Première partie

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Les termes de la série sont bien définis. De plus quand $n \to +\infty$, on a

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{x^2-n^2} = \mathcal{O}(1/n^2)$$

Or la série $\sum 1/n^2$ converge donc par comparaison à une série à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série définissant } g(x) \text{ est absolument convergente donc convergente}}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On a bien $-x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{-x+n} + \frac{1}{-x-n}\right) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) = -g(x)$$

De plus f est impaire car cos est paire et sin est impaire ainsi $\boxed{\text{les fonctions } g \text{ puis } \mathrm{D} = f - g \text{ sont impaires}}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On a bien $x+1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

On remarque que $f(x+1) = \pi\dfrac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = f(x)$ donc f est 1-périodique.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right) + \frac{1}{x+\mathrm{N}+1} - \frac{1}{x-\mathrm{N}}$$

or $\frac{1}{x+\mathrm{N}+1} - \frac{1}{x-\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$. Ainsi par unicité de la limite : $g(x+1) = g(x)$

d'où $\boxed{\text{les fonctions } g \text{ puis } \mathrm{D} = f - g \text{ sont périodiques de période 1}}$

(d) Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$ de plus $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}$.

Donc par quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Je pose pour $u_0 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}$ pour $n \geqslant 1$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

(ii) Soit deux réels $a < b$ tels que $[a,b] \subset (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$.

On note $\mathrm{N} = 1 + \max(\lfloor |a| \rfloor, \lfloor |b| \rfloor)$ de sorte que $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in [a,b]$. On a $|x| \leqslant \mathrm{N}$ et ainsi pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $u_n(x) = \dfrac{-2x}{n^2-x^2}$. D'où

$$\forall n \geqslant \mathrm{N},\ \forall x \in [a,b],\ |u_n(x)| = \frac{2|x|}{n^2-x^2} \leqslant \frac{\mathrm{N}}{n^2}$$

Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant \mathrm{N}} u_n$ converge normalement sur $[a,b]$

donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant \mathrm{N}} u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

ainsi comme $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$

la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément au voisinage de tout point de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (ii)

Par théorème de cours avec (i) et (ii) $\boxed{\text{la fonction } g \text{ puis D est continue sur } \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}}$

Il aurait été plus malin et simple de prouver la convergence uniforme sur tout segment de $]0,1[$ *puis d'utiliser la 1-périodicité.*

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Par l'absurde, si $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ alors $x \in 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ (absurde) et si $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}$ alors $x+1 \in 2\mathbb{Z}$ et donc $x \in \mathbb{Z}$ (absurde)
De plus $\cos(\pi(1+x)/2) = \sin(\pi x/2)$ et $\sin(\pi(1+x)/2) = -\cos(\pi x/2)$, donc

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = \pi\frac{-\cos^2(\pi x/2)+\sin^2(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)\left[-\cos(\pi x/2)\right]} = 2\pi\frac{\cos^2(\pi x/2)-\sin^2(\pi x/2)}{2\sin(\pi x/2)\cos(\pi x/2)}$$

on a bien $\boxed{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x)}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right)$ est bien défini comme ci dessus.
Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Je note $\mathrm{S_N} : t \mapsto \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{t+n} + \frac{1}{t-n}\right)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S_N}\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \frac{1}{x/2} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{x/2+n} + \frac{1}{x/2-n}\right) + \frac{1}{(x+1)/2} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{(x+1)/2+n} + \frac{1}{(x+1)/2-n}\right)\\
&= \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{2}{x+2n} + \frac{2}{x-2n}\right) + \frac{2}{x+1} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{2}{x+2n+1} + \frac{2}{x-(2n-1)}\right)\\
&= \frac{2}{x} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2\mathrm{N}}\left(\frac{2}{x+k} + \frac{2}{x-k}\right) + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2\mathrm{N}}\left(\frac{2}{x+k} + \frac{2}{x-k}\right) + \frac{2}{x+2\mathrm{N}+1}\\
&= 2\left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)\right] + \frac{2}{x+2\mathrm{N}+1}\\
&= 2\mathrm{S_{2N}}(x) + \frac{2}{x+2\mathrm{N}+1}
\end{aligned}$$

Par unicité de la limite quand $\mathrm{N} \to +\infty$, on obtient $\boxed{g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2g(x)}$

3. (a) En établissant une convergence uniforme analogue 1(d), on établit que

la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$ est continue sur $]-1,1[$

donc $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} h(0) = 0$ d'où

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

D'un autre côté quand $x \to 0$, on a $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{x\pi\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)}$
et $x\pi\cos(\pi x) - \sin(\pi x) = \pi x\left(1 - \mathcal{O}(x^2)\right) - \left(\pi x + \mathcal{O}(x^3)\right) = \mathcal{O}(x^3) = \mathrm{o}(x^2)$
et $x\sin(\pi x) \sim \pi x^2$ donc $f(x) - \frac{1}{x} = \mathrm{o}(1)$
Ainsi $\mathrm{D}(x) = f(x) - g(x) = \mathrm{o}(1)$ d'où $\mathrm{D}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
Ainsi D se prolonge par continuité en 0 par $\widetilde{\mathrm{D}}$ tel que $\widetilde{\mathrm{D}}(0) = 0$.
Comme D est définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ selon 1, alors

$\boxed{\text{la fonction D se prolonge par continuité en une fonction } \widetilde{\mathrm{D}} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } \widetilde{\mathrm{D}}(0) = 0}$

On remarque que $\forall k \in \mathbb{Z},\ \widetilde{\mathrm{D}}(k) = 0$ car D est 1-périodique et ainsi $\widetilde{\mathrm{D}}$ est 1-périodique.

