f + h\,\partial_k(f)$$

Comme l'énoncé admet que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ sont stables sous ∂_k, il s'ensuit les deux termes de la somme sont éléments de Π, donc $\partial_k(hf) \in V$.

On a montré $\Pi \subseteq \partial_k^{-1}[V]$. Comme $\partial_k^{-1}[V]$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, il s'ensuit $V = \mathrm{Vect}(\Pi) \subseteq \partial_k^{-1}[V]$, c'est-à-dire que V est stable sous ∂_k.

D'après la question précédente, on a donc $V \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. *A fortiori*, $\Pi \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, ce qui conclut.

(6) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers 0 et soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ telle que l'on ait l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leqslant |g|$. On va poser $h = |g|$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subseteq C^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$ et que ce sous-espace vectoriel est manifestement stable par passage à la valeur absolue, on a $h \in C^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$.

On définit

$$\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{C} \\ t \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(t,s)\,ds \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t,s)\,ds. \end{cases}$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue (par morceaux), comme le préambule le rappelle.

— Montrons que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 (évidemment continue par morceaux).

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On va montrer que $\varphi_n(t_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n(t_0,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(t_0,\cdot)$ est continue (par morceaux) par opérations (puisque f_n est elle-même continue).
- Le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 entraîne en particulier que $(f_n(t_0,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 (évidemment continue par morceaux).
- Quels que soient $n\in\mathbb{N}$ et $s\in\mathbb{R}$, on a $|f_n(t_0,s)|\leqslant h(t_0,s)$, donc on a la domination

$$\forall n\in\mathbb{N}, |f_n(t_0,\cdot)|\leqslant h(t_0,\cdot). \tag{✠}$$

La fonction $h(t_0,\cdot)$ est évidemment positive, et elle est intégrable d'après le préambule (comme $h\in\mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$, ψ est bien définie en particulier en t_0).

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\varphi_n(t_0)=\int_{\mathbb{R}} f_n(t_0,\cdot)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{\mathbb{R}} 0=0,$$

ce qui donne bien la convergence simple de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— La domination (✠) et l'inégalité triangulaire donnée en préambule montrent que, quels que soient $n\in\mathbb{N}$ et $t_0\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t_0)|&=\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(t_0,\cdot)\right|\\ &\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f_n(t_0,\cdot)|\\ &\leqslant\int_{\mathbb{R}} h(t_0,\cdot) &&\text{(par positivité de l'intégrale)}\\ &\leqslant\psi(t_0).\end{aligned}$$

Autrement dit, $\forall n\in\mathbb{N}, |\varphi_n|\leqslant\psi$.

La fonction ψ est positive par positivité de l'intégrale, et elle est intégrable d'après le préambule, car $h\in\mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n=\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{\mathbb{R}} 0=0,$$

ce qui conclut.

III. Endomorphismes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ commutant avec les opérateurs ∂_k et M_k

(1.a) Supposons $f(a)=0$. Soit $x\neq 0$. On a (comme $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\subseteq\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+\int_a^x f'(s)\,ds &&\text{(th. fond. de l'analyse)}\\ &=(x-a)\int_0^1 f'(a+u(x-a))\,du, &&\begin{bmatrix}u=(s-a)/(x-a)\\ s=a+u(x-a)\\ ds=(x-a)\,du\end{bmatrix}\end{aligned}$$

et cette formule est également valable si $x=a$.

Posons donc

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{C} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f'(a+u(x-a))\,du, \end{cases}$$

de telle sorte que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-a)g(x)$. Il reste à montrer que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \times [0,1] \to & \mathbb{C} \\ (x,u) & \mapsto f'(a+u(x-a)) \end{cases}$$

est lisse par opérations. *A fortiori*, les dérivées $\partial_1^j u$ existent donc pour tout $j \in \mathbb{N}$, elles sont continues par rapport à leur première variable et continues par morceaux et (donc) intégrables sur le segment $[0,1]$ par rapport à leur deuxième variable.

On a, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\partial_1^j \varphi : (x,u) \mapsto u^j f^{(j+1)}(a+u(x-a)),$$

donc, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\left|\partial_1^j \varphi(x,\cdot)\right| \leqslant ||f^{(j+1)}||_\infty$, cette norme uniforme étant bien définie car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc toutes les dérivées de f sont à décroissance rapide, et donc bornées.

Les constantes étant intégrables sur le segment $[0,1]$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ (dans sa version C^j) pour en déduire que g est de classe C^j, et que

$$g^{(j)} : x \mapsto \int_0^1 u^j f^{(j+1)}(a+u(x-a))\,du.$$

Cela démontre déjà $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Pour montrer que les dérivées de g sont à décroissance rapide, on va utiliser la formule

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, g(x) = \frac{f(x)}{x-a}.$$

D'après la formule de Leibniz, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, k! \frac{f^{(n-k)}(x)}{(x-a)^{k+1}}.$$

Or,

— comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quels que soient $j,n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction $x \mapsto x^j f^{(n-k)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$;

— donc, quels que soient $j,n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^j f^{(n-k)}(x)}{(x-a)^{k+1}}$ est bornée sur $\mathbb{R} \setminus [a-1, a+1]$

— donc, par combinaison linéaire, quels que soient $j,n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^j g^{(n)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R} \setminus [a-1, a+1]$;

— donc, en vertu du théorème des bornes atteintes appliqué aux dérivées de g, continues car g est lisse, quels que soient $j,n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^j g^{(n)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$;

— donc, par combinaison linéaire, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ polynomiale, la fonction $p\, g^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui montre (enfin) que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1.b) La réciproque étant claire, la question précédente a montré que $\{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid f(a)=0\}$ était précisément $\operatorname{im}\left(\mathrm{M}-a\,\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right)$, où l'on a commis l'abus de notation consistant à continuer à noter M l'endomorphisme induit à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Comme M et L commutent, il en va de même de $\mathrm{M}-a\,\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ et L, donc L stabilise $\operatorname{im}\left(\mathrm{M}-a\,\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right)$, ce qui conclut.

(1.c) La fonction $f(a)g-g(a)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'annule en a donc, d'après la question précédente, il en va de même de

$$\mathrm{L}(f(a)g-g(a)f)=f(a)\mathrm{L}(g)-g(a)\mathrm{L}(f),$$

ce qui conclut.

(1.d) On réutilise la fonction γ construite à la question **(II.2)**. On rappelle qu'elle ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$. Soit $\psi=\gamma^{-1}\mathrm{L}(\gamma)$, qui appartient à $\mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ par opérations.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f(a)\mathrm{L}(\gamma)(a)=\gamma(a)\mathrm{L}(f)(a)$, donc

$$\mathrm{L}(f)(a)=\gamma(a)^{-1}\mathrm{L}(\gamma)(a)f(a)=\psi(a)f(a),$$

ce qui conclut.

(1.e) On continue à utiliser la fonction ψ introduite à la question précédente. Supposons que L et D commutent. On a alors en particulier

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{L}\gamma)=\mathrm{L}(\mathrm{D}\gamma) \quad &\text{donc} \quad \mathrm{D}(\psi\gamma)=\psi\gamma' \\
&\text{donc} \quad \psi'\gamma+\psi\gamma'=\psi\gamma' \\
&\text{donc} \quad \psi'\gamma=0 \\
&\text{donc} \quad \psi'=0 \qquad\qquad \text{(car } \gamma \text{ ne s'annule jamais)},
\end{aligned}$$

ce qui montre que ψ est une fonction constante, et conclut.

