Centrale MP 2021 : épreuve 1
Un corrigé

I. Inégalité de Hoffman-Wielandt

Question I.A

1. On rappelle que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ et que pour $P \in O_n(\mathbb{R})$, $P^TP = PP^T = I_n$. Ainsi, si $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\|PMQ\|_F^2 = \mathrm{Tr}(Q^TM^TP^TPMQ) = \mathrm{Tr}(Q^TM^TMQ) = \mathrm{Tr}(M^TMQQ^T) = \|M\|_F^2$$
et ainsi
$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P, Q \in O_n(\mathbb{R}),\ \|PMQ\|_F = \|M\|_F}$$

2. Par théorème spectral, il existe $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que
$$R^{-1}AR = D_A \ \text{ et } \ Q^{-1}BP = D_B$$
En utilisant la question 1 (multipliant à droite par Q et à gauche par R^{-1} qui sont des matrices orthogonales)
$$\|A - B\|_F^2 = \|RD_AR^{-1} - QD_BQ^{-1}\|_F^2 = \|D_AR^{-1}Q - R^{-1}QD_B\|_F^2$$
Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe, on a $P = R^{-1}Q \in O_n(\mathbb{R})$. On a donc montré que
$$\boxed{\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \|A - B\|_F^2 = \|D_AP - PD_B\|_F^2}$$

3. Comme $(D_AP)_{i,j} = \lambda_i(A)p_{i,j}$ et $(D_BP)_{i,j} = \lambda_j(B)p_{i,j}$ et comme le carré de la norme est la somme des carrés de ses coefficients, on a
$$\boxed{\|A - B\|_F^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} p_{i,j}^2(\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2}$$

Question I.B

4. $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fermé comme intersection de fermés :
   - les images réciproque du fermé $\mathbb{R}^+$ par les applications continues $M \mapsto m_{i,j}$
   - les images réciproque du fermé $\{1\}$ par les applications continues $M \mapsto \sum_{j=1}^n m_{i,j}$ et $M \mapsto \sum_{j=1}^n m_{j,i}$.

   De plus les coefficients d'une matrice bistochastique sont entre 0 et 1 donc
$$\forall M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R}),\ \|M\|_F \le n$$
et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est donc borné. C'est finalement (on est en dimension finie) un compact. Comme f est continue, un théorème de compacité indique que f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi
$$\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathcal{B}_n(\mathbb{R})}$$

5. On a directement
$$\begin{aligned} f(M + xE_{i,i} + xE_{j,k} - xE_{i,k} - xE_{i,j}) - f(M) &= x(\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 + x(\lambda_j(A) - \lambda_k(B))^2 \\ &\quad -x(\lambda_i(A) - \lambda_k(B))^2 - x(\lambda_j(A) - \lambda_i(B))^2 \\ &= 2x(-\lambda_i(A)\lambda_i(B) - \lambda_j(A)\lambda_k(B) \\ &\qquad +\lambda_i(A)\lambda_k(B) + \lambda_j(A)\lambda_i(B)) \end{aligned}$$
On a donc

$$\boxed{f(M + xE_{i,i} + xE_{j,k} - xE_{i,k} - xE_{i,j}) - f(M) = 2x(\lambda_i(A) - \lambda_j(A))(\lambda_k(B) - \lambda_i(B))}$$

Le valeurs propres étant ordonnées dans l'ordre décroissant, la première parenthèse est négative et la seconde est positive. Pour $x \geq 0$, le produit est positif.

$$\boxed{\text{Si } j, k \geq i \text{ et } x \geq 0,\ f(M + xE_{i,i} + xE_{j,k} - xE_{i,k} - xE_{i,j}) - f(M) \leq 0}$$

6. Comme on suppose $M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$, si tous les $m_{i,i}$ valent 1, alors $M = I_n$.
En supposant $M \neq I_n$, il existe bien un plus petit i tel que $m_{i,i} \neq 1$ et M s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad N \in \mathcal{B}_{n+1-i}(\mathbb{R})$$

On va transformer M par des opérations comme dans la question 5 en conservant le caractère bistochastique.

- Il existe $k > i$ tel que $m_{i,k} \neq 0$ (car sinon la somme sur la ligne i ne vaut pas 1) et de même un $j > i$ tel que $m_{j,i} \neq 0$. Notons $x = \min(m_{i,k}, m_{j,i})$. En transformant M en $M_1 = M + xE_{i,i} + xE_{j,k} - xE_{i,k} - xE_{i,j}$, on garde le caractère bistochastique (on a toujours des coefficients positifs et on n'a pas changé la somme par ligne ou colonne). De plus, $M_1 = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$ et N_1 possède au moins un zéro de plus sur la ligne i ou le colonne i (selon que $x = m_{i,k}$ ou $x = m_{j,i}$).
- Si $(N_1)_{i,i} = 0$, on a terminé. Sinon on peut recommencer pour faire apparaître un zéro de plus sur la ligne i ou la colonne i. En un nombre fini d'étape, on se sera ramené à une matrice bistochastique du même type avec le seul coefficient non nul sur la ligne i et la colonne i qui est en position (i, i) et vaut donc 1.

