Exemples de contraintes symplectiques linéaires

Pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, je noterai $\mathrm{M}_{i,j}$ le coefficient en position $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$.
Comme c'est l'usage, j'identifierai les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

I Préliminaires

Q 1. Je note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $i,j \in [\![1,n]\!]$. Comme $\mathrm{A}e_j$ est la $j-$ème colonne de A, on a

$$\mathrm{A}_{i,j} = e_i^\top \mathrm{A} e_j = e_i^\top \mathrm{B} e_j = \mathrm{B}_{i,j}$$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{A}=\mathrm{B}}$

Q 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé.
On a $\mathrm{M}x \neq 0$ car $x \neq 0$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi

$$0 < \|\mathrm{M}x\|^2 = \langle \mathrm{M}x, \mathrm{M}x\rangle = x^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{M} x = \lambda x^\top x = \lambda \|x\|^2$$

or $\|x\|^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \mathrm{M}^\top\mathrm{M} \text{ sont toutes strictement positives}}$$

On a $\mathrm{M}^\top\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right)^\top = \mathrm{M}^\top\left(\mathrm{M}^\top\right)^\top = \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$.
Le théorème spectral nous fournit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ diagonale réelle telles que

$$\mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \Omega^\top \Delta \Omega$$

où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ comptées avec multiplicité.
On vient de voir que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i > 0$.
On note alors $\delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ et $\mathrm{S} = \Omega^\top \delta \Omega = \Omega^{-1}\delta\Omega$.
De sorte que : $\delta^2 = \Delta$, $\mathrm{S}^\top = \mathrm{S}$ et $\mathrm{S}^2 = \Omega^\top \Delta \Omega$; d'où S est symétrique et S est semblable δ.
Ainsi $\boxed{\text{il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que } \mathrm{S}^2 = \mathrm{M}^\top\mathrm{M}}$

II Objets symplectiques

II.A - Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Q 3. Comme ω est une forme symplectique, alors ω est antisymétrique
donc $\forall x \in \mathrm{E},\ \omega(x,x) = -\omega(x,x)$.
donc $\boxed{\forall x \in \mathrm{E},\ \omega(x,x) = 0}$

Q 4. Soit $y \in \mathrm{E}$. Comme ω est une forme symplectique, alors ω est bilinéaire
donc l'application $\varphi_y : x \in \mathrm{E} \longmapsto \omega(x,y) \in \mathbb{R}$ est linéaire sur E.
On remarque que $\mathrm{F}^\omega = \bigcap\limits_{y\in\mathrm{F}} \mathrm{Ker}\,(\varphi_y)$
Par intersection $\boxed{\mathrm{F}^\omega \text{ est un sous-espace vectoriel de E}}$

Q 5. Soit $e \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Je pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e)$.
On a $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \omega(e,\lambda e) = \lambda\omega(e,e) = 0$ selon Q3
donc $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega(e,y) = 0$ d'où $e \in \mathrm{F}^\omega$.
Ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^\omega$ donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\omega = \mathrm{F} \neq \{0_\mathrm{E}\}$.
$\boxed{\text{Le sous-espace } \mathrm{F}^\omega \text{ n'est pas nécessairement en somme directe avec F}}$

Q 6. Soit x_1 et $x_2 \in \mathrm{E}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall y \in \mathrm{E},\ d_\omega(\lambda x_1 + x_2)(y) = \omega(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda\omega(x_1, y) + \omega(x_2, y) = (\lambda d_\omega(x_1) + d_\omega(x_2))(y)$$

d'où $d_\omega(\lambda x_1 + x_2) = \lambda d_\omega(x_1) + d_\omega(x_2)$
On a donc $d_\omega \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}))$.
Soit $x \in \operatorname{Ker}(d_\omega)$. On a donc $d_\omega(x) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})}$.
Ainsi $\forall y \in \mathrm{E},\ 0 = d_\omega(x)(y) = \omega(x, y)$.
donc $x = 0_\mathrm{E}$ car ω est non dégénéré.
L'autre inclusion étant évidente, on a $\operatorname{Ker}(d_\omega) = \{0_\mathrm{E}\}$.
Donc d_ω est une application linéaire injective de E vers $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$
or $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(\mathrm{E})$.
Par théorème de cours, $\boxed{d_\omega \text{ est un isomorphisme}}$

Q 7. Soit $m \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R})$.
Comme E est de dimension finie, cela nous fournit G un sous-espace tel que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$
Comme $(x \in \mathrm{G} \mapsto 0 \in \mathbb{R})$ est une forme linéaire sur G, alors par théorème de cours, on peut définir

$$\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \text{ tel que } \begin{cases} \forall x \in \mathrm{F},\ \ell(x) = m(x) \\ \forall x \in \mathrm{G},\ \ell(x) = 0 \end{cases}$$

On a alors $r_\mathrm{F}(\ell) = m$ d'où $\boxed{\text{l'application de restriction } r_\mathrm{F} \text{ est surjective}}$

Q 8. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a

$$x \in \operatorname{Ker}(r_\mathrm{F} \circ d_\omega) \iff r_\mathrm{F}(d_\omega(x)) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathbb{R})} \iff \forall y \in \mathrm{F},\ d_\omega(x)(y) = 0 \iff \forall y \in \mathrm{F},\ \omega(x, y) = 0$$

Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(r_\mathrm{F} \circ d_\omega) = \mathrm{F}^\omega}$
De plus par composition d'applications surjectives (Q7 et Q6), l'application $r_\mathrm{F} \circ d_\omega \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R}))$ est surjective. En utilisant le théorème du rang; on a alors

$$\dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F}^\omega) = \operatorname{rg}(r_\mathrm{F} \circ d_\omega) = \dim(\operatorname{Im}(r_\mathrm{F} \circ d_\omega)) = \dim(\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R})) = \dim(\mathrm{F})$$

On en déduit que $\boxed{\dim \mathrm{F}^\omega = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}}$

Q 9. $\Rightarrow$ On suppose que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F.
Soit $x \in \mathrm{F} \bigcap \mathrm{F}^\omega$. On a $\forall y \in \mathrm{F},\ 0 = \omega(x, y)$
donc $\forall y \in \mathrm{F},\ 0 = \omega_\mathrm{F}(x, y)$
Ainsi $x = 0_\mathrm{E}$ car ω_F est une forme symplectique sur F et donc non dégénérée.
On a établit que $\mathrm{F} \bigcap \mathrm{F}^\omega = \{0_\mathrm{E}\}$ (l'autre inclusion étant évidente).
De plus on a $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{F}^\omega) = \dim(\mathrm{E})$ selon Q8.
Ainsi $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}$, par caractérisation en dimension finie.