(2.a) L'application μ_a est bien définie d'après la question **(II.1)**, et évidemment linéaire. Montrons qu'elle est surjective. Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

D'après la question **(II.3)**, l'application $g \otimes (\gamma(a)^{-1}\gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu_a(g \otimes (\gamma(a)^{-1}\gamma))(t) &= (g \otimes (\gamma(a)^{-1}\gamma))(t,a) \\
&= g(t)\gamma(a)^{-1}\gamma(a) \\
&= g(t),
\end{aligned}$$

ce qui montre $\mu_a(g \otimes (\gamma(a)^{-1}\gamma))=g$, et conclut.

(2.b) Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $f, g \in \mu_a^{-1}\{h\}$. On a donc $f-g \in \ker \mu_a = \operatorname{im} \nu_a$.

Comme T commute avec M_2, il commute également avec $\nu_a=\mathrm{M}_2-a\,\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)}$, donc il stabilise son image. Cela entraîne que

$$\mathrm{T}(f)-\mathrm{T}(g)=\mathrm{T}(f-g) \in \operatorname{im} \nu_a = \ker \mu_a,$$

c'est-à-dire que $(\mu_a \circ \mathrm{T})(f)=(\mu_a \circ \mathrm{T})(g)$, ce qui conclut.

(2.c) On a, quel que soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(\mu_a \circ \partial_1)(f)(t) &= (\partial_1 f)(t,a) \\
&= (\mu_a f)'(t) \\
&= (\mathrm{D} \circ \mu_a)(f)(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et}\quad (\mu_a \circ \mathrm{M}_1)(f)(t) &= (\mathrm{M}_1 f)(t,a)\\ &= t\,f(t,a)\\ &= (\mathrm{M}\circ\mu_a)(f)(t),\end{aligned}$$

ce qui montre les égalités $\mu_a \circ \partial_1 = \mathrm{D}\circ\mu_a$ et $\mu_a\circ\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}\circ\mu_a$.

Par ailleurs, la définition de L_a se traduit en $\mu_a\circ\mathrm{T} = \mathrm{L}_a\circ\mu_a$. On a alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}_a\circ\mathrm{D}-\mathrm{D}\circ\mathrm{L}_a)\circ\mu_a &= \mathrm{L}_a\circ\mathrm{D}\circ\mu_a - \mathrm{D}\circ\mathrm{L}_a\circ\mu_a\\ &= \mathrm{L}_a\circ\mu_a\circ\partial_1 - \mathrm{D}\circ\mu_a\circ\mathrm{T}\\ &= \mu_a\circ\mathrm{T}\circ\partial_1 - \mu_a\circ\partial_1\circ\mathrm{T}\\ &= \mu_a\circ(\mathrm{T}\circ\partial_1-\partial_1\circ\mathrm{T})\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\operatorname{im}\mu_a \subseteq \ker(\mathrm{L}_a\circ\mathrm{D}-\mathrm{D}\circ\mathrm{L}_a)$.

D'après la question **(III.2.a)**, μ_a est surjective, donc cela donne directement $\mathrm{L}_a\circ\mathrm{D} = \mathrm{D}\circ\mathrm{L}_a$.

On procède exactement de la même façon pour montrer que L_a et M commutent.

(2.d) D'après la question **(III.1)**, on peut trouver une fonction $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ telle que

$$\forall a\in\mathbb{R}, \mathrm{L}_a = \beta(a)\,\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}.$$

On a donc, pour tous $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(f)(t,a) &= (\mu_a\circ\mathrm{T})(f)(t)\\ &= (\mathrm{L}_a\circ\mu_a)(f)(t)\\ &= \beta(a)\mu_a(f)(t)\\ &= \beta(a)f(t,a),\end{aligned}$$

ce qui est la formule demandée, mais il reste à montrer que $\beta\in\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour cela, constatons que pour tout $y\in\mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{T}(\gamma\otimes\gamma)(0,y) = \gamma(0)\,\beta(y)\,\gamma(y),$$

donc $\beta : y \mapsto \dfrac{\mathrm{T}(\gamma\otimes\gamma)(0,y)}{\gamma(0)\gamma(y)}$ est lisse par opérations (T étant un endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a $\mathrm{T}(\gamma\otimes\gamma)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\subseteq\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$).

Reste à montrer que β est constante.

Remarquons que, $\mathrm{T}(\gamma\otimes\gamma) : (x,y)\mapsto\gamma(x)\,\beta(y)\,\gamma(y)$, donc que

$$(\partial_2\circ\mathrm{T})(\gamma\otimes\gamma) : (x,y)\mapsto\gamma(x)\,\beta'(y)\,\gamma(y)+\gamma(x)\,\beta(y)\,\gamma'(y).$$

Pour tout $y\in\mathbb{R}$, la formule $\partial_2\circ\mathrm{T} = \mathrm{T}\circ\partial_2$ donne donc en particulier

$$\begin{aligned}(\partial_2\circ\mathrm{T})(\gamma\otimes\gamma)(0,y) &= (\mathrm{T}\circ\partial_2)(\gamma\otimes\gamma)(0,y)\\ &= \mathrm{T}(\gamma\otimes\gamma')(0,y)\\ \text{donc}\quad \gamma(0)\beta'(y)\gamma(y)+\gamma(0)\beta(y)\gamma'(y) &= \gamma(0)\beta(y)\gamma'(y)\\ \text{donc}\quad \gamma(0)\beta'(y)\gamma(y) &= 0\\ \text{donc}\quad \beta'(y) &= 0,\end{aligned}$$

car γ ne s'annule jamais.

On en déduit que $\beta' = 0$, donc que β est constante, ce qui conclut : T est une homothétie.

IV. La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

(1.a) Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ polynomiale. On a, pour tous $s, z, t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\mathrm{P}(t,s)e^{-isz}f(t,s)\right| \leqslant |\mathrm{P}(t,s)f(t,s)|$$

donc, quel que soit $z \in \mathbb{R}$, la fonction $(t,s) \mapsto e^{-isz}f(t,s)$ est dans $\mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$, ce qui montre (d'après le résultat admis en préambule) que son intégrale est bien définie et continue, c'est-à-dire la continuité des applications partielles $\Gamma(z_0, \cdot)$, pour tout $z_0 \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction $(t,s) \mapsto |s|\,|f(t,s)|$ est dans $\mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$, donc, toujours d'après le préambule, la fonction

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |s|\,|f(t,s)|\,ds \end{cases}$$

est bien définie et continue.

Pour tous $z_1, z_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$|\Gamma(f)(z_2,t_2) - \Gamma(f)(z_1,t_1)| \leqslant |\Gamma(f)(z_2,t_2) - \Gamma(f)(z_1,t_2)| + |\Gamma(f)(z_1,t_2) - \Gamma(f)(z_1,t_1)|.$$

Or,

$$\begin{aligned}
|\Gamma(f)(z_2,t_2) - \Gamma(f)(z_1,t_2)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left(e^{-isz_1} - e^{-isz_2}\right) f(s,t_2)\,ds\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|e^{-isz_2} - e^{-isz_1}\right| |f(s,t_2)|\,ds && \text{(inég. tr. du préambule)} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |sz_2 - sz_1|\,|f(s,t_2)|\,ds && (\theta \mapsto e^{i\theta} \text{ est 1-lipschitzienne, par l'IAF}) \\
&\leqslant |z_2 - z_1| \int_{\mathbb{R}} |s|\,|f(s,t_2)|\,ds \\
&\leqslant \psi(t_2)\,|z_2 - z_1|.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure : soit $\varepsilon > 0$ et $(z_1, t_1) \in \mathbb{R}^2$.