Une rédaction complète s'effectuerait par récurrence sur le nombre de zéros présents sur la ligne et la colonne i mais la formalisation récurrente ne me semble pas apporter de clarté au raisonnement.

Comme les opérations de la question 5 diminuent la valeur de f, on a montré que

$$\boxed{\exists M' \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R}),\ f(M') \leq f(M) \text{ et } \forall j \in [\![1, i]\!],\ m'_{j,j} = 1}$$

7. On montre par récurrence décroissante sur $k \in [\![0, n]\!]$ que si $M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ possède un bloc supérieur gauche égal à I_k, alors $f(I_n) \leq f(M)$.
   - Le résultat est immédiat si $k = n$ puisqu'alors $M = I_n$.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $k \geq 1$. Soit $M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ possède un bloc supérieur gauche égal à I_{k-1}.
     Si M possède un bloc supérieur gauche égal à I_k, la conclusion est directe avec l'hypothèse au rang k.
     Sinon, on est dans la situation de la question 6 avec $i = k$ et on peut obtenir M' telle que $f(M') \leq f(M)$ et à laquelle on peut appliquer le résultat au rang k. On a donc $f(I_n) \leq f(M') \leq f(M)$.

   $f(I_n)$ minore $f(\mathcal{B}_n(\mathbb{R}))$ et est dans l'ensemble : c'est le minimum.

$$\boxed{\min\{f(M) \mid M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\} = f(I_n)}$$

Question I.C

8. Soit P la matrice de la question 3. Lignes et colonnes de P sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ de norme (euclidienne) valant 1. Ainsi, la matrice $M = (p_{i,j}^2)$ est bistochastique (les coefficients sont bien positifs). Or, $\|A - B\|_F^2 = f(M)$ et donc $\|A - B\|_F^2 \geq f(I_n)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2}$$

II. Dénombrement des mots bien parenthésés

Question II.A

9. () est le seul mot bien parenthésé (on dira mot BP dans la suite) de taille 2.
Les mots BP de taille 4 sont ()() et (()).
Les mots BP de taille 6 sont ()()(), ()(()), (())() et ((())).

$$\boxed{C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5}$$

10. Il a 2^{2n} mots de taille $2n$ (puisque deux choix pour chaque caractère). Ainsi $\boxed{C_n \leq 2^{2n}}$.
Pour tout réel x, $|C_n x^n| \leq |4x|^n$ est borné si $|4x| \leq 1$ et donc

$$\boxed{\sum(C_n x^n) \text{ est de rayon convergence plus grand que } 1/4.}$$

11. On va partitionner l'ensemble $\mathcal{C}_k$ des mots BP de taille $2k$.
Pour un mot BP m de taille $2k$, on peut considérer une suite $(u_0, u_1, \dots, u_{2k})$ définie de manière récurrente par

$$u_0 = 0 \ \text{ et } \ u_{i+1} = u_i + \begin{cases} 1 & \text{si } m_i = (\\ -1 & \text{si } m_i =) \end{cases}$$

Le caractère bien parenthésé de m se traduit par la positivité des u_i et le fait que $u_{2k} = 0$. L'ensemble des $i \geq 1$ tels que $u_i = 0$ est non vide (il contient $2k$) et possède un minimum $p_m \in [\![2, 2k]\!]$ ($u_1 = 1$ car le mot commence par une parenthèse ouvrante). De plus p_m est pair (puisque c'est la position d'une parenthèse fermante).
Notons $\mathcal{C}_{k,j}$ l'ensemble des éléments m de $\mathcal{C}_k$ tels que $p(m) = 2j$ pour $j \in [\![1, k]\!]$. Les éléments de cet ensemble sont ceux qui s'écrivent $(m)m'$ avec m BP de taille $2(j-1)$ et m' BP de taille $2(k-j)$. L'application qui au couple (m, m') associe le mot $(m)m'$ est injective et le cardinal de $\mathcal{C}_{k,j}$ vaut $C_{j-1} \times C_{k-j}$. Comme on a une partition, on conclut que

$$\boxed{C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i C_{k-i-1}}$$

Question II.B

12. Par théorème sur le produit de Cauchy de séries entières, et comme le rayon de convergence est plus grand que 1/4, pour $|x| < 1/4$ on a

$$F(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (C * C)_n x^n$$

où $*$ est le produit de Cauchy et où on a donc (avec la question 11)

$$(C*C)_n = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = C_{n+1}$$

On en déduit que

$$xF(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^{n+1} = F(x) - C_0 x^0 = F(x) - 1$$

On a ainsi montré que

$$\boxed{\forall |x| < \tfrac{1}{4},\ F(x) = 1 + xF(x)^2}$$

13. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in]-1/4, 1/4[$ tel que $2xF(x) - 1 = 0$. On a alors $x \neq 0$ et $F(x) = \frac{1}{2x}$. La question précédente donne alors $\frac{1}{2x} = 1 + \frac{x}{4x^2}$ et donc $4x^2 = x$ ce qui est faux pour $|x| < 1/4$ et $x \neq 0$.