(b) Comme $\widetilde{\mathrm{D}}$ est continue sur le segment $[0,1]$,

le théorème des bornes atteintes nous fournit $\boxed{\alpha \in [0,1] \text{ tel que } \widetilde{\mathrm{D}}(\alpha) = \mathrm{M}}$

En utilisant 2, par différence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{x}{2}\right) + \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\widetilde{\mathrm{D}}(x)$$

Par continuité de $\widetilde{\mathrm{D}}$ et comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{x}{2}\right) + \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\widetilde{\mathrm{D}}(x)$$

Ainsi $\widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2\widetilde{\mathrm{D}}(\alpha) = 2\mathrm{M}$

On remarque que comme $\widetilde{\mathrm{D}}$ est 1-périodique, alors $\mathrm{M} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \widetilde{\mathrm{D}}(t)$ donc $\widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \mathrm{M}$ et $\widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \leqslant \mathrm{M}$.

Par l'absurde si $\widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \mathrm{M}$, alors $2\mathrm{M} < \mathrm{M} + \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \leqslant 2\mathrm{M}$. Absurde donc $\widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \mathrm{M}$

Par récurrence, l'initialisation étant triviale et l'hérédité se faisant comme ci-dessus : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \mathrm{M}}$

4. On a $\dfrac{\alpha}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{\mathrm{D}}(0) = 0$ par continuité donc $\mathrm{M} = 0$.

   Par continuité, $\widetilde{\mathrm{D}}$ est impaire donc $-\mathrm{M} = \widetilde{\mathrm{D}}(-\alpha) = \min\limits_{t\in\mathbb{R}} \widetilde{\mathrm{D}}(t)$

   Ainsi $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \widetilde{\mathrm{D}}(t) \leqslant 0$ d'où $\boxed{\text{la fonction } \widetilde{\mathrm{D}} \text{ est nulle sur } \mathbb{R}}$

   Ainsi $f = g$ et en multipliant par x, on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ \pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}}$

5. (a) Soit $x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\setminus \{0\}$. Je note $t = \dfrac{x}{2\pi}$ de sorte que $t \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$.

   Ainsi avec 4, on a :

$$\frac{x}{2} \operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = \pi t \operatorname{cotan}(\pi t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{t^2 - n^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{n^2\left(1 - (t/n)^2\right)}$$

   or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant (t/n)^2 < 1$ donc par somme géométrique, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{n^2\left(1 - (t/n)^2\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{n^2} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (t/n)^{2j}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2(j+1)}}{n^{2(j+1)}}$$

   Comme on part d'une somme convergente, la famille double de réels positifs est sommable et on peut appliquer Fubini et effectuer un changement d'indice bijectif :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{n^2\left(1 - (t/n)^2\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{n^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{n^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) t^{2k}$$

   Ce qui permet de conclure que $\boxed{\frac{x}{2} \operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} x^{2k}}$

(b) Soit $x \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}$. On a bien $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}\right) = 2\mathrm{i}\sin(x/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}$. Ainsi

$$\frac{\mathrm{i}x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1} = \frac{\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}}{2\mathrm{i}\sin(x/2)} = \frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{i}\frac{x}{2}$$

En utilisant (a), on en déduit que $\boxed{\frac{\mathrm{i}x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1} = 1 - \frac{\mathrm{i}x}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \cdot x^{2k}}$

6. Comme $\mathrm{i}^2 = -1$, on a d'après la question précédente (c'est aussi vrai pour $x = 0$) :

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \quad \mathrm{i}x = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1\right)\left(1 - \frac{\mathrm{i}x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \cdot (\mathrm{i}x)^{2k}\right)$$

Je considère la somme de la série entière $\mathrm{G} : u \mapsto 1 - \frac{\mathrm{i}u}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \cdot (\mathrm{i}u)^{2k}$

Son rayon de convergence est $\geqslant 2\pi$ d'après ce qui précède.

De plus, la fonction exponentielle étant développable en série entière de rayon infini, alors par produit de Cauchy de séries entières,

la fonction $\mathrm{H} : u \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - 1\right)\mathrm{G}(u)$ est développable en série entière de rayon $\geqslant 2\pi$.

C'est le cas également pour $\mathrm{K} : u \longmapsto \mathrm{i}u$ de rayon ∞

Or K et H coïncident sur $]-2\pi, 2\pi[$ un voisinage réel de 0

donc les coefficients sont identiques ainsi elles coïncident sur le disque ouvert de rayon 2π centré en 0 :

$$\forall u \in \mathbb{C},\ |u| < 2\pi \Longrightarrow \mathrm{i}u = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - 1\right)\left(1 - \frac{\mathrm{i}u}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \cdot (\mathrm{i}u)^{2k}\right)$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2\pi$. On a $\left|\frac{z}{\mathrm{i}}\right| < 2\pi$ et donc

$$\boxed{z = (\mathrm{e}^z - 1)\left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} z^{2k}\right)}$$

7. (a) Par quotient h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus d'après la question précédente, on a

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \quad h(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \cdot x^{2k}$$

Ainsi h est développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$ et y est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ainsi la fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in]-2\pi, 2\pi[,\ h(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{h^{(p)}(0)}{p!} x^p$

Ainsi par unicité du développement en série entière, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\zeta(2n)}$$

(b) On vient de voir que sur $]-2\pi, 2\pi[$, h est la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{b_n}{n!} x^n$ car $0! = 1! = 1$.