Par continuité de $\Gamma(z_1, \cdot)$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall t_2 \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta], |\Gamma(f)(z_1,t_2) - \Gamma(f)(z_1,t_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'application ψ étant continue, le théorème des bornes atteintes garantit que $\mathrm{M} = \max\limits_{[t_1-\delta, t_1+\delta]} |\psi|$ est bien défini.

On pose alors $\eta = \min\left(\delta, \dfrac{\varepsilon}{2(\mathrm{M}+1)}\right) > 0$.

Pour tout $(z_2, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\max(|z_2 - z_1|, |t_2 - t_1|) \leqslant \eta$, on a alors d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
|\Gamma(f)(z_2,t_2) - \Gamma(f)(z_1,t_1)| &\leqslant \psi(t_2)\,|z_2 - z_1| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+1}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\Gamma(f)$ est continue.

(1.b) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

— On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z,s) & \mapsto & e^{-isz} f(t_0,s). \end{cases}$$

- Par opérations, u est lisse. En particulier :
  - $*$ Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $u(z,\cdot)$ est continue par morceaux.
  - $*$ La dérivée partielle $\partial_1 u$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
  - $*$ Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\partial_1 u(\cdot,s)$ est continue.
  - $*$ Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\partial_1 u(z,\cdot)$ est continue par morceaux.
- Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $u(z,\cdot)$ vérifie

$$|u(z,\cdot)| \leqslant |f(t_0,\cdot)|.$$

  Or, $f(t_0,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après la question **(II.1)**, donc $|f(t_0,\cdot)| \in \mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R})$, ce qui entraîne que $u(z,\cdot)$ est intégrable.
- On a $\partial_1 u : (z,s) \mapsto -is\, e^{-isz} f(t_0,s)$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$|\partial_1 u(z,\cdot)| \leqslant |s|\ |f(t_0,\cdot)|,$$

  qui est intégrable car $f(t_0,\cdot) \in \mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R})$, donc $s \mapsto |s|^3\, |f(t_0,s)|$ est bornée, et le critère de Riemann s'applique.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, $z \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(z,s)\,ds$ est donc de classe C^1, et sa dérivée est $z \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \partial_1 u(z,s)\,ds$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \partial_1 \Gamma(f)(z,t_0) &= \int_{\mathbb{R}} -is\, e^{-isz} f(t_0,s) \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} e^{-isz}\, s\, f(t_0,s) \\ &= -i\Gamma(\mathrm{M}_2 f)(z,t_0), \end{aligned}$$

fonction bien définie car M_2 stabilise $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, donc $\mathrm{M}_2 f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

— On fixe $z_0 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$v : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (t,s) & \mapsto & e^{-isz_0} f(t_0,s). \end{cases}$$

- Par opérations, v est lisse. En particulier :
  - $*$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t,\cdot)$ est continue par morceaux.
  - $*$ La dérivée partielle $\partial_1 v$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
  - $*$ Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\partial_1 v(\cdot,s)$ est continue.
  - $*$ Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\partial_1 v(t,\cdot)$ est continue par morceaux.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t,\cdot)$ vérifie

$$|v(t,\cdot)| \leqslant |f(t,\cdot)|,$$

  qui est à croissance rapide, donc intégrable, comme on l'a déjà utilisé, donc $v(z,\cdot)$ est intégrable.

- On a $\partial_1 v : (t,s) \mapsto e^{-isz_0}\partial_1 f(t,s)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\partial_1 v(t,\cdot)| \leqslant |\partial_1 f(t,\cdot)|.$$

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la fonction $(t,s) \mapsto (1+s^2)\partial_1 f(t,s)$ est bornée, donc il existe une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $|\partial_1 v(t,\cdot)| \leqslant \varphi$, où $\varphi : s \mapsto \dfrac{\mathrm{C}}{1+s^2}$ est intégrable.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, $t \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} v(t,s)ds$ est donc de classe C^1, et sa dérivée est $t \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \partial_1 v(t,s)ds$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\partial_2\Gamma(f)(z_0,t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-isz_0}\partial_1 f(t,s)\\ &= \Gamma(\partial_1 f)(z_0,t),\end{aligned}$$

fonction bien définie car ∂_1 stabilise $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, donc $\partial_1 f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

En résumé, on a montré que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\partial_1\Gamma(f) = -i\Gamma(\mathrm{M}_2 f) \qquad \text{et} \qquad \partial_2\Gamma(f) = \Gamma(\partial_1 f).$$

Ces deux applications sont continues d'après la question précédente, donc $\Gamma(f) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

(1.c) Si $\alpha = (n,m)$, on note $|\alpha| = n+m$. Posons également, pour tout $\omega \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_w = \left\{\alpha \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, |\alpha| = w\right\}$. Pour tout $w \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{P}(w)$ l'assertion

$$\forall \alpha \in \mathrm{A}_w, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \exists g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) : \partial^\alpha\Gamma(f) = \Gamma(g).$$

Montrons $\forall w \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(w)$ par récurrence.

Initalisation. Soit $\alpha \in \mathrm{A}_1$. On a donc $\alpha = (1,0)$ ou $\alpha = (0,1)$. On a alors montré dans les deux cas à la question précédente $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \exists g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) : \partial^\alpha\Gamma(f) = \Gamma(g)$, ce qui démontre $\mathrm{P}(1)$.

Hérédité. Soit $w \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(w)$.

Soit $\alpha \in \mathrm{A}_{w+1}$. Soit $n,m \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha = (n,m)$. Notons qu'on ne peut pas avoir n et m simultanément nuls. On définit

$$\alpha' = \begin{cases}(n,m-1) & \text{si } m>0\\ (n-1,m) & \text{si } m=0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad k = \begin{cases}2 & \text{si } m>0\\ 1 & \text{si } m=0,\end{cases}$$

de telle sorte que $\partial^\alpha = \partial_k \circ \partial^{\alpha'}$ et $|\alpha'| = w$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

D'après $\mathrm{P}(w)$, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\partial^{\alpha'}\Gamma(f) = \Gamma(g)$.

Notamment d'après la question précédente, on a alors

$$\begin{aligned}\partial^\alpha\Gamma(f) &= \partial_k\partial^{\alpha'}\Gamma(f)\\ &= \partial_k\Gamma(g)\\ &= \Gamma(h),\end{aligned}$$

$$\text{où} \quad h = \begin{cases}-i\mathrm{M}_2 g & \text{si } k=1\\ \partial_1 g & \text{si } k=2,\end{cases}$$

est bien un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, car M_2 et ∂_1 stabilisent $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Cela montre $\mathrm{P}(w+1)$ et clôt la récurrence.

On montrerait exactement de la même façon que toutes les dérivées partielles $\partial_{k_1}\partial_{k_2}\cdots\partial_{k_w}\Gamma(f)$ existent et sont continues, ce qui montre $\Gamma(f)\in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(IV.2) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

— On a déjà, pour tous $z, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_2\Gamma(f)(z,t) &= t \int_{\mathbb{R}} e^{-isz} f(t,s)\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-isz}\, t\, f(t,s)\, ds \\ &= \Gamma(\mathrm{M}_1(f))(z,t). \end{aligned}$$

— En outre, pour tous $z, t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{M}_1\Gamma(f)(z,t) = z \int_{\mathbb{R}} e^{-isz} f(t,s)\, ds.$$

La fonction $u : s \mapsto i\, e^{-isz} f(t,s)$ est à croissance rapide, donc $s \mapsto s^2 u(s)$ est bornée, ce qui entraîne *a fortiori* $u(s) \xrightarrow[s\to\pm\infty]{} 0$.