$\Leftarrow$ **:** On suppose que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}$.
La restriction ω_F de ω à F^2 est clairement bilinéaire et antisymétrique car ω l'est.
Soit $x \in \mathrm{F}$ tel que $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega_\mathrm{F}(x, y) = 0$.
On a alors $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega(x, y) = 0$
donc $x \in \mathrm{F}^\omega$ ainsi $x = 0_\mathrm{E}$ car $\mathrm{F} \bigcap \mathrm{F}^\omega = \{0_\mathrm{E}\}$.
On vient de montrer que

$$\{x \in \mathrm{F} \mid \forall y \in \mathrm{F},\ \omega_\mathrm{F}(x, y) = 0\} = \{0_\mathrm{E}\} = \{0_\mathrm{F}\}$$

l'autre inclusion est vraie car $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega_\mathrm{F}(0_\mathrm{E}, y) = \omega(0_\mathrm{E}, y) = 0$ car ω est bilinéaire
Ainsi ω_F est non dégénérée et il s'agit bien d'une forme symplectique sur F.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La restriction } \omega_\mathrm{F} \text{ de } \omega \text{ à } \mathrm{F}^2 \text{ définit une forme symplectique sur F si et seulement si } \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}}$$

II.B - Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

Q 10. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ avec les x_i et $y_j \in \mathbb{R}$.

On a alors par bilinéarité de ω :

$$\omega(x,y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \omega(e_i, e_j) y_j = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \omega(e_1, e_j) y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \omega(e_n, e_j) y_j \end{pmatrix}$$

Comme on a $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on peut alors conclure que : $\boxed{\omega(x,y) = \mathrm{X}^\top \Omega \mathrm{Y}}$

Q 11. • **inversible :** On suppose par l'absurde que Ω n'est pas inversible ce qui nous fournit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\Omega) \setminus \{0\}$.
Prenons $x \in \mathbb{R}^n$ tel que X est la colonne des coordonnées de X dans la base canonique.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$ ayant Y comme colonne de coordonnées. On a

$$\omega(x,y) = -\omega(y,x) = -\mathrm{Y}^\top \Omega \mathrm{X} = 0$$

Donc $x \in \{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{E},\ \omega(x,y) = 0\} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Ce qui est absurde car ω n'est pas dégénérée.
Donc $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

• **antysymétrique :** Soit X et $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On considère x et $y \in \mathbb{R}^n$ ayant X et Y comme colonnes de coordonnées.
On a : $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$.
donc $\mathrm{X}^\top \Omega \mathrm{Y} = -\mathrm{Y}^\top \Omega \mathrm{X}$ d'après Q10.
En remarquant que pour tout $z \in \mathbb{R}$, (identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$), on a $z^\top z$.
Ainsi $\mathrm{X}^\top \Omega \mathrm{Y} = \mathrm{X}^\top \left(-\Omega^\top\right) \mathrm{Y}$.
Comme c'est vrai pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\Omega = -\Omega^\top$, en utilisant Q1.

• On peut alors déduire que $\boxed{\Omega \text{ est antisymétrique et inversible}}$

Q 12. On utilise la question précédente :

$$\det(\Omega) = \det\left(-\Omega^\top\right) = (-1)^n \det(\Omega)$$

Comme $\det(\Omega) \neq 0$, on a alors $(-1)^n = 1$.
Ce qui permet de conclure que $\boxed{\text{l'entier } n \text{ est pair}}$

Q 13. Bilinéarité : La bilinéarité de b_s est conséquence de celle du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la linéarité de j.

Antisymétrie : Soit x et $y \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées respectives X et Y.
La colonne de coordonnées de $j(y)$ dans la base canonique est JY.
Comme cette base est orthonormée, on a $b_s(x,y) = \langle x, j(y) \rangle = \mathrm{X}^\top \mathrm{J} \mathrm{Y}$ d'où

$$b_s(y,x) = \mathrm{Y}^\top \mathrm{J} \mathrm{X} = \left(\mathrm{Y}^\top \mathrm{J} \mathrm{X}\right)^\top = \mathrm{X}^\top \mathrm{J}^\top \mathrm{Y} = -\mathrm{X}^\top \mathrm{J} \mathrm{Y} = -b_s(x,y)$$

b_s est bien antisymétrique.

Non dégénérescence : Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ b_s(x,y) = 0$.
On remarque que $\mathrm{rg}(\mathrm{J}) = 2m = n$ d'où $\mathrm{J} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $j \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.
On a alors $b_s\left(x, j^{-1}(x)\right) = 0$ or $j\left(j^{-1}(x)\right) = x$
donc $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$.
La réciproque étant évidente, on a $\{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{E},\ b_s(x,y) = 0\} = \{0\}$

• $\boxed{\text{l'application } b_s \text{ est bien une forme symplectique sur } \mathbb{R}^n}$

II.C - Endomorphismes et matrices symplectiques réels

Q 14. On suppose que $\lambda\mu \neq 1$. Soit $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ et $y \in \mathrm{E}_\mu(u)$.

On a $\omega\left(u(x), v(y)\right) = \lambda\mu\omega(x, y)$

donc $(1 - \lambda\mu)\,\omega(x, y) = 0$

Comme $1 - \lambda\mu \neq 0$, alors $\omega(x, y) = 0$

On conclut $\boxed{\text{les sous-espaces } \mathrm{E}_\lambda(u) \text{ et } \mathrm{E}_\mu(u) \text{ sont } \omega\text{-orthogonaux}}$

Q 15. **$\Leftarrow$:** On suppose que $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$.