$$\boxed{x \mapsto 2xF(x) - 1 \text{ ne s'annule pas sur }]-1/4, 1/4[}$$

14. Soit $x \neq 0$ tel que $|x| < 1/4$. Les solutions de $xr^2 - r + 1 = 0$, d'inconnue r, sont $\frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. On a donc $2xF(x) - 1 = \pm\sqrt{1-4x}$. Or, $x \mapsto 2xF(x) - 1$ est continue et ne s'annule pas. Sur chacun des intervalles $]-1/4, 0[$ et $]0, 1/4[$, elle garde donc un signe constant. Comme la limite en 0^+ et 0^- de cette quantité vaut -1, ce signe est négatif. On a donc

$$\boxed{\forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ F(x) = \tfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ et } F(0) = 1}$$

15. On sait de façon générale que

$$\forall |u| < 1,\ (1-u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(-u)^n$$

Dans le cas où $\alpha = 1/2$, on a

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-3}{2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\prod_{k=0}^{n-2}(2k+1)$$

On multiplie haut et bas par les nombres pairs de 2 à $2n-2$ pour obtenir

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

On a finalement

$$\boxed{\forall |u| < 1,\ \sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}u^n}$$

16. Pour x non nul, on a donc

$$F(x) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}(4x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}x^{n-1}$$

On change d'indice pour se ramener à $n \in \mathbb{N}$ et on utilise l'unicité d'un DSE (la relation est vraie pour $x = 0$) pour conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}}$$

III. Loi du demi-cercle, cas uniformément borné

Question III.A

17. L'intégrale d'une fonction impaire sur un segment centré sur l'origine est nulle :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ m_{2k+1} = 0}$$

18. $t \mapsto \sin(2t)$ étant de classe C^1 sur $]-\pi/2, \pi/2[$ à dérivée ne s'annulant pas (et donc réalisant une bijection de l'intervalle dans son image $]-1,1[$), le changement de variable proposé est licite et donne

$$m_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4(1-\sin^2(t))}(2\cos(t))\ dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(t)|\cos(t)\ dt$$

Le cosinus est positif sur l'intervalle et $|\cos(t)|\cos(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$. Le calcul se termine alors aisément et donne

$$\boxed{m_0 = 1}$$

19. On primitive $u'(x) = x\sqrt{4-x^2}$ en $u(x) = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}$ et on dérive $v(x) = x^{2k+1}$ en $v'(x) = (2k+1)x^{2k}$. $u, v \in C^1([-2,2])$ et on peut intégrer par parties pour obtenir

$$2\pi m_{2k+2} = \left[-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}x^{2k+1}\right]_{-2}^{2} + \frac{2k+1}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}x^{2k}\ dx$$

En écrivant que $(4-x^2)^{3/2}x^{2k} = \sqrt{4-x^2}(4x^{2k} - x^{2k+2})$, on a donc

$$m_{2k+2} = \frac{2k+1}{3}(4m_{2k} - m_{2k+2})$$

ou encore, après simplification,

$$\boxed{m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} m_{2k}}$$

20. Montrons par récurrence que $m_{2k} = C_k$.
   - C'est vrai si $k = 0$ ($m_0 = C_0 = 1$)
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang k. On a alors

$$m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2}C_k = \frac{2(2k+1)}{k+2}\frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \frac{(2k+2)!}{(k+2)!(k+1)!} = C_{k+1}$$

Comme m_{2k+1} est nul, on a finalement

$$\boxed{m_k = \begin{cases} C_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}}$$

Question III.B

21. Pour une matrice diagonalisable (trigonalisable suffit), la trace est la somme des valeurs propres. Par ailleurs, si $M \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $M^k \sim \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.
On en déduit ici que

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k = \mathrm{Tr}((M_n/\sqrt{n})^k) = \frac{1}{n^{k/2}}\mathrm{Tr}(M_n^k)$$

Or, les coefficients de M_n étant des fonctions bornées, il en va de même de ceux de M_n^k (à k fixé, la borne dépend de k) et donc de la trace de M_n^k. En tant que variable bornée,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k \text{ admet une espérance}}$$

Avec ce qui précède et la linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{k/2}} \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_n^k))$$

et, toujours avec la linéarité de l'espérance

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_n^k))}$$

D'après la formule du produit matriciel,

$$(A^k)_{i,j} = \sum_{i_2,\dots,i_k} A_{i,i_2} A_{i_2,i_3} \dots A_{i_{k-1},i_k} A_{i_k,j}$$

La trace de A^k est donc la somme des $A_{i_1,i_2} A_{i_2,i_3} \dots A_{i_{k-1},i_k} A_{i_k,i_1}$ pour tous les $i_1, \dots, i_k$ de $[\![1, n]\!]$. En particulier, l'espérance étant linéaire,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{i_1,\dots,i_k \in [\![1,n]\!]} \mathbb{E}(X_{i_1,i_2} \dots X_{i_k,i_1})}$$