Il s'ensuit que l'on peut effectuer une intégration par parties (toutes les fonctions en présence étant lisses) :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1\Gamma(f)(z,t) &= \int_{\mathbb{R}} z\, e^{-isz} f(t,s)\, ds \\ &= -\int_{\mathbb{R}} i\, e^{-isz}\, \partial_2 f(t,s)\, ds \\ &= -i\Gamma(\partial_2 f)(s,t). \end{aligned}$$

En rassemblant ces calculs avec ceux de la question **(IV.1.b)**, on obtient

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \begin{cases} \partial_1\Gamma(f) = -i\Gamma(\mathrm{M}_2 f) \\ \partial_2\Gamma(f) = \quad \Gamma(\partial_1 f) \\ \mathrm{M}_1\Gamma(f) = -i\Gamma(\partial_2 f) \\ \mathrm{M}_2\Gamma(f) = \quad \Gamma(\mathrm{M}_1 f). \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

D'après la question précédente, Γ peut être vue comme une application (évidemment linéaire) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Les relations ($\spadesuit$) et la stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ par ∂_1, ∂_2, M_1 et M_2 entraînent que $\operatorname{im}\Gamma$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ stable par ces quatre endomorphismes.

Il reste à montrer $\operatorname{im}\Gamma \subseteq \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Comme on l'a déjà utilisé à maintes reprises, $u(t,s) \mapsto (1+s^2) f(t,s)$ est bornée. Si C est une constante telle que $|u| \leqslant \mathrm{C}$, on obtient, pour tous $z, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\Gamma(f)(z,t)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t,s)|\, ds \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{C}}{1+s^2}\, ds \\ &\leqslant \mathrm{C}\pi, \end{aligned}$$

donc $\Gamma(f) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

En appliquant la question **(II.4)**, on obtient donc $\operatorname{im}\Gamma \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, comme demandé.

(3) Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. La fonction e_ξ est évidemment bornée, donc à croissance lente.

Par ailleurs, il s'agit d'une fonction lisse, et on a $\partial_1 e_\xi = -i\xi_1 e_\xi$ et $\partial_2 e_\xi = -i\xi_2 e_\xi$. Ainsi, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$, la fonction e_ξ est un vecteur propre de ∂^α, donc $\partial^\alpha e_\xi$ est encore à croissance lente.

Cela montre $e_\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, et la question **(II.5)** conclut.

(4) Déjà, la question précédente entraîne en particulier que $e_\xi f$ est intégrable, donc que $\widehat{f}$ est définie.

Soit $p, q \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
(\Gamma \circ \Gamma)(f)(p,q) &= \Gamma(\Gamma(f))(p,q) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-itp}\Gamma(f)(q,t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-itp}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iqs} f(t,s)\,ds\right)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itp} e^{-iqs} f(t,s)\,ds\right)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i((p,q)|\cdot)} f \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e_{(p,q)} f \\
&= \widehat{f}(p,q).
\end{aligned}$$

Comme Γ stabilise $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, il en va de même de Γ^2, donc $\widehat{f} = \Gamma^2(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

(5) On définit

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \quad f \quad \mapsto \quad \widehat{f} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \quad f \quad \mapsto \quad \check{f}. \end{cases}$$

L'application $\mathcal{F}$ est bien définie d'après la question précédente, et S l'est immédiatement. On montre immédiatement qu'il s'agit de deux endomorphismes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, S étant même une symétrie vectorielle.

Les relations admises se traduisent en

$$\forall k \in \{1,2\}, (\partial_k \circ \mathcal{F} = -i\,\mathcal{F} \circ \mathrm{M}_k \text{ et } \mathrm{M}_k \circ \mathcal{F} = -i\,\mathcal{F} \circ \partial_k).$$

Par ailleurs, on voit clairement que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et tout $k \in \{1,2\}$, on a $\partial_k \mathrm{S}(f) = -\mathrm{S}(\partial_k f)$ et $\mathrm{M}_k \mathrm{S}(f) = -\mathrm{S}(\mathrm{M}_k f)$, c'est-à-dire que l'on a les relations

$$\forall k \in \{1,2\}, (\partial_k \circ \mathrm{S} = -\mathrm{S} \circ \partial_k \text{ et } \mathrm{M}_k \circ \mathrm{S} = -\mathrm{S} \circ \mathrm{M}_k).$$

On voit alors, pour tout $k \in \{1,2\}$ que

$$\begin{aligned}
\partial_k \circ \mathrm{S} \circ \mathcal{F}^2 &= -\mathrm{S} \circ \partial_k \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \\
&= i\,\mathrm{S} \circ \mathcal{F} \circ \mathrm{M}_k \circ \mathcal{F} \\
&= \mathrm{S} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \partial_k,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathrm{S} \circ \mathcal{F}^2$ commute à ∂_k. On montre de la même façon que $\mathrm{S} \circ \mathcal{F}^2$ commute à M_k.

D'après la **partie III**, on obtient donc une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que

$$\mathrm{S} \circ \mathcal{F}^2 = \alpha\,\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)},$$

c'est-à-dire, en composant par $\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}$,

$$\mathcal{F}^2 = \alpha \mathrm{S},$$

ce qui est le résultat demandé.

(6.a) Comme une fonction à décroissance rapide est à croissance lente, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. La question **(II.5)** entraîne ainsi notamment que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est stable par produit et qu'un produit de fonctions toutes dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, avec l'une au moins dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, ce qui permet de justifier l'intégrabilité des fonctions et d'utiliser le théorème de Fubini. On a donc

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(g^\star)^\star f &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(g^\star)^\star(a,b) f(a,b)\, db\, da \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(g^\star)(b,a) f(a,b)\, db\, da \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ibc}\, g^\star(a,c)\, dc \right) f(a,b)\, db\, da \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ibc}\, g(c,a) f(a,b)\, dc\, db\, da \\
\text{et} \int_{\mathbb{R}^2} g\, \Gamma(f) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(z,t) \Gamma(f)(z,t)\, dt\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(z,t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-isz} f(t,s)\, ds \right) dt\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isz}\, g(z,t) f(t,s)\, ds\, dt\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isz}\, g(z,t) f(t,s)\, dz\, ds\, dt,
\end{aligned}$$

en appliquant plusieurs fois le théorème de Fubini. Cela montre que ces deux intégrales sont les mêmes.

(6.b) On va commencer par montrer que les endomorphismes

$$\mathrm{T} : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \quad g \quad\ \mapsto \quad g^\star \end{cases}$$

et $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ commutent.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F} \circ \mathrm{T})(f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} f^\star e_\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^\star(x,y) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)}\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y,x) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)}\, dy\, dx && \text{(Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f\, e_{(\xi_2,\xi_1)} \\
&= \widehat{f}(\xi_2, \xi_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\widehat{f}\right)^{\star}(\xi) \\
&= (\mathrm{T}\circ\mathcal{F})(f)(\xi).
\end{aligned}
$$

Cela montre $\mathcal{F}\circ\mathrm{T} = \mathrm{T}\circ\mathcal{F}$.