Soit x et $y \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées X et Y. On a

$$b_s\left(u(x), u(y)\right) = \langle u(x), j\left(u(y)\right)\rangle = (\mathrm{MX})^\top \mathrm{JMY} = \mathrm{X}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{JMY} = \mathrm{X}^\top \mathrm{JY} = \langle x, j(y)\rangle = b_s\left(x, y\right)$$

Ainsi u est un endomorphisme symplectique.

$\Rightarrow$: On suppose que u est un endomorphisme symplectique.

Soit X et $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère x et $y \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées X et Y.

On a $b_s\left(u(x), u(y)\right) = b_s\left(x, y\right))$.

Par des calculs analogues à ci-dessus, on obtient : $\mathrm{X}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{JMY} = \mathrm{X}^\top \mathrm{JY}$

En utilisant Q1, on obtient $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$.

• : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard si et seulement si } \mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}}$

Q 16. $\underline{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$ **:** Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

On a $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$ donc $\det(\mathrm{J}) = \det\left(\mathrm{M}^\top\right)\det(\mathrm{J})\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{J})\det(\mathrm{M})^2$

On a déjà vu en Q13 que $\mathrm{J} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $\det(\mathrm{J}) \neq 0$

d'où $\det(\mathrm{M}) \neq 0$. Ainsi on a bien $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ce qui prouve $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (i).

$\underline{\mathrm{J} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})}$ **:** On remarque que $\mathrm{J}^\top = -\mathrm{J}$ et par calcul par blocs $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_n$.

On a donc $\mathrm{J}^\top \mathrm{J} \cdot \mathrm{J} = -\mathrm{J}\left(-\mathrm{I}_n\right) = \mathrm{J}$ donc on a bien $\mathrm{J} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Ceci prouve $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ (ii)

Stabilités : Soit M et $\mathrm{N} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

On a $\mathrm{MN}^\top \mathrm{JMN} = \mathrm{M}^\top \mathrm{N}^\top \mathrm{JNM} = \mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$ donc $\mathrm{MN} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. (iii)

On a $\left(\mathrm{M}^{-1}\right)^\top \mathrm{JM}^{-1} = \left(\mathrm{M}^\top\right)^{-1}\left(\mathrm{M}^\top \mathrm{JM}\right)\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{J}$ donc $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ (iv)

On a donc $\left(\left(\mathrm{M}^{-1}\right)^\top \mathrm{JM}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{J}^{-1}$

d'où $\mathrm{M}(-\mathrm{J})\mathrm{M}^\top = -\mathrm{J}$ puis $\left(\mathrm{M}^\top\right)^\top \mathrm{JM}^\top = \mathrm{J}$ et ainsi $\mathrm{M}^\top \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$

Sous-groupe : Avec (i), (ii), (iii) et (iv) : $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

• : $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\text{, stable par transposition et contenant la matrice J}}$

Q 17. Par calcul par blocs : $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^\top & \mathrm{C}^\top \\ \mathrm{B}^\top & \mathrm{D}^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{C} & -\mathrm{D} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}^\top \mathrm{A} - \mathrm{A}^\top \mathrm{C} & \mathrm{C}^\top \mathrm{B} - \mathrm{A}^\top \mathrm{D} \\ \mathrm{D}^\top \mathrm{A} - \mathrm{B}^\top \mathrm{C} & \mathrm{D}^\top \mathrm{B} - \mathrm{B}^\top \mathrm{D} \end{pmatrix}$. Puis

$$\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J} \iff \begin{cases} \mathrm{C}^\top \mathrm{A} - \mathrm{A}^\top \mathrm{C} = 0 \\ \mathrm{C}^\top \mathrm{B} - \mathrm{A}^\top \mathrm{D} = -\mathrm{I}_m \\ \mathrm{D}^\top \mathrm{A} - \mathrm{B}^\top \mathrm{C} = \mathrm{I}_m \\ \mathrm{D}^\top \mathrm{B} - \mathrm{B}^\top \mathrm{D} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{A}^\top \mathrm{C} = \left(\mathrm{A}^\top \mathrm{C}\right)^\top \\ \mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B} = \mathrm{I}_m \\ \left(\mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B}\right)^\top = \mathrm{I}_m^\top \\ \mathrm{B}^\top \mathrm{D} = \left(\mathrm{B}^\top \mathrm{D}\right)^\top \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \mathrm{A}^\top \mathrm{C} \text{ et } \mathrm{B}^\top \mathrm{D} \text{ sont symétriques et } \mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B} = \mathrm{I}_m.}$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

III.A - Le cas de la dimension 2

Q 18. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Comme $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathbb{R}$ (identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$), alors on a $\mathrm{A}^\top \mathrm{C}$ et $\mathrm{B}^\top \mathrm{D}$ sont symétriques.

On a alors $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B} = \mathrm{I}_m$ si et seulement si $\mathrm{AD} - \mathrm{CB} = \mathrm{I}$ ceci équivaut à $\det(\mathrm{M}) = 1$.

On a montré que $\boxed{\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$

III.B - Commutant de J

Q 19. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$.

On écrit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V}' \\ \mathrm{V} & \mathrm{U}' \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{U}', \mathrm{V}, \mathrm{V}' \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

On a $\mathrm{JM} = \begin{pmatrix} -\mathrm{V} & -\mathrm{U}' \\ \mathrm{U} & \mathrm{V}' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{MJ} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}' & -\mathrm{U} \\ \mathrm{U}' & -\mathrm{V} \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J} \iff \begin{cases} -\mathrm{V} = \mathrm{V}' \\ -\mathrm{U}' = -\mathrm{U} \\ \mathrm{U} = \mathrm{U}' \\ \mathrm{V}' = -\mathrm{V} \end{cases} \iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix}$$

On conclut que : $\boxed{\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J} \iff \exists (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix}}$

Q 20. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J}$. On écrit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ \mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -\mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} + \mathrm{iU} & \mathrm{U} - \mathrm{iV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -\mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} + \mathrm{iV} & -\mathrm{V} \\ 0 & \mathrm{U} - \mathrm{iV} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ \mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -\mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{U} + \mathrm{iV} & -\mathrm{V} \\ 0 & \mathrm{U} - \mathrm{iV} \end{pmatrix}$$

Par calcul par blocs, on a : $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{I}_m)^4 \det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{U} + \mathrm{iV}) \det(\mathrm{U} - \mathrm{iV})$

Les coefficients de la matrice $\mathrm{U} - \mathrm{iV}$ sont conjugués de ceux de $\mathrm{U} + \mathrm{iV}$.