Je pose $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)$ et K la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$

de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{K}(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ et $k(0) = 1$.
Je pose également $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = 0$ et ainsi

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 1 = \mathrm{K}(x)h(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right)$$

Par unicité et produit de Cauchy, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b_k}{k!} a_{n-k}$

Ce qui permet de conclure : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}}$

(c) D'après la question précédente comme $2 \geqslant 1$, on a : $0 = \dfrac{b_0}{0!\cdot 3!} + \dfrac{b_1}{1!\cdot 2!} + \dfrac{b_2}{2!\cdot 1!} = 1/6 - 1/4 + b_2/2$

donc $b_2 = 2\,(1/4 - 1/6) = 1/2 - 1/3$ d'où $\boxed{b_2 = \dfrac{1}{6}}$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \zeta(2n) = \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} b_{2n}$ donc $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{(-1)^0 2^1 \pi^2}{2!} b_2 = \dfrac{\pi^2}{6}}$

Ensuite $0 = \dfrac{b_0}{0!\cdot 5!} + \dfrac{b_1}{1!\cdot 4!} + \dfrac{b_2}{2!\cdot 3!} + \dfrac{b_3}{3!\cdot 2!} + \dfrac{b_4}{4!\cdot 1!}$

donc $b_4 = -\dfrac{b_0}{5} - b_1 - 2b_2 = -1/5 + 1/2 - 2/6 = (-6 + 15 - 10)/30$ d'où $\boxed{b_4 = \dfrac{-1}{30}}$

Ainsi $\zeta(4) = \dfrac{(-1)^1 2^3 \pi^4}{4!} b_4 = +\dfrac{\pi^4}{3! \times 15}$ d'où $\boxed{\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}}$

Puis $0 = \dfrac{b_0}{0!\cdot 7!} + \dfrac{b_1}{1!\cdot 6!} + \dfrac{b_2}{2!\cdot 5!} + \dfrac{b_4}{4!\cdot 3!} + \dfrac{b_6}{6!\cdot 1!}$

donc $b_6 = -b_0/7 - b_1 - 3b_2 - 5b_4 = -1/7 + 1/2 - 1/2 + 1/6$ d'où $\boxed{b_6 = \dfrac{1}{42}}$

Ainsi $\zeta(6) = \dfrac{(-1)^2 2^5 \pi^6}{6!} b_6 = \dfrac{2^5\pi^6}{6! \times 7 \times 6} = \dfrac{\pi^6}{1 \times 1 \times 3 \times 1 \times 5 \times 3 \times 7 \times 3}$ d'où $\boxed{\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}}$

Deuxième partie

8. (a) Soit $\mu \in \mathscr{M}(\mathrm{E})$. On a $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}),\ 0 \leqslant \mu(\mathrm{A}) \leqslant 1$ et ainsi μ est bornée.
d'où $\boxed{\mathscr{M}(\mathrm{E}) \text{ est une partie de } \mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})}$

(b) *Tiens une question de cours ! Il s'agit de montrer que la norme infinie est bien une norme.*

Soit f et $g \in \mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons : $\begin{cases} \|f\| \in \mathbb{R}^+ \text{ (dont l'existence)} \\ \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \\ \|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \\ \|\lambda f\| = 0 \Longrightarrow f = 0 \end{cases}$

(i) L'ensemble $\{|f(\mathrm{A})|, \quad \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ d'où l'existence de borne supérieure dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\|f\| \in \mathbb{R}^+$.

(ii) On a $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}),\ |(f+g)(\mathrm{A})| \leqslant |f(\mathrm{A})| + |g(\mathrm{A})| \leqslant \|f\| + \|g\|$
d'où $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$

(iii) Si $\lambda = 0$, alors on a bien $\|\lambda f\| = 0 = |\lambda| \cdot \|f\|$
Si $\lambda \neq 0$, on a $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}),\ |\lambda f(\mathrm{A})| = |\lambda| \cdot |f(\mathrm{A})| \leqslant |\lambda| \cdot \|f\|$
donc $\|\lambda f\| \leqslant |\lambda| \cdot \|f\|$
On applique ce résultat à $1/\lambda$ et λf $\|1 \cdot f\| \leqslant |1/\lambda| \cdot \|\lambda f\|$
donc $|\lambda| \cdot \|f\| \leqslant \|\lambda f\|$
Ainsi $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ dans tous les cas.

(iv) On suppose $\|\lambda f\| = 0$ donc $\sup\{|f(\mathrm{A})|, \quad \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})\} = 0$
ainsi $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}),\ f(\mathrm{A}) = 0$ ce que l'on voulait.

On conclut que $\boxed{\|\cdot\| \text{ définit une norme sur l'espace vectoriel } \mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})}$

9. On suppose que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})$.
La norme étant celle de la convergence uniforme, alors la suite converge uniformément (μ_n) vers μ sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.
Ainsi la suite converge simplement (μ_n) vers μ sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$
donc pour tout $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, la suite $(\mu_n(\mathrm{A}))$ vers $\mu(\mathrm{A})$.
En particulier pour les singletons, on obtient : $\boxed{\forall x \in \mathrm{E},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(x) \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(\{x\}) = \mu(\{x\}) = \mu(x) \quad (1)}$

10. (a) Avec les notations de l'énoncé, on a l'union disjointe dénombrable : $\mathrm{E} = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \{x_i\}$.