Remarquons également que la question précédente se traduit sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\,\Gamma(f) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{T}\circ\Gamma\circ\mathrm{T})(g)\,f.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} g\,\widehat{f} &= \int_{\mathbb{R}^2} g\,\Gamma^2(f) && \text{(d'après \textbf{(IV.4)})} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{T}\circ\Gamma\circ\mathrm{T})(g)\,\Gamma(f) && \text{(d'après \textbf{(IV.6.a)})} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{T}\circ\Gamma\circ\mathrm{T})^2(g)\,f && \text{(d'après \textbf{(IV.6.a)})} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{T}\circ\Gamma^2\circ\mathrm{T})(g)\,f && (\text{car } \mathrm{T}^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{T}^2\circ\mathcal{F})(g)\,f && (\text{car } \Gamma^2 = \mathcal{F} \text{ commute à T}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(g)\,f, && (\text{car } \mathrm{T}^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)})
\end{aligned}
$$

ce qui est bien le résultat souhaité.

(7) Introduisons

$$\mathrm{C} : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \quad f \quad \mapsto \quad \overline{f}, \end{cases}$$

qui est clairement une symétrie vectorielle.

Il est clair que C et S commutent.

Par ailleurs, pour tout ξ, on a $\overline{e_\xi} = e_{-\xi}$, ce qui montre que, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^2} f\,e_\xi} = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{f}\,e_{-\xi} = \widehat{\overline{f}}(-\xi),$$

c'est-à-dire que $\mathrm{C}\circ\mathcal{F} = \mathrm{S}\circ\mathcal{F}\circ\mathrm{C}$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\circ\mathrm{C}\circ\mathcal{F} &= \mathrm{S}\circ\mathrm{S}\circ\mathcal{F}\circ\mathrm{C}\circ\mathcal{F} \\
&= \mathrm{S}\circ\mathrm{C}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F} \\
&= \alpha\,\mathrm{S}\circ\mathrm{C}\circ\mathrm{S} && \text{(d'après \textbf{(IV.5)})} \\
&= \alpha\,\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

car S et C commutent et $\mathrm{S}^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)}$.

Ainsi, quels que soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}} = \int_{\mathbb{R}^2} f\,(\mathcal{F}\circ\mathrm{C}\circ\mathcal{F})(g) \qquad \text{(d'après \textbf{(IV.6.b)})}$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}^2} f\,\overline{g}$$

d'après ce qui précède.

En appliquant la formule à $f = g$, on obtient

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}|^2 = \alpha \int_{\mathbb{R}^2} |f|^2.$$

On va appliquer la formule à $\gamma \otimes \gamma$, qui est > 0 donc d'intégrale > 0 : on obtient ainsi

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{\gamma \otimes \gamma}\right|^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \left|\gamma \otimes \gamma\right|^2} \in \mathbb{R}_+.$$

En outre, si α était nul, on aurait $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}(f)|^2 = 0$, donc $\mathcal{F} = 0$. C'est absurde, car

$$\widehat{\gamma \otimes \gamma}(0) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2 - t^2}\, ds\, dt > 0.$$

On a donc bien $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

V. Structure préhilbertienne sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$

(1.a) On convient de noter $\mathrm{H} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

Notons, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, $c_\xi = \mathrm{Ré}\, e_\xi : x \mapsto \cos(x|\xi)$ et $s_\xi = -\mathrm{Im}\, e_\xi : x \mapsto \sin(x|\xi)$.

On a donc $c_\xi = \dfrac{e_\xi + \overline{e_\xi}}{2} = \dfrac{e_\xi + e_{-\xi}}{2}$ et $s_\xi = \dfrac{-e_\xi + e_{-\xi}}{2}$, ce qui montre que $c_\xi, s_\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

On attaque maintenant les différents points de la question.

— Déjà, le fait que $\theta \in \mathrm{H}$ et $c_\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ entraîne d'après la question **(II.5)** que le produit $\theta\, c_\xi$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et donc à H car il est réel. En particulier, les fonctions $f_n\, \theta\, c_\xi$ sont intégrables et leur intégrale peut s'interpréter comme le produit scalaire $\left\langle f_n \middle| \theta\, c_\xi \right\rangle$. Il en va de même pour la fonction s_ξ.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^2$. On a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta f_n}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \theta\, f_n\, e_\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \theta\, f_n\, c_\xi - i \int_{\mathbb{R}^2} \theta\, f_n\, s_\xi \\
&= \left\langle f_n \middle| \theta\, c_\xi \right\rangle - i \left\langle f_n \middle| \theta\, s_\xi \right\rangle.
\end{aligned}$$

La convergence faible $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ entraîne alors $\left\langle f_n \middle| \theta\, c_\xi \right\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left\langle f_n \middle| \theta\, s_\xi \right\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\widehat{\theta f_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui est bien la convergence simple de la suite de fonctions $\left(\widehat{\theta f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

— Pour la même raison qu'au point précédent, $\theta\, e_\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$. En particulier ($f_n$ et) $\theta\, e_\xi$ appartiennent à $\mathrm{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2)$, donc on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz complexe pour obtenir, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\theta f_n}(\xi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} f_n\, \theta\, e_\xi\right| \\ &\leqslant \|f_n\|_2 \|\theta\, e_\xi\|_2 \\ &\leqslant \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2\right) \|\theta\, e_\xi\|_2,\end{aligned}$$

la borne supérieure étant bien définie car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée bornée.
On a donc bien montré

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \xi\in\mathbb{R}^2}} \left|\widehat{\theta f_n}(\xi)\right| \leqslant \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2\right) \|\theta\, e_\xi\|_2 < +\infty.$$

— Naturellement, les deux points précédents se transposent sans difficulté à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1.b) Comme K est compact, on peut trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{K} \subseteq [-\mathrm{N}, \mathrm{N}]^2$. On pose alors $\theta = \theta_{\mathrm{N}}$.

Comme $\theta_{|[-\mathrm{N},\mathrm{N}]^2} = 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \theta g_n$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n = \theta g_n$ (qui n'est donc rien d'autre que g_n) et $\varphi_n = \theta f_n$.

Toujours à cause de la question **(II.5)**, les fonctions φ_n et ψ_n appartiennent à H, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, on a par ailleurs convergence simple vers 0 de la suite $(\widehat{\varphi_n})_n$ tout en ayant $\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \xi\in\mathbb{R}^2}} |\widehat{\varphi_n}(\xi)| < +\infty$, et *idem* pour la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ensuite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\langle f_n | g_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} f_n\, g_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f_n\, g_n\, \theta^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n\, \psi_n \\ &= \langle \varphi_n | \psi_n \rangle,\end{aligned}$$

car $\theta(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $g_n(x) \neq 0$.

Enfin, on a, pour tout $k \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned}\partial_k \varphi_n &= \partial_k(\theta f_n) \\ &= \partial_k(\theta) f_n + \theta\, \partial_k(f_n), \\ \text{donc}\quad \|\partial_k \varphi_n\|_2 &\leqslant \|\partial_k(\theta) f_n\|_2 + \|\theta\, \partial_k(f_n)\|_2 \\ &\leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_k(\theta))^2 f_n^2} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \theta\, (\partial_k f_n)^2} \\ &\leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} f_n^2} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_k f_n)^2} && \text{car } |\partial_k(\theta)|, |\theta| \leqslant 1 \\ &\leqslant \|f_n\|_2 + \|\partial_k f_n\|_2,\end{aligned}$$

et *idem* pour la suite (ψ_n), ce qui donne entre autres les inégalités demandées par l'énoncé.