22. Il y a $\binom{n}{\ell}$ façons de choisir ℓ sommets distincts. Une fois ces sommets choisis, un cycle de longueur k ne pouvant passer que par ces sommets est caractérisé par un k-uplet de ces sommets et il y a ℓ^k choix. Le nombre de cycles de longueur k passant par ℓ sommets distincts est donc plus petit que $\binom{n}{\ell}\ell^k$ (pas forcément égalité car on ne passe pas forcément par tous les sommets pour les cycles comptés). Comme $\binom{n}{\ell} \le n^\ell$,

$$\boxed{\text{Il y a au plus } n^\ell \ell^k \text{ cycles de longueur } k \text{ dans } [\![1, n]\!] \text{ passant par } \ell \text{ sommets}}$$

23. Le produit de k des variables $X_{i,j}$ est en module plus petit que K^k. L'espérance d'un tel produit est donc de module plus petit que K^k. On a donc

$$\sum_{\substack{\vec{i} \in [\![1,n]\!]^k \\ |\vec{i}| \le (k+1)/2}} |\mathbb{E}(X_{i_1,i_2} \dots X_{i_k,i_1})| \le \alpha_{n,k} K^k$$

où $\alpha_{n,k}$ est le nombre de cycle de longueur k de $[\![1, n]\!]$ passant par moins de $(k + 1)/2$ sommets. Avec la question précédente, et en remarquant que le majorant trouvé convient aussi si on compte les cycles passant par AU PLUS ℓ sommets,

$$\alpha_{n,k} \le n^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$$

On a ainsi

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{i} \in [\![1,n]\!]^k \\ |\vec{i}| \le (k+1)/2}} |\mathbb{E}(X_{i_1,i_2} \dots X_{i_k,i_1})| \le \left(\frac{K(k+1)}{2}\right)^k \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{i}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{i}|\leq(k+1)/2}} |\mathbb{E}(X_{i_1,i_2}\dots X_{i_k,i_1})| = 0}$$

24. Pour un cycle $(i_1,\dots,i_k,i_1)\in\mathcal{A}_k$, l'une des arêtes (i_j,i_{j+1}) (avec $i_{k+1}=i_1$) n'apparaît qu'une fois. $X_{i_j,i_{j+1}}$ est, par lemme des coalitions, indépendante de toute fonction des AUTRES $X_{a,b}$ (ceci est vrai quand $i_j\leq i_{j+1}$ et $a\leq b$ mais les arêtes (u,v) et (v,u) sont identifiées et on se ramène à ce cas…). On a ainsi

$$\mathbb{E}(X_{i_1,i_2}\dots X_{i_k,i_1}) = \mathbb{E}(X_{i_j,i_{j+1}})\mathbb{E}\left(\prod_{t\neq j} X_{i_t,i_{t+1}}\right) = 0$$

puisque les $X_{a,b}$ sont centrées.

$$\boxed{\text{Si } (i_1,\dots,i_k,i_1)\in\mathcal{A}_k, \text{ alors } \mathbb{E}(X_{i_1,i_2}\dots X_{i_k,i_1})=0}$$

25. Considérons un cycle possédant a arêtes distinctes et regardons le nombre de sommets différents qu'il peut posséder. On part d'un premier sommet et à chaque fois que l'on ajoute une nouvelle arête, on découvre au plus un sommet. Quand on ajoute une arête déjà rencontrée, on ne découvre pas de nouveau sommet. Ainsi le cycle contient au plus $a+1$ sommets différents.
Supposons $\vec{i}\in\mathcal{C}_k$. On a k arêtes au total. L'une est au moins présente 3 fois. Les x différentes autres étant toutes présentes au moins 2 fois, on a $k\geq 2x+3$ et donc $x\leq\frac{k-3}{2}$. Il y a donc au plus $x+1=\frac{k-3}{2}+1=\frac{k-1}{2}$ arêtes différentes. Le nombre de sommets différents est donc au plus égal à $1+\frac{k-1}{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\vec{i}\in\mathcal{C}_k,\ |\vec{i}|\leq\frac{k+1}{2}}$$

26. Dans un cycle de longueur k, il y a $k+1$ arêtes (pas forcément différentes). Si k est pair, le nombre des arêtes est impair et il n'est pas possible que chaque arête apparaisse 2 fois. Ainsi

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est impair, } \mathcal{B}_k=\emptyset}$$

Dans ce cas, dans la somme de la question 21, on peut se contenter des uplets $(i_1,\dots,i_k)$ tels que $(i_1,\dots,i_k,i_1)$ est dans $\mathcal{C}_k$: ceux dans $\mathcal{A}_k$ ont une contribution nulle (question 24) et il n'y en a pas dans $\mathcal{B}_k$.
Par inégalité triangulaire, le module de la somme qui reste est majoré par la quantité de la question 23 et est de limite nulle.

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est impair, } \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k\right)=0}$$

27. Ce processus donne un mot ayant autant de lettres qu'il y a d'arêtes dans le cycle, c'est-à-dire k. A tout instant, le nombre des parenthèses ouvrantes est plus grand que celui des parenthèses fermantes (par définition, la première rencontre d'une arête a lieu avant la deuxième rencontre). Enfin, le nombre des parenthèses ouvrantes et fermantes sont égaux (par définition de $\mathcal{B}_k$). Ceci signifie que la suite $u_0,\dots,u_k$ introduit en question 11 vérifie le traduction de la propriété de bon parenthésage.

$$\boxed{\text{Un mot associé à } \vec{i} \text{ est bien parenthésé}}$$

On a juste besoin ici que $\vec{i}\in\mathcal{B}_k$ et pas que le cycle passe par $1+\frac{k}{2}$ sommets distincts.