Ainsi $1 = \mu(\mathrm{E}) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu(x_i) = \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(x_i)$ or $1 > 1 - \varepsilon$.

Ceci nous fournit $m \geqslant 1$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu(x_i) > 1 - \varepsilon$.

On pose $\mathrm{F}_\varepsilon = \{x_i \mid i \in [\![1, m]\!]\}$ et ainsi $\mu(\mathrm{F}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

$$\boxed{\text{il existe bien une partie finie } \mathrm{F}_\varepsilon \text{ de E tel que } \mu(\mathrm{F}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon}$$

Par hypothèse, on a : $\forall i \in [\![1, m]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} |\mu_n(x_i) - \mu(x_i)| = 0$

Par somme finie, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{x\in\mathrm{F}_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| = 0$

ce qui nous fournit $\boxed{\text{un entier } \mathrm{N}_\varepsilon \geqslant 0 \text{ tel que pour tout entier } n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon, \text{ on ait } \sum\limits_{x\in\mathrm{F}_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon}$

(b) Comme on a l'union disjointe $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon) \bigcup (\mathrm{A} \setminus \mathrm{F}_\varepsilon)$, alors $\mu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon) + \mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{F}_\varepsilon)$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme c'est analogue pour μ_n, par inégalités triangulaires successives :

$$|\mu_n(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{A})| \leqslant |\mu_n(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon)| + |\mu_n(\mathrm{A} \setminus \mathrm{F}_\varepsilon) - \mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{F}_\varepsilon)|$$

d'où

$$|\mu_n(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{A})| \leqslant |\mu_n(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon)| + \mu(\mathrm{A} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon) + \mu_n(\mathrm{A} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon)$$

On a $\mathrm{A} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon \subset \mathrm{E} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon$ or μ et μ_n est croissante pour l'inclusion, on obtient :

$$\boxed{|\mu_n(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{A})| \leqslant |\mu_n(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon)| + \mu(\mathrm{E} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon) + \mu_n(\mathrm{E} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon)}$$

On suppose que $n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon$. Comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon \subset \mathrm{F}_\varepsilon$ (parties finies), on a alors avec (a)

$$|\mu_n(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}_\varepsilon)| \leqslant \left| \sum_{x \in \mathrm{F}_\varepsilon \cap \mathrm{A}} (\mu_n(x) - \mu(x)) \right| \leqslant \sum_{x \in \mathrm{F}_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon$$

et de plus, $\mu(\mathrm{E} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon) = 1 - \mu(\mathrm{F}_\varepsilon) < \varepsilon$ car $\mu(\mathrm{F}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.
On a, de manière analogue :

$$\mu_n(\mathrm{E} \backslash \mathrm{F}_\varepsilon) = 1 - \mu(\mathrm{F}_\varepsilon) - (\mu_n(\mathrm{F}_\varepsilon) - \mu(\mathrm{F}_\varepsilon)) \leqslant \mu(\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}_\varepsilon) + |\mu_n(\mathrm{F}_\varepsilon) - \mu(\mathrm{F}_\varepsilon)| < 2\varepsilon$$

On en déduit que $\boxed{\text{si } n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon, \text{ alors } |\mu_n(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{A})| < 4\varepsilon}$

(c) On vient de montrer que en supposant que la suite vérifie la condition (1) :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}), \quad n \geqslant m \Longrightarrow |\mu_n(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{A})| < \varepsilon$$

en prenant $m = \mathrm{N}_{\varepsilon/4}$ dont le choix ne dépend que de ε, μ et la suite (μ_n).
Ainsi la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers μ sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$
c'est dire $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})$ (muni de la norme infinie).
La réciproque a été traitée en 9.

$\boxed{\text{la suite } (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \mu \text{ dans } \mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R}) \text{ si et seulement si elle vérifie la condition (1)}}$

11. Par l'absurde on suppose que $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})$ vers une limite notée $\mu \in \mathscr{M}(\mathrm{E})$.
Selon la condition (1), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(x_n) = \lim\limits_{k \to +\infty} \delta_k(x_n)$.
Or $\forall k > n$, $\delta_k(x_n) = 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(x_n) = 0$.
Ainsi comme $\mu \in \mathscr{M}(\mathrm{E})$, alors $1 = \mu(\mathrm{E}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(x_n) = 0$. Absurde !
On conclut que $\boxed{\text{la suite } (\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas dans } \mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})}$

12. (a) On va construire la suite d'extractrices par récurrence.
On remarque que : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(x_i) \in [0,1]$ car $\mu_n \in \mathscr{M}(\mathrm{E})$.

Initialisation : La suite $(\mu_n(x_i))_{n \geqslant 1}$ est à valeurs dans le segment $[0,1]$. Bolzano-Weierstrass nous fournit alors $\varphi_1 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\left(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir construit $\varphi_1, \ldots \varphi_p$ p applications strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$ dans N^* telle que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant k$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
Bolzano-Weierstrass appliqué la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_p(n)}(x_{p+1})\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nous fournit $\varphi_{p+1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_p \circ \varphi_{p+1}(n)}(x_{p+1})\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
De sorte que pour tout $k \in [\![1, p+1]\!]$ et pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant k$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Conclusion : on bien construit la suite voulue.