(1.c) Commençons par démontrer l'indication (notons que les valeurs absolues entourant $1-\theta_{\mathrm{N}}$ sont inutiles, car θ_{N} est à valeurs dans $[0,1]$). Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. On distingue deux cas :

— Si $|x_1|+|x_2|\leqslant \mathrm{N}$, on a $|x_1|,|x_2|\leqslant \mathrm{N}$, donc $(x_1,x_2)\in[-\mathrm{N},\mathrm{N}]^2$, donc $1-\theta_{\mathrm{N}}(x_1,x_2)=0$ et l'inégalité est évidente.

— Si $|x_1|+|x_2|\geqslant \mathrm{N}$, on a $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{\mathrm{N}}\geqslant 1$, et l'inégalité est évidente car $1-\theta_{\mathrm{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$.

On utilise la question précédente, en introduisant des suites de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant toutes les propriétés de l'énoncé. En particulier, le fait que $(\partial_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_2 g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient bornées entraîne que $(\partial_1\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_2\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont également.

On traite maintenant la question, en utilisant θ_{N} « dans le domaine de Fourier ». Plus précisément, on a, pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ (en notant que les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont formées de fonctions à valeurs réelles)

$$\begin{aligned}
\langle f_n|g_n\rangle &= \langle\varphi_n|\psi_n\rangle && \text{(d'après } \textbf{(V.1.b)}\text{)}\\
&= \left\langle\widehat{\varphi_n}\middle|\widehat{\psi_n}\right\rangle && \text{(d'après } \textbf{(IV.7)}\text{)}\\
&= \mathrm{Ré}\int_{\mathbb{R}^2}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\\
&= \mathrm{Ré}\int_{\mathbb{R}^2}\theta_{\mathrm{N}}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}+\mathrm{Ré}\int_{\mathbb{R}^2}(1-\theta_{\mathrm{N}})\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n},
\end{aligned}$$

l'intégrabilité des deux intégrandes ne posant pas de difficulté, car $|\theta_{\mathrm{N}}|,|1-\theta_{\mathrm{N}}|\leqslant 1$.

On va majorer séparément les deux termes de cette somme.

— On utilise le réel $\mathrm{C}=\max\left(\sup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \xi\in\mathbb{R}^2}}|\widehat{\varphi_n}(\xi)|,\sup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \xi\in\mathbb{R}^2}}\left|\widehat{\psi_n}(\xi)\right|\right)$, bien défini en vertu de la question **(V.1.b)**. On a alors

$$\left|\theta_{\mathrm{N}}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right|\leqslant \mathrm{C}^2\,\theta_{\mathrm{N}}.$$

- Par stabilité par produit de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la suite $\left(\theta_{\mathrm{N}}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$;
- la suite $\left(\theta_{\mathrm{N}}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^2$;
- on a $\forall n\in\mathbb{N}, \left|\theta_{\mathrm{N}}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right|\leqslant \mathrm{C}^2\theta_{\mathrm{N}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

D'après le théorème de convergence dominée **(II.6)**, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^2}\theta_{\mathrm{N}}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\qquad\text{donc}\qquad \mathrm{Ré}\int_{\mathbb{R}^2}\theta_{\mathrm{N}}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

(Notons notamment que cette convergence est valable quelle que soit la valeur de N.)

— Pour majorer le deuxième terme, on va utiliser le fait que si $u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, alors les valeurs absolues $\mathrm{U}=|u|$ et $\mathrm{V}=|v|$ sont à décroissance rapide, donc, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnée par l'énoncé

$$\int_{\mathbb{R}^2}|u|\,|v|\leqslant ||\mathrm{U}||_2\,||\mathrm{V}||_2=||u||_2\,||v||_2.$$

On utilise alors l'indication démontrée pour obtenir la majoration

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^2}(1-\theta_{\mathrm{N}})\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^2}\frac{|x_1|+|x_2|}{\mathrm{N}}\,|\widehat{\varphi_n}|\,\left|\widehat{\psi_n}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|x_1|\,|\widehat{\varphi_n}|\,\left|\widehat{\psi_n}\right| + \int_{\mathbb{R}^2}|x_2|\,|\widehat{\varphi_n}|\,\left|\widehat{\psi_n}\right|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\mathrm{M}_1\widehat{\varphi_n}|\,\left|\widehat{\psi_n}\right| + \int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{\varphi_n}|\,\left|\mathrm{M}_2\widehat{\psi_n}\right|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|\widehat{\partial_1\varphi_n}\right|\,\left|\widehat{\psi_n}\right| + \int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{\varphi_n}|\,\left|\widehat{\partial_2\psi_n}\right|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\left\|\widehat{\partial_1\varphi_n}\right\|_2\,\left\|\widehat{\psi_n}\right\|_2 + \|\widehat{\varphi_n}\|_2\,\left\|\widehat{\partial_2\psi_n}\right\|_2\right)
\end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme que l'on vient d'expliquer, qu'il est ici loisible d'appliquer car $\partial_1\varphi_n$ et $\partial_2\psi_n$ étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ par les propriétés de stabilité, il en va de même de leurs transformées de Fourier.

Or, la question **(IV.7)** entraîne en particulier $\forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \|h\|_2 = \left\|\widehat{h}\right\|_2$. On va l'appliquer ici et utiliser que les suites de fonctions en présence sont toutes bornées. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^2}(1-\theta_{\mathrm{N}})\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right| &\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\|\partial_1\varphi_n\|_2\,\|\psi_n\|_2 + \|\varphi_n\|_2\,\|\partial_2\psi_n\|_2\right) \\
&\leqslant \frac{2}{\mathrm{N}}\left(\max\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\varphi_n\|_2, \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\psi_n\|_2, \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\partial_1\varphi_n\|_2, \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\partial_2\psi_n\|_2\right)\right)^2 \\
&\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On peut maintenant conclure. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après le calcul que l'on vient de mener, on peut trouver $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}(1-\theta_{\mathrm{N}_0})\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\theta_{\mathrm{N}_0}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
|\langle f_n|g_n\rangle| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^2}\theta_{\mathrm{N}_0}\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^2}(1-\theta_{\mathrm{N}_0})\overline{\widehat{\varphi_n}}\,\widehat{\psi_n}\right| \\
&\leqslant \underset{n\to+\infty}{o}(1) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

est $\leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang, ce qui conclut.

(2) Soit h la limite faible de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bien définie d'après la question **(I.1)**. Posons

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (h_n - h)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On va montrer que ces fonctions vérifient les hypothèses de la question précédente.

— Il est déjà clair que $f_n = g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

— D'après l'inégalité triangulaire, le fait que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée entraîne que $(h_n - h)_{n\in\mathbb{N}}$ le soit. Il en va de même de $(\partial_k h_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\partial_k h_n - \partial_k h)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $k \in \{1,2\}$.