Comme la conjugaison est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$, alors $\det(\mathrm{U} - \mathrm{iV}) = \overline{\det(\mathrm{U} + \mathrm{iV})}$.

Ainsi $\boxed{\det(\mathrm{M}) = |\det(\mathrm{U} + \mathrm{iV})|^2 \geqslant 0}$

III.C - Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

Q 21. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}^2 = 1$ donc $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ |\mathrm{M}_{i,j}| \leqslant 1$.

Ceci prouve que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, le produit matriciel est bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et la transposition est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ces applications sont donc continues.

Ainsi $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{\mathrm{I}_n\}$ est fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'où $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n\right\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

D'où $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé-borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

On montre de manière analogue $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{JM} - \mathrm{MJ}$.

d'où $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif du compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Ainsi $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

On sait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ et c'est le cas pour $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ selon Q16.

donc $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, par intersection.

Comme $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, alors $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact du groupe symplectique } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})}$

Q 22. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_\mathrm{J}$. On a $\mathrm{M}^\top\mathrm{JM} = \mathrm{J}$ et $\mathrm{MM}^\top = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{MJ} = \mathrm{MM}^\top\mathrm{JM} = \mathrm{JM}$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_\mathrm{J}}$

Q 23. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$. On a $\det(\mathrm{M}) \geqslant 0$ selon Q20 et $\det(\mathrm{M}) \in \{-1, 1\}$. Ainsi $\boxed{\det(\mathrm{M}) = 1}$

Q 24. Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S. Comme la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, le théorème spectral nous fournit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de s.

Je note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées qui sont toutes dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$. Je cherche à établir que

$$b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)\right) = b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right)$$

Premier cas : on suppose que $i = j$.

Comme $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un groupe stable par transposition, on a $\mathrm{S}^2 = \mathrm{M}^\top\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi s^2 est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Comme $s^2(\varepsilon_i) = \lambda_i^2\varepsilon_i$, on a alors $b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_i\right) = b_s\left(s^2(\varepsilon_i), s^2(\varepsilon_i)\right) = \lambda_i^4 b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_i\right)$

donc $b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_i\right) = 0$ ou $\lambda_i^4 = 1$ ainsi $b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_i\right) = 0$ ou $\lambda_i^2 = 1$ d'où

$$b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_i)\right) = \lambda_i^2 b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_i\right) = b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_i\right)$$

Deuxième cas : on suppose que $i \neq j$ et $\lambda_i\lambda_j = 1$. Ainsi

$$b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)\right) = \lambda_i\lambda_j b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right)$$

Troisième cas : on suppose que $i \neq j$ et $\lambda_i\lambda_j \neq 1$.

On a : $s^2(\varepsilon_i) = \lambda_i^2\varepsilon_i$ et $s^2(\varepsilon_j) = \lambda_j^2\varepsilon_j$ et $\lambda_i^2\lambda_j^2 \neq 1$ car $\lambda_i\lambda_j > 0$

Selon Q14, les sous-espace $\mathrm{E}_{\lambda_i^2}\left(s^2\right)$ et $\mathrm{E}_{\lambda_j^2}\left(s^2\right)$ sont b_s-orthogonaux car s^2 est symplectique donc

$$b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0 = \lambda_i\lambda_j b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)\right)$$

En décomposant les vecteurs sur $\mathcal{B}'$ en utilisant la bilinéarité de b_s et la linéarité de s, par des calculs analogues à Q10 que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ b_s\left(s(x), s(y)\right) = b_s(x,y)$$

Ainsi s est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

En utilisant Q15, on peut conclure que $\boxed{\text{S est symplectique}}$

Q 25. On a $\mathrm{S} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\text{S est inversible}}$ car $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs comme S est symétrique :

$$\mathrm{O}^\top \mathrm{O} = \left(\mathrm{S}^{-1}\right)^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{MS}^{-1} = \left(\mathrm{S}^\top\right)^{-1} \mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$$

Donc $\boxed{\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1} \text{ appartient au groupe } \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})}$

Q 26. On peut effectivement trouver une matrice S qui convient selon Q2.
On a alors $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$. Comme $\mathrm{O} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(\mathrm{O}) = 1$ selon Q23.
S est diagonalisable (donc trigonalisable) à valeurs propres > 0 or $\det(\mathrm{S})$ est le produit des valeurs propres de S comptées avec multiplicité.
donc $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{S}) > 0$.
Comme en Q16, on a $\det(\mathrm{M})^2 \det(\mathrm{J}) = \det(\mathrm{J})$ d'où $\det(\mathrm{M}) \in \{-1, 1\}$ car $\det(\mathrm{J}) \neq 0$.
On conclut $\boxed{\text{le déterminant de la matrice M est égal à 1}}$

III.D - Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques

III.D.1) Transvection symplectique

Q 27. Je note $\ell : x \in \mathrm{E} \mapsto \lambda\omega(a, x) \in \mathbb{R}$. On vérifie facile que $\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ et $a \in \ker(\ell)$ car ω est alternée.
Ainsi $\boxed{\tau_a^\lambda \text{ est bien une transvection}}$
Soit x et $y \in \mathrm{E}$. Par bilinéarité de ω puis en utilisant le caractère antisymétrique et alternée, on a :

$$\omega\left(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)\right) = \omega(x, y) + \lambda\omega(a, x)\omega(a, y) + \lambda\omega(a, y)\omega(x, a) + \lambda^2\omega(a, x)\omega(a, y)\omega(a, a) = \omega(x, y)$$