On a bien l'existence d'une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$ dans N^* telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant k$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

(b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Soit $p > k \geqslant i$.
Comme la composée d'applications strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$ est strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$, alors $\varphi_{k+1} \circ \ldots \circ \varphi_p : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est strictement croissante.
Alors $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_p(n)}(x_i)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Comme toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, alors

$\boxed{\text{pour tout entier } k \geqslant i, \text{ la limite de la suite } \left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ne dépend que de } i \text{ et pas de } k}$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k$ est strictement croissante par composition
or $k \leqslant \varphi_{k+1}(k) < \varphi_{k+1}(k+1)$ car φ_{k+1} est une extractrice donc

$$\psi(k) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(k) < \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k\left(\varphi_{k+1}(k+1)\right) = \psi(k+1)$$

Ainsi $\boxed{\text{l'application } \psi \text{ est strictement croissante}}$ (c'est une extractrice)
On pose pour $k \in [\![1, i]\!]$, $\psi_i(k) = k$ et pour $k \geqslant i+1$, $\psi_i(k) = \varphi_{i+1} \circ \ldots \circ \varphi_k(k)$.
De la même manière l'application ψ_i est strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$, c'est une extractrice.
La suite $\left(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_i(n)}\left(x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mu_\infty\left(x_i\right)$ selon 12(b).
Par ailleurs pour tout $k \geqslant i$, on a $\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_i \circ \psi_i(k) = \psi(k)$,
donc en tant que suite extraite, la suite $\left(\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right)\right)_{k \geqslant i}$ converge vers $\mu_\infty\left(x_i\right)$.

$\boxed{\text{la suite } \left(\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right)\right)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \mu_\infty\left(x_i\right)}$

(d) Comme la suite $\left(\mu_\psi(k)\left(x_i\right)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car les μ_n sont des probabilités
ainsi par passage à la limite $\boxed{\mu_\infty\left(x_i\right) \geqslant 0, \text{ pour tout } i \text{ de } \mathbb{N}^*}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mu_{\psi(k)} \in \mathscr{M}(\mathrm{E})$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\psi(k)}\left(x_i\right) = 1$.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mu_{\psi(k)}\left(x_i\right) = \mu_{\psi(k)}\left(\left\{x_i \mid i \in [\![1, \mathrm{N}]\!]\right\}\right) \leqslant 1$.

En faisant tendre k vers $+\infty$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mu_\infty\left(x_i\right) \leqslant 1$.

Ainsi la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mu_\infty\left(x_i\right)\right)_{\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1.

d'où la convergence de la série de somme $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\infty\left(x_i\right) \leqslant 1}$

(e) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $\left(\mu_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue, cela nous fournit une partie finie F_ε de E telle que $\mu_n\left(\mathrm{F}_\varepsilon\right) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout entier naturel n.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{x \in \mathrm{F}_\varepsilon} \mu_n(x) \geqslant 1 - \varepsilon$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{x \in \mathrm{F}_\varepsilon} \mu_{\psi(k)}(x) \geqslant 1 - \varepsilon$

En passant à la limite, on a obtient $\displaystyle\sum_{x \in \mathrm{F}_\varepsilon} \mu_\infty(x) \geqslant 1 - \varepsilon$

En utilisant (d), la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} \mu_\infty\left(x_i\right)$ est convergente et à terme positifs, on a donc

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_\infty\left(x_i\right) \geqslant 1 - \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_\infty\left(x_i\right) = 1$

Ainsi la famille $(\mu(x))_{x \in \mathrm{E}}$ est une famille de réels positifs sommable de somme 1 ()par permutation).
Selon le théorème des germes des probabilités, on obtient $\boxed{\mu_\infty \in \mathscr{M}(\mathrm{E})}$
or $\forall x \in \mathrm{E}$, $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \mu_{\psi(k)}(x) = \mu_\infty(x)$ selon (c) et la suite $\left(\mu_{\psi(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathscr{M}(\mathrm{E})$
La condition (1) étant vérifiée, la suite extraite $\left(\mu_{\psi(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers μ_∞ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})$.
d'où $\boxed{\mu_\infty \text{ est une valeur d'adhérence de la suite } \left(\mu_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ dans } \mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathbb{R})}$

Troisième partie

13. $(\mathrm{E}, \mathscr{P}(\mathrm{E}))$ est bien espace probabilisable.

Bien définie : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. On a bien $\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\} \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire.

Ainsi on a bien l'existence (et l'unicité) de $\mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\})$ dans $[0,1]$.

$\mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{E})$ **:** On a $\{\mathrm{X} \in \mathrm{E}\} = \{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{E}\} = \Omega$ donc

$$\mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{E}) = \mathbb{P}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{E}\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

σ-aditivité : Soit $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E deux à deux disjointes.