— Il reste à montrer que la limite faible h est à support dans K. Par combinaison linéaire, il en sera alors de même de toutes les fonctions de la suite $(h_n - h)_{n\in\mathbb{N}}$.
Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas : on peut trouver $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{K}$ tel que $h(z_0) \neq 0$. Comme h est à valeurs réelles, on peut supposer pour simplifier $h(z_0) > 0$. On munit une fois pour toutes $\mathbb{R}^2$ de la distance d induite par la norme ℓ^∞.
Par continuité de $h \in \mathrm{H}$, on peut trouver $\mathrm{R}_1 > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, d(z, z_0) \leqslant 3\mathrm{R}_1 \Rightarrow h(z) \geqslant \frac{1}{2} h(z_0). \qquad (\heartsuit)$$

Par ailleurs, le complémentaire de K étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on peut alors également trouver $\mathrm{R}_2 > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, d(z, z_0) \leqslant 3\mathrm{R}_2 \Rightarrow z \notin \mathrm{K}. \qquad (\diamondsuit)$$

Soit $\mathrm{R} = \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$. On définit la fonction

$$b : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \theta_1\Big(\dfrac{z - z_0}{\mathrm{R}}\Big). \end{cases}$$

Comme $\theta_1 \in \mathrm{H}$, on en déduit facilement que $b \in \mathrm{H}$. Par ailleurs, d'après ($\heartsuit$), on a

$$\begin{aligned} \langle h | b \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} h\, b \\ &= \int_{x_0 - 3\mathrm{R}}^{x_0 + 3\mathrm{R}} \int_{y_0 - 3\mathrm{R}}^{y_0 + 3\mathrm{R}} \underbrace{h(x,y)\, \theta_1\Big(\frac{x - x_0}{\mathrm{R}}, \frac{y - y_0}{\mathrm{R}}\Big)}_{\geqslant 0} dx\, dy \\ &\geqslant \int_{x_0 - \mathrm{R}}^{x_0 + \mathrm{R}} \int_{y_0 - \mathrm{R}}^{y_0 + \mathrm{R}} \underbrace{h(x,y)}_{\geqslant \frac{1}{2} h(x_0)} \underbrace{\theta_1\Big(\frac{x - x_0}{\mathrm{R}}, \frac{y - y_0}{\mathrm{R}}\Big)}_{=1} dx\, dy \\ &\geqslant 2h(x_0)\mathrm{R}^2 > 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\langle h_n | b \rangle = 0$ car, d'après ($\diamondsuit$), le support de b est disjoint de K et donc de celui de h_n.
Cela contredit $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} h$, car on ne peut pas avoir $0 = \langle h_n | b \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle h | b \rangle > 0$.

D'après la question précédente, on en déduit $\langle f_n | g_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire

$$\|h_n - h\|_2^2 = \langle h_n - h | h_n - h \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui démontre exactement $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} h$ et achève la preuve du théorème de Rellich.

(3) Dans cette question, on identifie un élément $(u_1, u_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$ à une fonction (ou un champ de vecteurs)

$$\mathrm{U} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ \xi \mapsto \begin{pmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Une telle fonction possède une transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{U}} = (\widehat{u_1}, \widehat{u_2}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$.

Introduisons $\mathrm{E}_{/\!/} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{E}_\perp : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ les champs de vecteurs radial et tangentiel.

Notons que, $\mathrm{E}_{/\!/}, \mathrm{E}_\perp \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)^2$, que quel que soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(\mathrm{E}_{/\!/}(x), \mathrm{E}_\perp(x))$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \left|\mathrm{E}_{/\!/}(x)\right| = |\mathrm{E}_\perp(x)| = |x|.$$

On peut ainsi écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathrm{U}(x) = \frac{1}{|x|}\big(\mathrm{U}_{/\!/}(x)\mathrm{E}_{/\!/}(x) + \mathrm{U}_\perp(x)\mathrm{E}_\perp(x)\big),$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{/\!/} &= \mathrm{E}_{/\!/} \cdot \mathrm{U} : x \mapsto u_1(x)x_1 + u_2(x)x_2 \\ \mathrm{U}_\perp &= \mathrm{E}_\perp \cdot \mathrm{U} : x \mapsto u_1(x)x_2 - u_2(x)x_1. \end{aligned}$$

(On a noté $\cdot$ la forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $((z_1, z_2), (w_1, w_2)) \mapsto \overline{z}_1 w_1 + \overline{z}_2 w_2$ sur $\mathbb{C}^2$. On étendra la notation $|\cdot|$ à $\mathbb{C}^2$ en posant $|z| = \sqrt{z \cdot z}$.)

Puisque $\mathrm{E}_{/\!/}, \mathrm{E}_\perp \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)^2$, on montre en utilisant la question **(II.5)** que $\mathrm{U}_{/\!/}, \mathrm{U}_\perp \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Si $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$, on a également l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{V}(x) = \frac{\overline{\mathrm{U}_{/\!/}(x)}\mathrm{V}_{/\!/}(x) + \overline{\mathrm{U}_\perp(x)}\mathrm{V}_\perp(x)}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{$\clubsuit$}$$

Attaquons maintenant la question, en commençant par le cas $\mathrm{F} = \mathrm{G} = 0$. Si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_n = (f_{1(n)}, f_{2(n)})$ et ainsi de suite, l'hypothèse $\mathrm{F}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ signifie simplement $f_{1(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $f_{2(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On commence par faire un travail analogue à celui de la question **(V.1.b)**.En prenant un N_0 suffisamment grand pour que $\mathrm{K} \subseteq [-\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_0]^2$ et en notant $\theta = \theta_{\mathrm{N}_0}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta \mathrm{G}_n = \mathrm{G}_n$ (mais nous allons également noter cette fonction Ψ_n) et on définit $\Phi_n = \theta \mathrm{F}_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathrm{G}_n = \psi_n$ est à support dans $[-\mathrm{N}, \mathrm{N}]^2$, on a $\langle\!\langle \mathrm{F}_n | \mathrm{G}_n \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \Phi_n | \Psi_n \rangle\!\rangle$.

Les suites de fonctions $(\varphi_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (\theta f_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (\theta g_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient alors les hypothèses de la question **(V.1.a)** donc on a bien

- convergence simple des $\left(\widehat{\varphi_{i(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0, c'est-à-dire convergence simple de $\left(\widehat{\Phi_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0, et idem pour $\left(\widehat{\Psi_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$;
- des bornes uniformes $\sup\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \xi \in \mathbb{R}^2}} \left|\widehat{\varphi_{i(n)}}(\xi)\right| < +\infty$, qui se traduisent en une borne uniforme

  $$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \xi \in \mathbb{R}^2}} \left|\widehat{\Phi_n}(\xi)\right| < +\infty,$$

  et idem pour $\left(\widehat{\Psi_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

En continuant à noter $\|\cdot\|_2$ la norme adaptée au produit scalaire $\langle\!\langle \cdot | \cdot \rangle\!\rangle$, on a enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{div}(\Phi_n) = \operatorname{div}(\theta \mathrm{F}_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_1\theta\, f_{1(n)} + \theta\,\partial_1 f_{1(n)} + \partial_2\theta\, f_{2(n)} + \theta\,\partial_2 f_{2(n)} \\
&= \partial_1\theta\, f_{1(n)} + \partial_2\theta\, f_{2(n)} + \theta\,\operatorname{div}(\mathrm{F}_n) \\
\text{donc}\, \|\operatorname{div}(\Phi_n)\|_2 &\leqslant \left\|f_{1(n)}\right\|_2 + \left\|f_{2(n)}\right\|_2 + \|\operatorname{div}\mathrm{F}_n\|_2 && (\text{car } |\theta|, |\partial_k\theta| \leqslant 1) \\
&\leqslant \sqrt{2}\sqrt{\left\|f_{1(n)}\right\|_2^2 + \left\|f_{2(n)}\right\|_2^2} + \|\operatorname{div}\mathrm{F}_n\|_2 && (\text{inég. de C.-S. dans } \mathbb{R}^2) \\
&\leqslant \sqrt{2}\,\|\mathrm{F}_n\|_2 + \|\operatorname{div}\mathrm{F}_n\|_2 .
\end{aligned}
$$