28. On a ici $k = 2p$ et le nombre d'arêtes distinctes est exactement p (puisque toutes les arêtes apparaissent 2 fois). Le nombre maximum de sommets apparaissant dans le cycle est donc $p+1 = \frac{k}{2}+1$. On fait ici l'hypothèse que l'on est dans cette "configuration maximale".
Il faut donc, si on reprend l'analyse de la question 25, qu'à partir du sommet d'origine, toute arête que l'on rencontre la première fois fasse découvrir un nouveau sommet.

Pour choisir un tel cycle, on doit choisir $p+1$ sommets et l'ordre dans lequel on les découvre. Il y a $n(n-1)\dots(n-p)$ tels choix. Si on fixe le mot parenthésé associé au cycle, on fixe les "positions" des arêtes qui apparaissent pour la première fois. Je prétends que ceci impose tout le cycle.
Prenons un exemple. On se place dans le cas $k = 10$ et on commence par choisir six sommets et l'ordre dans lequel on les trouve. Par exemple, 1,2,3,4,5,6. On choisit ensuite un mot bien parenthésé, par exemple (()()(())).

- Un cycle associé part de 1 puis découvre deux sommets. Il débute donc par $(1, 2, 3)$.
- Le mot présente alors une parenthèse fermante et on doit emprunter une arête déjà vue. C'est forcément celle de 3 à 2 et le cycle se poursuit par $(1, 2, 3, 2)$.
- La parenthèse ouvrante suivante nous fait décrouvrir 4 et on en est à $(1, 2, 3, 2, 4)$.
- Le caractère suivant est) est il faut repasser par une arête déjà vue et c'est forcément celle qui va de 4 à 2. On en est à $(1, 2, 3, 2, 4, 2)$.
- On découvre alors deux sommets. On en est à $(1, 2, 3, 2, 4, 2, 5, 6)$.
- On doit alors repasser par trois arêtes connues et on doit obtenir $(1, 2, 3, 2, 4, 2, 5, 6, 5, 2, 1)$

Finalement,

$$\boxed{\text{le nombre de cycles correspondant à un mot bien parenthésé donné est } n(n-1)\dots(n-k/2)}$$

29. On découpe la somme de la question 21 selon l'appartenance de $\vec{i}$ aux ensembles $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$ ou $\mathcal{C}_k$ comme expliqué en question 26. Et comme dans cette question, seule la partie relative à $\mathcal{B}_k$ a une limite non nulle. On veut donc en fait la limite de

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{i}\in[\![1,n]\!]^k \\ \vec{i}\in\mathcal{B}_k}} \mathbb{E}(X_{i_1,i_2}\dots X_{i_k,i_1})$$

Avec la question 23, on peut même se limiter à des $\vec{i}$ tels que $\vec{i} > \frac{k+1}{2}$ c'est à dire à des $\vec{i}$ comme ceux considérés en question 28 :

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{i}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{i}|=1+\frac{k}{2},\vec{i}\in\mathcal{B}_k}} \mathbb{E}(X_{i_1,i_2}\dots X_{i_k,i_1})$$

Dans ce produit, les termes se regroupent par deux et on obtient des $X_{a,b}^2$ avec des $X_{a,b}$ indépendantes. L'espérance du produit est le produit des espérances des $X_{i,j}^2$ qui valent 1 ($1 = V(X_{i,j}) = \mathbb{E}(X_{i,j}^2)$ car $\mathbb{E}(X_{i,j}) = 1$). Il s'agit donc de chercher la limite de

$$\frac{\alpha_{n,k}}{n^{1+k/2}}$$

où $\alpha_{n,k}$ est le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_k$ ayant $1 + \frac{k}{2}$ sommets différents. D'après la question précédente, ce nombre est égal à

$$\alpha_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k/2)C_{k/2} \sim n^{1+k/2}C_{k/2}$$

On en conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^{k}\right) = C_{k/2}}$$

Question III.C

30. Par linéarité de l'espérance et du passage à l'intégrale, il suffit de prouver le résultat quand P est un monôme c'est-à-dire quand $P = X^k$.
Si k est impair, les question 26 et 17 montrent l'égalité (les quantités sont nulles).
S k est pair, les questions 20 et 29 permettent de conclure (les quantités valent $C_{k/2}$).
Par combinaisons linéaires (avec les linéarités évoquées) on a donc

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(x)\sqrt{4-x^2}\,dx}$$

Question III.D

31. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^{p+2q}}$ décroît sur $[2,+\infty[$, quand $|\Lambda_{i,n}| \geq A$, on a

$$|\Lambda_{i,n}|^p = \frac{|\Lambda_{i,n}|^{2p+2q}}{|\Lambda_{i,n}|^{p+2q}} \leq \frac{|\Lambda_{i,n}|^{2p+2q}}{|A|^{p+2q}}$$