On a

$$\left\{\mathrm{X} \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k\right\} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \mathrm{X}(\omega) \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k\right\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}_k\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{\mathrm{X} \in \mathrm{A}_k\}$$

or pour $i \neq j$ dans $\mathbb{N}$, comme $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$:

$$\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}_i\} \cap \{\mathrm{X} \in \mathrm{A}_j\} = \{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}_i \text{ et } \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}_j\} = \emptyset$$

Ainsi, par σ-additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mu_{\mathrm{X}}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{\mathrm{X} \in \mathrm{A}_k\}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}_k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}_k)$$

Conclusion : $\boxed{\mu_{\mathrm{X}} \text{ est une probabilité sur E}}$

14. Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et A une partie de E.
Selon le cours $1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}}$ est une variable aléatoire vérifiant $1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}))$
c'est à dire que $1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\})$ car $\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\} \in \mathcal{A}$. On a donc

$$\mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}) = \mathbb{E}\left(1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}}\right)$$

d'où par linéarité et comme c'est analogue avec Y : $\mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) - \mu_{\mathrm{Y}}(\mathrm{A}) = \mathbb{E}\left(1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right)$. Or

$$-1 \leqslant -\left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right| \leqslant 1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}} \leqslant \left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right| \leqslant 1$$

Comme les espérances existent bien car les variables aléatoires sont toutes bornées, on a

$$-\mathbb{E}\left(\left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right|\right) \leqslant \mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) - \mu_{\mathrm{Y}}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{E}\left(\left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right|\right)$$

On a bien $\boxed{|\mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) - \mu_{\mathrm{Y}}(\mathrm{A})| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right|\right)}$

Pour G et H partie de Ω, on note $\mathrm{G}\Delta\mathrm{H} = (\mathrm{G} \cup \mathrm{H}) \setminus (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$ (différence symétrique), on a alors

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right|(\omega) = 1 \iff \omega \in \{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}\Delta\{\mathrm{Y} \in \mathrm{A}\}$$

De plus $\left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right|$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ donc

$$\left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right| \sim \mathcal{B}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}\Delta\{\mathrm{Y} \in \mathrm{A}\})$$

On remarque que $(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}\Delta\{\mathrm{Y} \in \mathrm{A}\}) \subset \{\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}\}$ donc

$$\mathbb{E}\left(\left|1_{\{\mathrm{X}\in\mathrm{A}\}} - 1_{\{\mathrm{Y}\in\mathrm{A}\}}\right|\right) = \mathbb{P}(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}\Delta\{\mathrm{Y} \in \mathrm{A}\}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$$

Ainsi $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, $|(\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\mathrm{Y}})(\mathrm{A})| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$
ce qui permet de déduire que $\boxed{\|\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\mathrm{Y}}\| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})}$

15. (a) Soit $\omega \in \Omega$.
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_n(\omega) = \mathrm{X}(\omega)$, alors $\mathrm{L}(\omega) = 0 \in \mathbb{N}$ est bien défini.
Sinon $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{X}_n(\omega) \neq \mathrm{X}(\omega)\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$
car la suite $(\mathrm{X}_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite $\mathrm{X}(\omega)$
donc cet ensemble admet un maximum $\mathrm{L}(\omega) \in \mathbb{N}$.
Ainsi $\boxed{\text{l'application L est bien définie}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\mathrm{X}_n(\omega) \neq \mathrm{X}(\omega)$.
Alors $n \in \{k \in \mathbb{N} \mid \mathrm{X}_k(\omega) \neq \mathrm{X}(\omega)\}$
donc $n \leqslant \max\{k \in \mathbb{N} \mid \mathrm{X}_k(\omega) \neq \mathrm{X}(\omega)\} = \mathrm{L}(\omega)$
On vient de montrer que $(\mathrm{X}_n \neq \mathrm{X}) \subset (\mathrm{L} \geqslant n)$ d'où $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X}_n \neq \mathrm{X}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{L} \geqslant n)}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a selon 14 et (a) : $\|\mu_{\mathrm{X}_n} - \mu_{\mathrm{X}}\| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X}_n \neq \mathrm{X}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{L} \geqslant n)$
Par ailleurs, on remarque que :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{L} \geqslant n\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{L}(\omega) \geqslant n\} = \emptyset$$

car L est bien définie à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Ainsi par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\mathrm{L} \geqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{L} \geqslant n\}\right) = 0$$

Avec le théorème des gendarmes, on déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|\mu_{\mathrm{X}_n} - \mu_{\mathrm{X}}\| = 0}$

16. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On remarque $\forall n \geqslant \mathrm{N}^*$, $\psi_n(\mathrm{N}) = \mathrm{N}$ car $p_n \geqslant \mathrm{N}$
donc la suite $(\psi_n(\mathrm{N}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire de limite N.
Ainsi pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(\psi_n(\mathrm{X})(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*} = (\psi_n(\mathrm{X}(\omega)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire et converge vers $\mathrm{X}(\omega)$.
De plus X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui est bien dénombrable, ce qui permet d'utiliser la question 15 :

$$\left\|\mu_{\psi_n(\mathrm{X})} - \mu_{\mathrm{X}}\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme infinie sur $\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{R})$.
Comme les $\mu_{\psi_n(\mathrm{X})}$ et $\mu_{\mathrm{X}} \in \mathscr{M}(\mathbb{N}^*)$ selon 13, on peut appliquer la question 9 (ou 10(c)) :

$$\forall x \in \mathbb{N}^*,\ \mu_{\mathrm{X}}(x) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{\psi_n(\mathrm{X})}(x)$$

or pour $x \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu_{\mathrm{X}}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \{x\}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$ et $\mu_{\psi_n(\mathrm{X})}(x) = \mathbb{P}(\psi_n(\mathrm{X}) = x)$
d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\psi_n(\mathrm{X}) = x)}$

Quatrième partie

17. (a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant 1$. On a clairement $\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) \cup \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i$.

Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i$.

