

CONCOURS MINES-PONTS

EPREUVE MATHÉMATIQUES I - MP

Durée : 3 heures

Théorème de Hardy-Ramanujan

Corrigé : Jean Nougayrède - Rémi Souveton

Avertissement : il peut se glisser ici ou là une coquille. Merci de ne pas en tenir rigueur aux auteurs !

A. Fonctions L et P

1 ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{|z|^n}{n} \leq |z|^n$ et $\sum |z|^n$ est une série géométrique convergente (puisque $|z| < 1$). Par comparaison, $\sum \frac{z^n}{n}$ est une série absolument convergente, donc convergente.

D'après le cours sur les séries entières, on a :

$$\forall z \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).$$

2 ▷ Tout d'abord, pour $t \in [0, 1]$, on a $tz \in D$ et :

$$\underbrace{L(tz)}_{=\varphi(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n.$$

Par une conséquence directe de la règle de d'Alembert, cette série entière de la variable réelle t est de rayon de convergence $\frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$ et $+\infty$ si $z = 0$.

Dans tous les cas, le rayon de convergence est strictement supérieur à 1.

Par théorème, sa somme est dérivable (au moins) sur l'intervalle ouvert de convergence, qui contient $[0, 1]$ et :

$$\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = \frac{z}{1-zt}.$$

Comme produit de fonctions dérivables sur $[0, 1]$, la fonction $\psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est dérivable et :

$$\forall t \in [0, 1], \psi'(t) = \left((1-tz) \frac{z}{1-zt} - z \right) e^{L(tz)} = 0.$$

Comme $[0, 1]$ est un intervalle, on peut conclure : ψ est une fonction constante et, en particulier, $\psi(1) = \psi(0)$, qui se réécrit :

$$(1-z)e^{L(z)} = e^{L(0)} \quad \text{donc} \quad e^{L(z)} = \frac{1}{1-z}.$$

3 ▷ Soit $z \in D$. Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|L(z)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} \Big|_{|z| \in [0, 1[} = -\ln(1-|z|).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z^n \in D$, donc $|L(z^n)| \leq \underbrace{-\ln(1-|z|^n)}_{=a_n}$.

Comme $|z| < 1$, la suite (z^n) converge vers 0, puis $a_n \sim |z|^n$.

On en déduit $L(z^n) = O(z^n)$ puis, par comparaison à une série géométrique, la série $\sum L(z^n)$ est absolument convergente, donc convergente.

B. Développement de P en série entière

4 ▷

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$.

Par positivité des a_k , on a $0 \leq a_i \leq ia_i \leq n$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

On en déduit l'inclusion $P_{n,N} \subset \llbracket 0, n \rrbracket^N$, puis le caractère fini de l'ensemble $P_{n,N}$ comme partie d'un ensemble fini.

- Notons $f : (a_1, \dots, a_N) \mapsto (a_1, \dots, a_N, 0)$.

Par définition des ensembles $P_{n,N}$ et $P_{n,N+1}$, l'application f est bien définie de $P_{n,N}$ vers $P_{n,N+1}$ et également injective par vérification immédiate.

On en déduit $p_{n,N} \leq p_{n,N+1}$, ce qui montre que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante.

- Dans le cas où $n = 0$, on a évidemment $P_{0,N} = \{(0, \dots, 0)\}$ donc $p_{0,N} = 1$ pour tout $N \geq 1$ et donc la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est constante à partir du rang $1 = \max(n, 1)$.

Supposons $n \geq 1$. Soit $N \geq n$.

Soit $(a_1, \dots, a_{N+1}) \in P_{n,N+1}$. Si $a_{N+1} \geq 1$, alors $(N+1)a_{N+1} \geq (N+1)$ donc :

$$n = \sum_{k=1}^{N+1} ka_k \geq (N+1)a_{N+1} \geq N+1 > n,$$

ce qui est absurde.

Ainsi, $(a_1, \dots, a_{N+1}) = (a_1, \dots, a_N, 0)$ donc $\sum_{k=1}^N ka_k = n$ puis $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$.

Ceci montre que la fonction f du premier point est aussi surjective donc bijective.

On en déduit $p_{n,N} = p_{n,N+1}$.

En conclusion, la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

5 ▷ Soit $z \in D$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété H_n par :

$$\underbrace{\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k}}_{= \Pi_N} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

Initialisation. On a évidemment $P_{n,1} = \{(n)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

ce qui achève de montrer l'initialisation.

Hérédité. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_N .

Tout d'abord, par conséquence de la question précédente (premier point), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n,N} |z|^n \leq (n+1)^N |z|^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (\text{croissance comparée})$$

ce qui montre la sommabilité de la famille $(p_{n,N} z^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par ailleurs, la famille $(z^{i(N+1)})_{i \in \mathbb{N}}$ est également sommable (puisque $|z| < 1$).

Ainsi, la famille $(p_{n,N}z^{n+i(N+1)})_{(n,i) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\begin{aligned}
\Pi_{N+1} &= P_N \times \frac{1}{1-z^{N+1}} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{n,N} z^n \sum_{i \in \mathbb{N}} z^{i(N+1)} && \text{(hypothèse de récurrence et série géométrique)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(n,i) \in \mathbb{N}^2 \\ n+(N+1)i=j}} p_{n,N} \right) z^j && \text{(sommabilité)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} p_{j,N+1} z^j,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'hérédité.