On somme ces inégalités et on majore ensuite en ajoutant des quantités positives :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} |\Lambda_{i,n}|^p \leq \frac{1}{A^{p+2q}}\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}$$

Par croissance et linéarité de l'espérance (l'existence des espérances est acquise depuis la question 21 et de toutes les façons, les quantités sont positives et on pourrait se permettre les calcul dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), on a donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leq \frac{1}{A^{p+2q}}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)}$$

32. On fixe $p \in \mathbb{N}$.
La question 19 donne $m_{2(k+1)} \leq 4m_{2k}$ et donc (récurrence simple) $m_{2k} \leq 4^k$.
On remarque que $0 \leq \frac{1+m_{2(p+q)}}{A^{p+2q}} \leq \frac{1}{A^{p+2q}} + \frac{4^{p+q}}{A^{p+2q}} = \frac{1}{A^{p+2q}} + \frac{4^p}{A^p}\left(\frac{2}{A}\right)^{2q}$ est de limite nulle quand $q \to +\infty$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe un entier q tel que $\frac{1+m_{2(p+q)}}{A^{p+2q}} \leq \varepsilon$.
La question 30 donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) = m_{2(p+q)}$$

et il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) = 1 + m_{2(p+q)}$$

Avec le choix fait pour q, on a alors (avec l'inégalité de la question 31)

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leq \varepsilon$$

On a montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) = 0}$$

33. $\frac{f(x)-P(x)}{x^p} = \frac{f(x)}{x^p} - \frac{P(x)}{x^p}$. Comme f est bornée, le premier terme est borné au voisinage des infinis (majoré en module par $|f(x)|$ pour $|x| \geq 1$). Comme P est de degré p, le second terme tend en module vers le module du coefficient dominant de P aux infinis.
Il existe donc $B > A$ et une constante c telle que

$$\forall |x| \geq B,\ \left|\frac{f(x)-P(x)}{x^p}\right| \leq c$$

Mais comme $x \mapsto \frac{f(x)-P(x)}{x^p}$ est continue sur le compact $[-B,-A] \cup [A,B]$, elle est bornée aussi sur ce compact. Elle l'est donc sur $\mathbb{R}\backslash]-A,A[$.

$$\boxed{\exists K,\ \forall |x| \geq A,\ |f(x)-P(x)| \leq K|x|^p \text{ si } P \text{ est un polynôme de degré } p}$$

34. On a donc

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} |f-P|(\Lambda_{i,n}) \leq K \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} |\Lambda_{i,n}|^p$$

On multiplie par $1/n$, on passe à l'espérance (opération croissante) et on utilise la question 32 et le théorème d'encadrement pour conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} |f-P|(\Lambda_{i,n})\right) = 0}$$

35. Soit f continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On fixe $A > 2$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P tel que $\|f-P\|_{\infty,[-A,A]} \leq \varepsilon$.
On écrit que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,dx = I_n + J_n + K_n$$

$$I_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (f-P)(\Lambda_{i,n})\right)$$

$$J_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n P(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(x)\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} (f-P)(x)\sqrt{4-x^2}\,dx$$

- Comme $[-2,2] \subset [-A,A]$, $|K_n| \leq \varepsilon m_0 = \varepsilon$.
- La question 30 donne un rang n_1 à partir duquel $|J_n| \leq \varepsilon$.
- On découpe I_n en deux morceaux :

$$I_n = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ |\Lambda_{i,n}|\geq A}} (f-P)(\Lambda_{i,n})\right) + \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ |\Lambda_{i,n}|< A}} (f-P)(\Lambda_{i,n})\right) = I'_n + I''_n$$

La question 34 donne un rang n_1 à partir duquel $|I'_n| \leq \varepsilon$.
On a $|I''_n| \leq \varepsilon$ (le module de chaque terme dans la somme est majoré par ε).

Ainsi, pour $n \geq \max(n_1, n_2)$,

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,dx\right| \leq 4\varepsilon$$

et on a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,dx}$$

IV. Loi du demi-cercle, cas général

Question IV.A

36. On suppose X d'espérance finie. Comme $|X\mathbf{1}_{|X|\leq C}| \leq |X|$, $X\mathbf{1}_C$ est aussi d'espérance finie. Par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leq C}) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{1}_{[0,C]}(|x|)\mathbb{P}(X=x)$$

Comme X est une variable aléatoire discrète elle ne prend qu'un nombre dénombrable ou fini de valeurs. On peut donc trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels distincts telle que $X(\Omega) \subset \{x_k,\ k\in\mathbb{N}\}$. Comme les familles considérées sont sommables, on peut sommer les termes dans l'ordre que l'on veut et on a

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_C) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\mathbf{1}_{[0,C]}(|x_k|)\mathbb{P}(X=x_k)$$