Ainsi $\boxed{\tau_a^\lambda \text{ est un endomorphisme symplectique de } (\mathrm{E}, \omega)}$

Q 28. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $\tau_a^\mu(a) = a + \mu\omega(a, a)a = a$ donc par linéarité :

$$\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda(x) = \tau_a^\mu\left(x + \lambda\omega(a, x)a\right) = x + \mu\omega(a, x)a \ + \lambda\omega(a, x)a = \tau_a^{\lambda+\mu}(x)$$

On a bien montré que $\boxed{\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}}$

Q 29. Si $\lambda = 0$, alors $\det\left(\tau_a^0\right) = 1 > 0$ car $\tau_a^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda\omega(a, \cdot)$ est une forme linéaire non nulle car ω est non dégénérée et $a \neq 0$.
Ainsi a est un vecteur non nul de l'hyperplan de E : $\ker\left(\lambda\omega(a, \cdot)\right)$.
Le théorème de la base incomplète, nous fournit $e_2, \dots e_{n-1}$ tel que $(a, e_2, \dots e_{n-1})$ soit une base de $\ker\left(\lambda\omega(a, \cdot)\right)$.
Soit $b \in \mathrm{E} \setminus \ker\left(\lambda\omega(a, \cdot)\right)$.
Alors selon le cours, $(a, e_2, \dots e_{n-1}, b)$ est une base de E adaptée à la somme directe $\ker\left(\lambda\omega(a, \cdot)\right) \oplus \mathrm{Vect}(b)$.

La matrice de τ_a^λ dans cette base est la matrice triangulaire : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\omega(a, b) \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le déterminant de cette matrice est $1^n = \det\left(\tau_a^0\right)$.
Dans tous les cas, on a $\boxed{\det\left(\tau_a^\lambda\right) > 0}$

Q 30. Selon Q 28, on a $\tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda} = \tau_a^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} = \tau_a^{-\lambda} \circ \tau_a^\lambda$
donc $\boxed{\text{la réciproque } \left(\tau_a^\lambda\right)^{-1} = \tau_a^{-\lambda} \text{ est encore une transvection symplectique}}$

III.D.2) Un lemme

Q 31. On remarque que $\omega(y-x,x)=\omega(y,x)$. Je pose $\lambda=-1/\omega(x,y)$ de sorte que

$$\tau_{y-x}^{\lambda}(x)=x-\frac{\omega(y,x)}{\omega(x,y)}(y-x)=x+y-x$$

On montré $\boxed{\text{l'existence de } \lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } \tau_{y-x}^{\lambda}(x)=y}$

Q 32. **Premier cas :** On suppose $\ker(\omega(x,\cdot))=\ker(\omega(y,\cdot))$.

On a vu qu'il s'agissait de deux hyperplans de E.

On peut donc trouver $z\in \mathrm{E}\setminus\ker(\omega(x,\cdot))=\mathrm{E}\setminus\ker(\omega(y,\cdot))$.

Deuxième cas : On suppose $\ker(\omega(x,\cdot))\neq\ker(\omega(y,\cdot))$.

On a alors $\ker(\omega(x,\cdot))\not\subset\ker(\omega(y,\cdot))$ car ces espaces sont de dimensions $n-1$.

Cela nous fournit $z_1\in\ker(\omega(x,\cdot))\setminus\ker(\omega(y,\cdot))$ et donc $\omega(x,z_1)=0$ et $\omega(y,z_1)\neq 0$

On peut de même trouver $z_2\in\mathrm{E}$ tel que $\omega(y,z_2)=0$ et $\omega(x,z_2)\neq 0$.

Je pose alors $z=z_1-z_2$

pour obtenir $\omega(x,z)=\omega(x,z_1)-\omega(x,z_2)=-\omega(x,z_2)\neq 0$ et $\omega(y,z)=\omega(y,z_1)\neq 0$.

Ainsi $\boxed{\text{il existe un vecteur } z\in\mathrm{E} \text{ tel que } \omega(x,z)\neq 0 \text{ et } \omega(y,z)\neq 0}$

Q 33. **Premier cas :** si $\omega(x,y)\neq 0$, il existe une transvection symplectique tel $y=t(x)$ selon Q31.

On prend alors $\gamma=t$ qui est la composée d'une seule transvection symplectique (au plus deux).

Deuxième cas : si $\omega(x,y)=0$, alors Q32 nous fournit $z\in\mathrm{E}$ tel que $\omega(x,z)\neq 0$ et $\omega(z,y)=-\omega(y,z)\neq 0$.

Alors $z\neq 0$ on peut appliquer Q31 aux couples (x,z) et (z,y) ce qui nous fournit t_1 et t_2, transvections symplectiques telles que $z=t_1(x)$ et $y=t_2(z)$.

On pose alors $\gamma=t_2\circ t_1$ composée de deux transvections symplectiques (au plus deux) telle que $\gamma(x)=y$.

On a bien $\boxed{\text{montré le lemme cité ci-dessus}}$

III.D.3) Le théorème

Q 34. Comme $e_1\in\mathrm{E}\setminus\{0_{\mathrm{E}}\}$, alors il existe $f\in\mathrm{E}$ tel que $\omega(e_1,f)\neq 0$ car ω est non dégénérée.

f est alors non colinéaire à e_1 car $e_1\in\ker(\omega(e_1,\cdot))$.

Je pose alors $f_1=\dfrac{1}{\omega(e_1,f)}f$. Comme ω est non dégénérée, alors on a

$$\boxed{f_1\in\mathrm{E}, \text{ non colinéaire à } e_1, \text{ tel que } \omega(e_1,f_1)=1}$$

Q 35. Par l'absurde, si on avait $u(e_1)=0_{\mathrm{E}}$ alors on aurait

$$1=\omega(f_1,e_1)=\omega(u(f_1),u(e_1))=\omega(u(f_1),0_{\mathrm{E}})=0$$

Ce qui est absurde. Ainsi $u(e_1)\neq 0_{\mathrm{E}}$ or $e_1\neq 0_{\mathrm{E}}$,

on peut donc appliquer le lemme du III.D2,

$$\boxed{\text{il existe une composée } \delta_1 \text{ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que } \delta_1(u(e_1))=e_1}$$

Q 36. Premier cas : On suppose que $\omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) \neq 0$.