Cela montre que la suite de fonctions $(\operatorname{div}\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On montre de même que la suite de fonctions $(\operatorname{rot}\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, à l'aide de la formule

$$
\operatorname{rot}(\Psi_n) = \partial_2\theta\, g_{1(n)} - \partial_1\theta\, g_{2(n)} + \theta\,\operatorname{rot}(\mathrm{G}).
$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathrm{F}_n | \mathrm{G}_n \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle \Phi_n | \Psi_n \rangle\!\rangle \\
&= \left\langle \varphi_{1(n)} \middle| \psi_{1(n)} \right\rangle + \left\langle \varphi_{2(n)} \middle| \psi_{2(n)} \right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\varphi_{1(n)}} \middle| \widehat{\psi_{1(n)}} \right\rangle + \left\langle \widehat{\varphi_{2(n)}} \middle| \widehat{\psi_{2(n)}} \right\rangle && (\text{d'après } \textbf{(IV.7)}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\widehat{\varphi_{1(n)}}}\,\widehat{\psi_{1(n)}} + \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\widehat{\varphi_{2(n)}}}\,\widehat{\psi_{2(n)}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\Phi_n} \cdot \widehat{\Psi_n}.
\end{aligned}
$$

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On peut décomposer le produit scalaire en trois contributions

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathrm{F}_n | \mathrm{G}_n \rangle\!\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\Phi_n} \cdot \widehat{\Psi_n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \theta_{\mathrm{N}} \widehat{\Phi_n} \cdot \widehat{\Psi_n} + \int_{\mathbb{R}^2} (1-\theta_{\mathrm{N}}) \widehat{\Phi_n} \cdot \widehat{\Psi_n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \theta_{\mathrm{N}} \widehat{\Phi_n} \cdot \widehat{\Psi_n} + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1-\theta_{\mathrm{N}})}{|\cdot|^2} \overline{\widehat{\Phi}_{n/\!/}} \cdot \widehat{\Psi}_{n/\!/} + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1-\theta_{\mathrm{N}})}{|\cdot|^2} \overline{\widehat{\Phi}_{n\perp}} \cdot \widehat{\Psi}_{n\perp}, && (\text{d'après } (\clubsuit))
\end{aligned}
$$

la dernière écriture étant licite car, la fonction $1-\theta_{\mathrm{N}}$ étant nulle au voisinage de 0, le quotient $\dfrac{1-\theta_{\mathrm{N}}}{|\cdot|^2}$ est bien défini même si le dénominateur s'annule.

Par ailleurs, toutes les intégrandes sont bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, car une disjonction de cas montre immédiatement

$$
\frac{1-\theta_{\mathrm{N}}}{|\cdot|^2} \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}^2},
$$

donc les deux dernières intégrandes sont dominées par le produit de deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, à nouveau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et donc intégrable

— Le fait que les suites de fonctions $\left(\widehat{\Phi_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\widehat{\Psi_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers 0 tout en restant uniformément bornées alors que le facteur θ_{N} est intégrable permet, comme à la question **(V.1.c)** d'appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$
\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}^2} \theta_{\mathrm{N}} \widehat{\Phi_n} \cdot \widehat{\Psi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
$$

— Pour analyser le deuxième terme, remarquons que, sur le support de $1-\theta_\mathrm{N}$ (donc notamment hors de 0), la quantité bien définie $\dfrac{\widehat{\Psi}_{n/\!/}}{|\cdot|}$ s'exprime comme la composante de $\widehat{\Psi}_n$ selon le vecteur unitaire proportionnel à $\mathrm{E}_{/\!/}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^2$

$$\forall z, w \in \mathbb{C}^2, |z \cdot w| \leqslant |z|\,|w|,$$

on en déduit l'inégalité

$$\left|\frac{\widehat{\Psi}_{n/\!/}}{|\cdot|}\right| \leqslant \left|\widehat{\Psi}_n\right|.$$

Comme par ailleurs $\left|\dfrac{1-\theta_\mathrm{N}}{|\cdot|}\right| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{N}}$, on en déduit notamment d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sous la forme déjà utilisée à la question **(V.1.c)**)

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1-\theta_\mathrm{N})}{|\cdot|^2}\overline{\widehat{\Phi}_{n/\!/}} \cdot \widehat{\Psi}_{n/\!/}\right| &\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\widehat{\Phi}_{n/\!/}\right|\left|\widehat{\Psi}_n\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\left\|\widehat{\Phi}_{n/\!/}\right\|_2\left\|\widehat{\Psi}_n\right\|_2.\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} &\widehat{\Phi}_{n/\!/}(\xi_1,\xi_2) = \xi_1\widehat{\varphi_{1(n)}} + \xi_2\widehat{\varphi_{2(n)}} \\ \text{donc}\quad &\widehat{\Phi}_{n/\!/} = \mathrm{M}_1\widehat{\varphi_{1(n)}} + \mathrm{M}_2\widehat{\varphi_{2(n)}} \\ &\qquad = -i\mathcal{F}\left(\partial_1\varphi_{1(n)}\right) + -i\mathcal{F}\left(\partial_2\varphi_{2(n)}\right) \\ &\qquad = -i\mathcal{F}\left(\partial_1\varphi_{1(n)} + \partial_2\varphi_{2(n)}\right) \\ &\qquad = -i\,\widehat{\operatorname{div}\Phi_n},\end{aligned}$$

donc d'après la question **(IV.7)**, on a

$$\left\|\widehat{\Phi}_{n/\!/}\right\|_2 = \|\operatorname{div}\Phi_n\|_2.$$

— On traite exactement de la même façon le troisième terme, en constatant l'égalité

$$\widehat{\Psi}_{n\perp} = -i\,\widehat{\operatorname{rot}\Psi_n} \qquad \text{donc} \qquad \left\|\widehat{\Psi}_{n\perp}\right\|_2 = \|\operatorname{rot}\Psi_n\|_2.$$

En résumé, d'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$|\langle\!\langle \mathrm{F}_n|\mathrm{G}_n\rangle\!\rangle| \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^2}\theta_\mathrm{N}\,\overline{\widehat{\Phi}_n} \cdot \widehat{\Psi}_n\right| + \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\|\operatorname{div}\Phi_n\|_2\,\|\Psi_n\|_2 + \|\Phi_n\|_2\,\|\operatorname{rot}\Psi_n\|_2\right).$$

Le terme entre parenthèses étant uniformément borné et le premier terme tendant vers 0 quand $n \to +\infty$ et ce, quel que soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on procède comme à la question **(V.1.c)** pour en déduire

$$\langle\!\langle \mathrm{F}_n|\mathrm{G}_n\rangle\!\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour conclure dans le cas général, c'est-à-dire sans supposer $\mathrm{F} = \mathrm{G} = 0$, il suffit de constater comme à la question **(V.2)** que les suites de fonctions $(\mathrm{F}_n - \mathrm{F})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{G}_n - \mathrm{G})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses de l'énoncé et de leur appliquer ce qui précède. Le seul point non trivial provient du fait que G est également à support dans K et il suffit pour cela d'appliquer la démonstration faite à la question **(V.2)** aux coordonnées $g_{1(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g_1$ et $g_{2(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g_2$.