Notons $f_k : C \mapsto x_k\mathbf{1}_{[0,C]}(|x_k|)\mathbb{P}(X=x_k)$. Pour tout k, $f_k(C) \to x_k\mathbb{P}(X=x_k)$ quand $C\to+\infty$. De plus

$$\forall k,\ \forall C\geq 0,\ |f_k(C)| \leq |x_k|\mathbb{P}(X=x_k)$$

et le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de double limite s'applique et donne

$$\lim_{C\to+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(C) = \mathbb{E}(X)$$

et ainsi

$$\boxed{\lim_{C\to+\infty}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leq C}) = \mathbb{E}(X)}$$

37. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C}) &= \mathbb{E}((X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C})^2) - \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C})^2 \\ &= \mathbb{E}(X_{i,j}^2\mathbf{1}_{|X_{i,j}^2|\leq C^2}) - \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C})^2\end{aligned}$$

On peut appliquer la question précédente avec $X_{i,j}$ d'une part et $X_{i,j}^2$ d'autre part pour obtenir (quand $C \to +\infty$, $C^2 \to +\infty$)

$$\lim_{C\to+\infty} \mathbb{V}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C}) = \mathbb{E}(X_{i,j}^2) - \mathbb{E}(X_{i,j})^2$$

Ainsi (le passage à la racine carrée est continu)

$$\boxed{\lim_{C\to+\infty} \sigma_{i,j}(C) = \sigma(X_{i,j}) = 1}$$

38. Un terme de limite 1 fini par être plus grand que 1/2 et donc non nul. Ainsi $\sigma_{i,j}(C) \neq 0$ pour C assez grand et

$$\boxed{\widehat{X}_{i,j}(C) \text{ est bien définie pour } C \text{ grand}}$$

Il est immédiat que $\boxed{\widehat{X}_{i,j}(C) \text{ est centrée réduite}}$ et le lemme des coalitions indique, puisque les $X_{i,j}$ sont indépendantes (pour les $i \leq j$), que

$$\boxed{\text{Les } \widehat{X}_{i,j}(C) \text{ pour } 1 \leq i \leq j \text{ sont indépendantes}}$$

On a enfin

$$\forall \omega \in \Omega,\ |\widehat{X}_{i,j}(C)(\omega)| \leq \frac{|C| + \mathbb{E}(|X_{i,j}|\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C})}{\sigma_{i,j}(C)} \leq \frac{2C}{\sigma_{i,j}(C)}$$

et donc

$$\boxed{\text{Les } \widehat{X}_{i,j}(C) \text{ sont bornées}}$$

39. On a

$$X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C} = X_{i,j}(1 - \mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C})$$

et en passant à l'espérance

$$\mathbb{E}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|\leq C}) = \mathbb{E}(X_{i,j}) - \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C}) = -\mathbb{E}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C})$$

On en déduit que

$$\sigma_{i,j}(C)\widehat{X}_{i,j}(C) = X_{i,j} - X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C} + \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C})$$

et ainsi

$$\boxed{X_{i,j} - \widehat{X}_{i,j}(C) = X_{i,j}\left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right) + \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\left(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C})\right)}$$

40. Posons

$$A(C) = X_{i,j}\left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right) \quad \text{et} \quad B(C) = \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\left(X_{i,j}\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{|X_{i,j}|>C})\right)$$

On a alors

$$(X_{i,j} - \widehat{X}_{i,j}(C))^2 = (A(C) + B(C))^2 \leq 2A(C)^2 + 2B(C)^2$$

On passe à l'espérance et on veut obtenir le fait que les deux termes du membre de droite tendent vers 0

- $\mathbb{E}(A(C)^2) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)^2$ (car $1 = \mathbb{V}(X_{i,j}) = \mathbb{E}(X_{i,j}^2)$) et ce terme est de limite nulle.

- $\mathbb{E}(B(C)) = 0$ et donc $\mathbb{E}\left(B(C)^2\right) = \mathbb{V}(B(C)) = \dfrac{\mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbf{1}_{|X_{ij}|>C}\right)}{\sigma_{ij}(C)^2}$

  or $\mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbf{1}_{|X_{ij}|>C}\right) = \mathbb{E}\left(\left(X_{ij}\mathbf{1}_{|X_{ij}|>C}\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(\left(X_{ij}\mathbf{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\mathbf{1}_{|X_{ij}|>C}\right)$ donc

$$0 \leq \mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbf{1}_{|X_{ij}|>C}\right) \leq \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\right) - \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\mathbf{1}_{|X_{ij}|^2\leq C^2}\right)$$

  Ainsi d'après Q36 et le théorème d'encadrement : $\mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbf{1}_{|X_{ij}|>C}\right) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$ et donc aussi $\mathbb{E}(B(C)^2) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$.