Alors on a $f_1 \neq 0_{\mathrm{E}}$ et $\tilde{f}_1 \neq 0_{\mathrm{E}}$, alors Q31 nous fournit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau^{\lambda}_{f_1-\tilde{f}_1}\left(\tilde{f}_1\right) = f_1$

Comme $\omega(f_1, e_1) = \omega\left(u(f_1), u(e_1)\right) = \omega\left(\delta_1(u(f_1)), \delta_1(u(e_1))\right) = \omega\left(\tilde{f}_1, e_1\right)$,

alors $\omega(f_1 - \tilde{f}_1, e_1) = 0$ et donc $\tau^{\lambda}_{f_1-\tilde{f}_1}(e_1) = e_1$

On peut prendre dans ce cas : $\delta_2 = \tau^{\lambda}_{f_1-\tilde{f}_1}$.

Deuxième cas : On suppose que $\omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) = 0$.

Je pose $g = -e_1 + f_1$. En utilisant : $\omega\left(e_1, f_1\right) = \omega\left(e_1, \tilde{f}_1\right) = 1$ et ω est forme symplectique on a alors :

$$\omega\left(f_1, g\right) = -\omega\left(f_1, e_1\right) = 1\ ;\ \omega\left(\tilde{f}_1, g\right) = -\omega\left(\tilde{f}_1, e_1\right) + \omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) = 1\ ;\ \omega(e_1, g) = \omega(e_1, f_1) = 1$$

De façon analogue au premier cas, on construit deux transvections symplectiques t_1 et t_2 telles que :

$$\begin{cases} t_1(e_1) = e_1 \\ t_1\left(f_1\right) = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_2(e_1) = e_1 \\ t_2\left(\tilde{f}_1\right) = z \end{cases}$$

On a vu que t_2^{-1} est encore une transvection symplectique, on peut alors prendre $\delta = t_1^{-1} \circ t_2$.

- Dans tous les cas, on peut conclure :

$$\boxed{\text{il existe une composée } \delta_2 \text{ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que } \begin{cases} \delta_2\left(e_1\right) = e_1 \\ \delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = f_1 \end{cases}}$$

Q 37. Comme $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors

$$v(\mathrm{P}) = \mathrm{Vect}\left(v(e_1), v(f_1)\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1, f_1\right) = \mathrm{P}$$

car $v(e_1) = \delta(u(e_1)) = e_1$ et $v(f_1) = \delta(u(f_1)) = f_1$ d'après (III.1)

Comme (e_1, f_1) est une base de P, alors par unicité d'une application linéaire définie sur une base,

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{P est stable par } v} \text{ et } \boxed{v_{\mathrm{P}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}} \text{ (identité de P)}}$$

Q 38. Soit u_1 et u_2 deux endomorphismes symplectiques de (E, ω). On a

$$\forall x, y \in \mathrm{E},\ \omega\left(u_1 \circ u_2(x), u_1 \circ u_2(y)\right) = \omega\left(u_2(x), u_2(y)\right) = \omega\left(x, y\right)$$

Ainsi la composée d'endomorphismes symplectiques est symplectique donc $v \in \mathrm{Symp}_{\omega}(\mathrm{E})$.

Soit $x \in \mathrm{P}^{\omega}$. On a :

$$\forall y \in \mathrm{P},\ 0 = \omega(x, y) = \omega(v(x), v(y)) = \omega\left(v(x), v_{\mathrm{P}}(y)\right) = \omega\left(v(x), y\right)$$

donc $v(x) \in \mathrm{P}^{\omega}$

On a montré que $\boxed{\mathrm{P}^{\omega} \text{ est stable par } v}$

Q 39. On a $\dim\left((\mathrm{P}^{\omega})^{\omega}\right) = n - \dim\left(\mathrm{P}^{\omega}\right) = \dim(\mathrm{P})$ en utilisant Q8.

De plus : $\forall x \in \mathrm{P},\ \forall y \in \mathrm{P}^{\omega},\ \omega(x, y) = -\omega(y, x) = 0$ donc $\forall x \in \mathrm{P},\ x \in (\mathrm{P}^{\omega})^{\omega}$

d'où $\mathrm{P} \subset (\mathrm{P}^{\omega})^{\omega}$

$$\text{et ainsi } \mathrm{P} = (\mathrm{P}^{\omega})^{\omega}$$

Soit $x \in (\mathrm{P}^\omega)^\omega \bigcap \mathrm{P}^\omega$. On a alors $x \in \mathrm{P}$.
Cela nous fournit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha e_1 + \beta f_1$.
Comme $x \in \mathrm{Vect}\,(e_1, f_1)^\omega$, alors on a $\omega(x, e_1) = \omega(x, f_1) = 0$.
Or $\omega(e_1, f_1) = 1$, on a $\alpha = \beta = 0$.
D'où $(\mathrm{P}^\omega)^\omega \bigoplus \mathrm{P}^\omega = \{0_\mathrm{E}\}$
Ainsi $\mathrm{E} = (\mathrm{P}^\omega)^\omega \bigoplus \mathrm{P}^\omega$ car en utilisant Q8 : $\dim\left((\mathrm{P}^\omega)^\omega\right) + \dim\left(\mathrm{P}^\omega\right) = n$.
D'où selon Q9,

$$\boxed{\text{la restriction } \omega_{\mathrm{P}^\omega} \text{ de } \omega \text{ à } \mathrm{P}^\omega \times \mathrm{P}^\omega \text{ munit } \mathrm{P}^\omega \text{ d'une structure d'espace symplectique}}$$

De plus, on a

$$\forall x, y \in \mathrm{P}^\omega,\ \omega_{\mathrm{P}^\omega}\left(v_{\mathrm{P}^\omega}(x), v_{\mathrm{P}^\omega}(y)\right) = \omega\left(v_{\mathrm{P}^\omega}(x), v_{\mathrm{P}^\omega}(y)\right) = \omega\left(v(x), v(y)\right) = \omega\left(x, y\right)$$

Ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } v_{\mathrm{P}^\omega} \text{ est un endomorphisme symplectique de } (\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})}$

Q 40. On va montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que : « tout endomorphisme symplectique d'un espace symplectique de dimension $2m$ est la composée d'au plus $4m$ transvections symplectiques ».