Si $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i$, alors $x \in \mathbb{N}^* r p_{n+1}$ et $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i$ car $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i \subset \mathbb{N}^* r p_i$.

d'où l'inclusion réciproque, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) \cup \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right)}$$

(b) On va montrer dans un premier temps par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)$$

L'initialisation pour $n = 1$ devient $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mu_1(\mathbb{N}^* r p_1) = \mu_2(\mathbb{N}^* r p_1)$ qui est vrai par hypothèse.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie au rang n. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrons $\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i\right)$.

On a $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i \subset \mathbb{N}^* r p_{n+1}$ donc

$$\mu_1\left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) = \mu_1(\mathbb{N}^* r p_{n+1}) - \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) = \mu_2(\mathbb{N}^* r p_{n+1}) - \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right)$$

pour la dernière égalité, on a utilisé les hypothèses de l'énoncé et de récurrence avec $r p_{n+1} \in \mathbb{N}^*$.
En faisant le chemin inverse avec μ_2, on a :

$$\mu_1\left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right)$$

Par hypothèse de récurrence, on a également $\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)$.

Avec la question (a) où la réunion du membre de droite est disjointe, on obtient le résultat voulu pour l'hérédité. Ce qui termine la récurrence.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)$ et aussi $\mu_1(\mathbb{N}^* r) = \mu_2(\mathbb{N}^* r)$

Comme on a $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i \subset \mathbb{N}^* r$, alors on a

$$\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_1(\mathbb{N}^* r) - \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2(\mathbb{N}^* r) - \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)$$

On peut alors conclure que : $\boxed{\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)}$

(c) Pour établir que μ_1 et μ_2 sont définissent les mêmes probabilités sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$, il suffit d'établir que

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mu_1(r) = \mu_2(r)$$

car $\forall j \in \{1,2\},\ \forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{N}^*),\ \mu_j(\mathrm{A}) = \sum_{r\in \mathrm{A}} \mu_j(r)$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On remarque : $\{r\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i \right)$. Par continuité décroissante, on a pour $i \in \{1,2\}$:

$$\mu_i \left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_i(r)$$

Par unicité de la limite et avec la question (b), on obtient $\mu_1(r) = \mu_2(r)$

On peut alors conclure que $\boxed{\mu_1 = \mu_2}$ comme annoncé.

18. Selon 12(e), la suite $(\mu_{\mathrm{X}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}(\mathbb{N}^*)$ étant tendue (i) cela nous fournit une extractrice ψ telle que la suite extraite $\left(\mu_{\mathrm{X}_{\psi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{B}\left(\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)$ vers une valeur d'adhérence notée $\mu_\infty \in \mathscr{M}(\mathbb{N}^*)$.
Par hypothèse (ii), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n \in \mathbb{N}^* r) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathbb{N}^* r)$. Une limite étant l'unique valeur d'adhérence, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_{\mathrm{X}_{\psi(n)}}\left(\mathbb{N}^* r\right) = \mu_{\mathrm{X}}\left(\mathbb{N}^* r\right)$$

Comme $\left(\mu_{\mathrm{X}_{\psi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers μ_∞ sur $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right)$, on a également la convergence simple.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_{\mathrm{X}_{\psi(n)}}\left(\mathbb{N}^* r\right) = \mu_\infty\left(\mathbb{N}^* r\right)$ donc $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mu_{\mathrm{X}}\left(\mathbb{N}^* r\right) = \mu_\infty\left(\mathbb{N}^* r\right)$. Ainsi, selon 17

$$\mu_{\mathrm{X}} = \mu_\infty$$

On a établi que $\mu_{\mathrm{X}} \in \mathscr{M}(\mathbb{N}^*)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(\mu_{\mathrm{X}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{B}\left(\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 10, il suffit d'établir que la suite $(\mu_{\mathrm{X}_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mu_{\mathrm{X}}(x)$.
Comme il s'agit d'une suite à valeur dans le compact $[0,1]$, il suffit d'établir que cette suite admet $\mu_{\mathrm{X}}(x)$ comme unique valeur d'adhérence.
Soit λ une valeur d'adhérence de la suite. On cherche à établir que $\lambda = \mu_{\mathrm{X}}(x)$.
Cela nous fournit une extractrice φ tel que $\mu_{\mathrm{X}_{\varphi(n)}}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$.
La suite $\left(\mu_{\mathrm{X}_{\varphi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également tendue. Ce qui nous fournit une extractrice φ' telle que $\left(\mu_{\mathrm{X}_{\varphi\circ\varphi'(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur d'adhérence dans $\mathscr{B}\left(\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)$.
D'après ce que l'on a vu, cette valeur d'adhérence est μ_{X} car c'est une valeur d'adhérence de $(\mu_{\mathrm{X}_n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme précédemment on a $\mu_{\mathrm{X}_{\varphi\circ\varphi'(n)}}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_{\mathrm{X}}(x)$ puis $\lambda = \mu_{\mathrm{X}}(x)$. Ce que l'on voulait.

d'où $\boxed{\text{la suite } (\mu_{\mathrm{X}_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } \mu_{\mathrm{X}} \text{ dans } \mathscr{B}\left(\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)}$

19. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la fonction partie entière et on a :

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad r \mid k \Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^*,\ k = rq \Longleftrightarrow \exists q \in \lfloor n/r \rfloor,\ k = rq$$

donc $\left\{ r \mid \mathrm{X}_n^{(i)} \right\} = \bigcup_{q=1}^{\lfloor n/r \rfloor} = \left\{ \mathrm{X}_n^{(i)} = rq \right\}$ (union disjointe)