On a donc

$$\boxed{\lim_{C\to+\infty} \mathbb{E}((X_{i,j} - \widehat{X}_{i,j}(C))^2) = 0}$$

Question IV.B

41. Par linéarité et croissance de l'intégrale, on a

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{\Lambda}_{i,n})\right)\right| \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(|f(\Lambda_{i,n}) - f(\widehat{\Lambda}_{i,n})|)\right)$$

Avec le caractère K-lipschitzien de f, ceci donne

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{\Lambda}_{i,n})\right)\right| \leq \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}|\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n}|\right)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ permet d'affirmer que

$$\sum_{i=1}^{n}|\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n}| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n})^2}$$

et avec la question 8

$$\sum_{i=1}^{n}(|\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n}|) \leq \sqrt{n}\|\frac{1}{\sqrt{n}}M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\widehat{M_n}(C)\|_F$$

On en déduit ainsi que

$$\boxed{\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{\Lambda}_{i,n})\right)\right| \leq \frac{K}{n}\mathbb{E}(\|M_n - \widehat{M_n}(C)\|_F)}$$

42. Soit $\varepsilon > 0$. La question 40 montre que pour C assez grand,

$$\mathbb{E}(\|M_n - \widehat{M}_n(C)\|_F^2 \leq n^2\varepsilon^2$$

Les $\sigma_{i,j}(C)$ étant tous de limite 1, les quantités sont toutes plus grandes que $1/2$ pour C assez grand et pour de tels C, la question 38 montre que les $\widehat{X}_{i,j}(C)$ sont uniformément bornées (majorées en module par $4C$).
On peut donc choisir un C tel qu'on ait cette propriété de borne uniforme ET simultanément

$\mathbb{E}(\|M_n - \widehat{M}_n(C)\|_F) \leq n\varepsilon$.
On fait un tel choix pour C et on a donc

$$\forall n, \quad \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{\Lambda}_{i,n})\right)\right| \leq K\varepsilon$$

On peut aussi utiliser la partie III et affirmer qu'il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{\Lambda}_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\, dx\right| \leq \varepsilon$$

On a donc finalement

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\, dx\right| \leq (K+1)\varepsilon$$

On a donc montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\, dx}$$

Question IV.C

43. *La preuve suivante est fournie par Alexandre Bardet.*
L'idée essentielle est de se ramener au segment $[-2, 2]$, sur lequel on peut approcher f par une fonction de classe C^1 et donc lipschitzienne.
L'objectif est de majorer en module la quantité

$$U_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\, dx$$

On fixe $\varepsilon > 0$ que l'on choisit tel que $\varepsilon < 2$ (la raison en apparaît ensuite).
Par théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_{\infty,[-2,2]} \leq \varepsilon$.
On note g la fonction telle que $\forall x < -2,\ g(x) = P(-2)$, $\forall x \in [-2, 2],\ g(x) = P(x)$ et $\forall x > 2,\ g(x) = P(2)$. On obtient ainsi une fonction g qui est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. De plus, en notant M une borne pour $|f|$, alors pour tout x on a $|f(x) - g(x)| \leq 2M + 2 = B$ (borne indépendante de ε).
On découpe U_n en trois morceaux : $U_n = V_n + W_n + X_n$ avec

$$V_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f-g)(\Lambda_{i,n})\right)$$

$$W_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} g(x)\sqrt{4-x^2}\, dx$$

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}(g-f)(x)\sqrt{4-x^2}\, dx$$

- D'après la question précédente, $W_n \to 0$ et est plus petit en module que ε pour n assez grand, disons $n \geq n_1$.
- $|X_n| \leq \|f - g\|_{\infty,[-2,2]} m_0 \leq \varepsilon$.

- Pour s'occuper de V_n, on va distinguer selon l'appartenance de $\Lambda_{i,n}$ à $[-2,2]$. On écrit donc que

$$V_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f-g)(\Lambda_{i,n})\mathbf{1}_{|\Lambda_{i,n}|\leq 2}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f-g)(\Lambda_{i,n})\mathbf{1}_{|\Lambda_{i,n}|>2}\right) = V_n' + V_n''$$

On a immédiatement

$$|V_n'| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(|(f-g)(\Lambda_{i,n})|\mathbf{1}_{|\Lambda_{i,n}|\leq 2}\right) \leq \varepsilon$$

On a vu que $f-g$ est bornée sur $\mathbb{R}$, majorée en module par B, et ainsi

$$|V_n''| \leq \frac{B}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{|\Lambda_{i,n}|>2}\right) = \frac{B}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-2,2]}(\Lambda_{i,n})\right)$$

Soit h la fonction nulle $[-2+\varepsilon, 2-\varepsilon]$, valant 1 hors de $[-2,2]$ avec raccord affine de sorte à assurer la continuité. C'est une fonction bornée et lipschitzienne (le rapport dépend bien sûr de ε, en l'occurrence il vaut $1/\varepsilon$). De plus $\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-2,2]} \leq h$. Ainsi

$$|V_n''| \leq \frac{B}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(h(\Lambda_{i,n})\right)$$

La question précédente montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(h(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}h(t)\sqrt{4-t^2}\,dt \leq \frac{2\varepsilon}{\pi}$$

Pour n assez grand, disons $n \geq n_2$, le majorant de $|V_n''|$ est donc plus petit que $\frac{2B\varepsilon}{\pi}$.

On a finalement

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2),\ |U_n| \leq \left(3 + \frac{2B}{\pi}\right)\varepsilon$$

et $U_n \to 0$.

$$\boxed{\text{La loi du demi-cercle est vraie dans le cas général}}$$