I : On considère u un endomorphisme de l'espace symplectique (E, ω) de dimension 2.
Q34 à Q36, nous fournissent e_1 et f_1 non colinéaires dans E et δ composée d'au plus 4 transvections symplectiques tel que la condition (III.1) soit satisfaite.
On peut écrire $\delta = t_1 \circ \cdots t_p$ avec $p \in [\![1, 4]\!]$ où les t_i sont des transvections symplectiques
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, je note $t'_i = t_i^{-1}$ qui est aussi une transvection symplectique selon Q30.
La condition (III.1) donne $\delta \circ u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ car (e_1, f_1) est une base de E
donc $u = t'_p \circ \cdots t'_1$ est la composée d'au plus 4 transvections symplectiques
Ce qui termine l'initialisation.

H : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang m. Je pose $n = 2m$ et je considère u un endomorphisme symplectique sur un espace symplectique (E, ω) de dimension $n + 2 = 2(m + 1)$.
Q34 à Q36, nous fournissent e_1 et f_1 non colinéaires dans E et δ composée d'au plus 4 transvections symplectiques tel que la condition (III.1) soit satisfaite.
On reprend également les notations pour P et v et on a $u = \delta \circ v$.
Il suffit de montrer que v est le produit d'au plus $4m$ transvections symplectiques de (E, ω) car δ est la composée d'au plus 4 transvections symplectiques et que $u = \delta^{-1} \circ v$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à v_{P^ω} endomorphisme symplectique de $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$ car
$\dim\left(\mathrm{P}^\omega\right) = n = 2m$ ($\mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^\omega = \mathrm{E}$ vu en Q39).
Cela nous fournit $t_1, \ldots, t_p$ des transvections symplectiques de $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$ tels que $v_{\mathrm{P}^\omega} = t_1 \circ \cdots t_p$ où $p \in [\![1, 2n]\!]$.
Soit t une transvection symplectique de $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on peut écrire $t_i : x \in \mathrm{P}^\omega \longmapsto x + \lambda_i \omega_{\mathrm{P}^\omega}(a_i, x) a_i$ avec $a_i \in \mathrm{P}^\omega \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Je pose $t'_i : x \in \mathrm{E} \longmapsto x + \lambda_i \omega(a_i, x) a_i$.
Comme $a_i \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors t'_i est une transvection symplectique de (E, ω).
On remarque que comme $a_i \in \mathrm{P}^\omega$, alors $\forall x \in \mathrm{P},\ t'_i(x) = x$
D'où $\forall x \in \mathrm{P},\ t'_1 \circ \cdots t'_p(x) = x = v(x)$ selon Q38
Comme $\forall x \in \mathrm{P}^\omega,\ t'_i(x) = t_i(x)$ alors $\forall x \in \mathrm{P}^\omega,\ t'_1 \circ \cdots t'_p(x) = t_1 \circ \cdots t_p(x) = v_{\mathrm{P}^\omega}(x) = v(x)$
Comme $\mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^\omega = \mathrm{E}$, alors $t'_1 \circ \cdots t'_p = v$ ce que l'on voulait.

C : On a bien montré par récurrence que la propriété est vraie pour tout espace symplectique de dimension finie.

Ainsi $\boxed{\text{le théorème annoncé est démontré}}$

III.D.4) Une conséquence topologique

Q 41. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Je note u l'endomorphisme canoniquement à M.

Selon Q15, u est un endomorphisme de l'espace standard symplectique $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Selon le théorème que l'on vient de montrer on peut écrire,

$$u = \tau_{a_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \tau_{a_p}^{\lambda_p}$$

avec $p \in [\![1, 2n]\!]$, les $a_i \in \mathrm{E}$, les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les $\tau_{a_1}^{\lambda_1} : x \mapsto x + \lambda_i \omega(a_i, x)$, transvections symplectiques de $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $\varphi_i : t \in [0,1] \longmapsto \tau_{a_1}^{t\lambda_1} = t \cdot \tau_{a_1}^{\lambda_1} + (1-t) \cdot \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Ainsi l'application φ_i est continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, par théorèmes généraux.

On remarque que pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_i\,(t)$ est une transvection symplectique

donc $\forall t \in [0,1],\ \varphi_i\,(t) \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^n)$ selon Q27.

Je pose pour $t \in \mathbb{R}$, $\mu_i(t)$ la matrice représentative de $\varphi_i\,(t)$ dans la base canonique.

Comme l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice est linéaire, μ_i est continue.

De plus en utilisant, Q15, on a $\forall t \in [0,1],\ \mu_i(t)\,\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Je note alors l'application $\psi\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \mu_1(t) \times \cdots \times \mu_p(t) \end{array}\right.$.

ψ est bien définie car $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Comme déjà vu le produit matriciel est continue, ainsi ψ est continue.

Ainsi ψ est un chemin continue de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Par construction, on a $\psi(0) = \mathrm{I}_n$ et $\psi(1) = \mathrm{M}$.

Ainsi M appartient à la composante connexe par arcs de I_n dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi on a bien montré que $\boxed{\text{le groupe symplectique } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie connexe par arcs de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

III.D.5) Deuxième conséquence

Q 42. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

On vient de voir que M représente une composée de p (où $p \in [\![1, 2n]\!]$) transvections symplectiques de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Or le déterminant de ces transvections valent 1 selon Q29 d'où $\det(\mathrm{M}) = 1^p = 1$.