Comme la loi est uniforme, on a $\forall q \in [\![1, \lfloor n/r \rfloor]\!],\ \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n^{(i)} = rq\right) = 1/n$ donc $\boxed{\mathbb{P}\left(r \mid \mathrm{X}_n^{(i)}\right) = \frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n}}$

En utilisant $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a $\boxed{\mathbb{P}\left(r \mid \mathrm{X}_n^{(i)}\right) \leqslant \frac{1}{r}}$

On a $\left\{r \mid \mathrm{Z}_n^{(s)}\right\} = \bigcap_{i=1}^{s} \left\{r \mid \mathrm{X}_n^{(i)}\right\}$. Ainsi par indépendance des $\mathrm{X}_n^{(i)}$ ($i \in \{1, 2, \dots, s\}$), on a

$$\mathbb{P}\left(r \mid \mathrm{Z}_n^{(s)}\right) = \prod_{i=1}^{s} \mathbb{P}\left(r \mid \mathrm{X}_n^{(i)}\right) = \left(\frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n}\right)^s$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a $\dfrac{\frac{n}{r} - 1}{n} \leqslant \dfrac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n} \leqslant \dfrac{1}{r}$.

Or $\dfrac{\frac{n}{r} - 1}{n} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{r}$ donc par théorème des gendarmes : $\dfrac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{r}$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(r \mid \mathrm{Z}_n^{(s)}\right) = \dfrac{1}{r^s}}$

20. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\{k \mid \mathrm{Z}\} = \bigcup_{q=1}^{+\infty} \{\mathrm{Z} = kq\}$, on a donc

$$\mathbb{P}\left(k \mid \mathrm{Z}\right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z} = kq) = \sum_{q=1}^{+\infty} \mu_s(kq) = \sum_{q=1}^{+\infty} \mu_s(kq) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(kq)^s} = \frac{1}{\zeta(s)k^s} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^s}$$

On conclut que $\boxed{\mathbb{P}\left(k \mid \mathrm{Z}\right) = \dfrac{1}{k^s}}$

(b) On va utiliser la question 18 avec $\left(\mathrm{Z}_n^{(s)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et Z également.
D'après 19 et 20, on a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(r \mid \mathrm{Z}_n^{(s)}\right) = \frac{1}{r^s} = \mathbb{P}(r \mid \mathrm{Z})$$

Ce qui nous donne l'hypothèse ii de la question 18.
Il reste à établir l'hypothèse i c'est à dire que la suite $\left(\mathrm{Z}_n^{(s)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue.

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de $\sum\limits_{r\geqslant 1} \dfrac{1}{r^s}$, il existe un entier n_0 tel que $\sum\limits_{r=n_0}^{+\infty} \dfrac{1}{r^s} \leqslant \varepsilon$.

Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\mathrm{Z}_n^{(s)}(\omega) \geqslant n_0$, alors $\mathrm{Z}_n^{(s)}(\omega)$ est multiple de l'un des entiers plus grands que n_0 et donc

$$\left\{\mathrm{Z}_n^{(s)} \geqslant n_0\right\} \subset \bigcup_{r=n_0}^{\infty} \left\{r | \mathrm{Z}_n^{(s)}\right\} \subset \bigcup_{r=n_0}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{s} \left\{r | \mathrm{X}_i^{(s)}\right\}\right)$$

Par indépendance des $\mathrm{X}_i^{(s)}$ et selon 19, on a :

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_n^{(s)} \geqslant n_0\right) \leqslant \sum_{r=n_0}^{\infty} \mathbb{P}\left(r | \mathrm{Z}_n^{(s)}\right) \leqslant \sum_{r=n_0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{s} \mathbb{P}\left(r | \mathrm{X}_i^{(s)}\right)\right) \leqslant \sum_{r=n_0}^{\infty} \frac{1}{r^s} \leqslant \varepsilon$$

Je pose alors $\mathrm{F}_\varepsilon = [\![1, n_0 - 1]\!]$ de sorte que :

$$\mu_{\mathrm{Z}_n^{(s)}}(\mathrm{F}_\varepsilon) = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n^{(s)} \in \mathrm{F}_\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n^{(s)} \geqslant n_0) \leqslant 1 - \varepsilon$$

et cela donne le caractère tendu de $(\mu_{\mathrm{Z}_n^{(s)}})$ et permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|\mu_{\mathrm{Z}_n^{(s)}} - \mu_s\| = 0}$$

21. On note $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(s)}$ les variables aléatoires donnant les s nombres dans $\{1, 2, \dots, n\}$ pris au hasard.
De sorte que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.
On note $Z_n^{(s)} = X_n^{(1)} \wedge \dots \wedge X_n^{(s)}$ de façon à utiliser ce qui précède.
La suite $\left(\mu_{Z_n^{(s)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{B}\left(\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)$ vers μ_s.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_n(s) = \mathbb{P}\left(Z_n^{(s)} = 1\right) = \mu_{Z_n^{(s)}}(1)$
donc $\mathbb{P}_n(s) = \mu_{Z_n^{(s)}}(1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu_s(1)$
ce qui permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}_n(s) = \dfrac{1}{\zeta(s)}}$
En utilisant 7(c), on conclut que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_n(2) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}\ ;\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_n(4) = \frac{1}{\zeta(4)} = \frac{90}{\pi^4}\ ;\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_n(6) = \frac{1}{\zeta(6)} = \frac{945}{\pi^6}}$$