Ceci prouve l'inclusion $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$

IV Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

IV.A - Injection par $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans un cylindre

Q 43. Je considère l'application

$$u : (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m) \longmapsto (rx_1, x_2/r, x_3, \ldots, x_m, ry_1, y_2/r, y_3, \ldots, y_m)$$

On a bien $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\det(u) = 1$

ainsi $\boxed{\text{il existe } u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right) \text{ tel que } u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{Z}^{2m}(r)}$

IV.B - Injection par $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans une autre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ vérifiant $u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{B}^{2m}(r)$.
Notons $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de la matrice U.

Q 44. On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a $\dfrac{\mathrm{C}}{\|\mathrm{C}\|} \in \mathrm{B}^{2m}(1)$ donc $u\left(\dfrac{\mathrm{C}}{\|\mathrm{C}\|}\right) = \dfrac{\mathrm{UC}}{\|\mathrm{C}\|} \in \mathrm{B}^{2m}(r)$. Ainsi

$$\forall \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|\mathrm{UC}\| \leqslant r\|\mathrm{C}\| \qquad (*)$$

On considère $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Z} = \mathrm{P} + \mathrm{iQ}$ est une colonne propre de U pour la valeur propre λ.

On a alors $\mathrm{UP} + \mathrm{iUQ} = \lambda\,(\mathrm{P} + \mathrm{iQ})$ car $\mathrm{UZ} = \lambda\mathrm{Z}$.

En regardant la j-ème composante $(1 \leqslant j \leqslant n)$, on a $(\mathrm{UP})_j + \mathrm{i}\,(\mathrm{UQ})_j = \lambda\,(p_j + \mathrm{i}q_j)$

Ainsi $(\mathrm{UP})_j^2 + (\mathrm{UQ})_j^2 = |\lambda|^2\left(p_j^2 + q_j^2\right)$ en prenant les modules au carré.

En sommant pour j allant de 1 à n, on obtient $\|\mathrm{UP}\|^2 + \|\mathrm{UQ}\|^2 = |\lambda|^2\left(\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2\right)$

À l'aide de l'inégalité (*), on obtient $|\lambda|^2\left(\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2\right) \leqslant r^2\left(\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2\right)$

Or $\mathrm{P} \neq 0$ ou $\mathrm{Q} \neq 0$ car $\mathrm{Z} \neq 0$ (vecteur propre) et donc $\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2 > 0$

On a bien $\boxed{|\lambda| \leqslant r}$

Q 45. Selon d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique χ_{U} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Ainsi la matrice U est trigonalisable.

Je note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de U comptées avec multiplicité.

On a alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\mathrm{U}) = 1$ d'où $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$.

Ceci nous fournit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| \geqslant 1$. On déduit que $\boxed{1 \leqslant r}$ à l'aide de Q44.

Q 46. Soit $r > 0$. On va montrer que

$\boxed{\text{il existe } u \text{ appartenant à } \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right) \text{ tel que } u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{B}^{2m}(r) \text{ si et seulement si } 1 \leqslant r}$

On vient de traiter le sens direct.

Réciproquement on suppose $r \geqslant 1$.

Je prend $u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. On a bien $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ et $u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) = \mathrm{B}^{2m}(1) \subset \mathrm{B}^{2m}(r)$

$u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{B}^{2m}(r)$

IV.C - Injection symplectique d'une boule dans un cylindre

Q 47. On a M symplectique.

Selon Q16 puis Q15 : on a $\mathrm{M}^\top$ symplectique puis $\psi^\top$ est symplectique.

d'où vu la matrice J, on a

$$b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right) = b_s(e_1, f_1) = \langle e_1, j(f_1)\rangle = \langle e_1, -e_1\rangle = -1$$

Ainsi $\boxed{\left|b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right)\right| = 1}$

On a également à l'aide de Cauchy-Schwarz :

$$\left|b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right)\right| = \left|\left\langle\psi^\top(e_1), j\left(\psi^\top(f_1)\right)\right\rangle\right| \leqslant \left\|\psi^\top(e_1)\right\| \times \left\|j\left(\psi^\top(f_1)\right)\right\|$$

or $\mathrm{J} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi $j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et $\left\|j\left(\psi^\top(f_1)\right)\right\| = \left\|\psi^\top(f_1)\right\|$
D'où $1 \leqslant \left\|\psi^\top(e_1)\right\| \cdot \left\|\psi^\top(f_1)\right\|$
On peut conclure que $\boxed{\left\|\psi^\top(e_1)\right\| \geqslant 1 \text{ ou } \left\|\psi^\top(f_1)\right\| \geqslant 1}$

Q 48. On remarque que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, \psi^\top(y)\rangle = \langle\psi(x), y\rangle$$

en utilisant l'écriture matricielle du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.
Par ailleurs on a $\forall x \in \psi\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right)$, $\psi(x) \in \mathrm{Z}^{2m}(r)$
donc en regardant à la condition sur la première coordonnée, on a

$$\forall x \in \psi\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right),\ |\langle\psi(x), e_1\rangle| \leqslant r$$

En combinant les inégalités, on a

$$\forall x \in \mathrm{B}^{2m}(1),\ |\langle x, \psi^\top(e_1)\rangle| \leqslant r$$

En appliquant cela à $\dfrac{\psi^\top(e_1)}{\|\psi^\top(e_1)\|} \in \mathrm{B}^{2m}(1)$, on obtient $r \geqslant \|\psi^\top(e_1)\|$
De manière analogue, on établit que $r \geqslant \|\psi^\top(f_1)\|$.
À l'aide de la question précédente, on conclut que $\boxed{1 \leqslant r}$

Q 49. Soit $\mathrm{R} > 0$ et $\mathrm{R}' > 0$. En posant $r = \mathrm{R}'/\mathrm{R}$, pour prouver le théorème de non-tassement linéaire, il suffit de prouver pour $r > 0$ que

$$\text{il existe } \psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right) \text{ tel que } \psi\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{Z}^{2m}(r) \text{ si et seulement si } 1 \leqslant r$$

Si $r \geqslant 1$, il suffit de prendre $\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.
Réciproquement, on suppose qu'il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $\psi\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{Z}^{2m}(r)$.
On a alors $r \geqslant 1$ selon Q48.