Détaillons un peu la dernière égalité. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
p_{j,N+1} &= \text{card}\{(a_1, \dots, a_{N+1}) \in \mathbb{N}^{N+1}, a_1 + \dots + (N+1)a_{N+1} = j\} \\
&= \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ (N+1)i \leq j}} \text{card}\{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N, a_1 + \dots + Na_N = j - (N+1)i\} \\
&= \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ (N+1)i \leq j}} p_{j-(N+1)i,N} = \sum_{\substack{(n,i) \in \mathbb{N}^2 \\ n+(N+1)i=j}} p_{n,N}.
\end{aligned}$$

6 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de la suite $(p_{n,N})_{N \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{(n,N) \in \mathbb{N}^2} |p_{n,N+1} - p_{n,N}| |z|^n = \sum_{(n,N) \in \mathbb{N}^2} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) |z|^n.$$

Le calcul (formel) qui suit, en remplaçant z par $|z|$ (toujours élément de D), montrera donc la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n)_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$ et justifiera le résultat final.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n z^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{N \in \mathbb{N}} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n && (p_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} p_{n,N} \text{ et } p_{n,0} = 0) \\
&= \sum_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n \\
&= \sum_{N \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} p_{n,N+1} z^n - \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{n,N} z^n \right) && \text{(les deux séries convergent)} \\
&= \sum_{N \in \mathbb{N}^*} (\Pi_{N+1} - \Pi_N) + \Pi_1 - 0 && \text{(question précédente)} \\
&= P(z). && (\lim_{N \rightarrow +\infty} \Pi_N = P(z))
\end{aligned}$$

Comme $P(|z|) < +\infty$, la sommabilité et donc le résultat du calcul précédent sont justifiés.

La série $\sum p_n z^n$ est convergente pour tout $z \in D$ donc son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{n,1} = 1$ donc $p_n \geq 1$, ce qui montre que $R \leq 1$.

En conclusion, $R = 1$.

7 ▷ Soit $t > 0$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{-t+i\theta} \in D$ donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta})}_{=f(\theta)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{p_k e^{-kt} e^{i(k-n)\theta}}_{=f_k(\theta)} d\theta$$

Chaque fonction f_k est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[-\pi, \pi]$ vers la fonction continue f et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(\theta)| d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\pi p_k (e^{-t})^k < +\infty \quad \text{car} \quad |e^{-t}| < 1.$$

Par théorème d'intégration terme à terme, on a donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta}_{=2\pi\delta_{k,n}} = 2\pi p_n e^{-nt},$$

ce qui conclut.

C. Contrôle de P

8 ▷ Toutes les séries qui suivent sont convergentes (par comparaison à la série géométrique $\sum x^n$).

Partant de l'inégalité :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n}}_{\geq 0} \underbrace{(\cos(n\theta) - 1)}_{\leq 0} \leq 0,$$

on en déduit :

$$\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} (\cos(n\theta) - 1) \leq x(\cos\theta - 1),$$

puis :

$$\ln(1-x) + \operatorname{Re} L(xe^{i\theta}) \leq x(\cos\theta - 1).$$

Par croissance de l'exponentielle, il vient :

$$(1-x) \exp(\operatorname{Re} L(xe^{i\theta})) \leq \exp(x(\cos\theta - 1)) \quad \text{puis} \quad (1-x) |\exp L(xe^{i\theta})| \leq \exp(-(1-\cos\theta)x).$$

D'après la question 2, on a alors :

$$(1-x) \frac{1}{|1-xe^{i\theta}|} \leq \exp(-(1-\cos\theta)x),$$

ce qui conclut cette première partie de la question puisque $1-x \geq 0$.

Ensuite, on a :

$$P(xe^{i\theta}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k e^{ik\theta}} \quad \text{et} \quad P(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k}.$$

Par quotient et passage au module, il vient :

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \left| \frac{1-x^k}{1-x^k e^{ik\theta}} \right|.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $x^k \in [0, 1[$ et $k\theta \in \mathbb{R}$, on peut utiliser la première partie de la question :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1-x^k}{1-x^k e^{ik\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos(k\theta))x^k).$$

Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs et passage à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \exp(- (1 - \cos(k\theta))x^k) = \exp \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{-(1 - \cos k\theta)x^k}_{=0 \text{ si } k=0} \\ &= \exp \left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ik\theta} x^k \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re} \frac{1}{1-xe^{i\theta}} \right). \end{aligned}$$

9 ▷ On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \operatorname{Re} \frac{1}{1-xe^{i\theta}} &= \frac{1}{1-x} - \operatorname{Re} \frac{1-xe^{-i\theta}}{|1-xe^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos\theta}{1+x^2-2x\cos\theta} \\ &= \frac{1+x^2-2x\cos\theta - (1-x)(1-x\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} \\ &= \frac{x^2(1-\cos\theta) + x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} \\ &\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}. \quad (x^2(1-\cos\theta) \geq 0) \end{aligned}$$

D'après ce qui précède et la question précédente, on a :

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp \left(\underbrace{-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}}_{=A(x)} \right).$$

Dans le cas où $A(x) \leq -\frac{1}{3(1-x)}$, il n'y a rien à faire (par croissance de la fonction exp).

Supposons maintenant $A(x) > -\frac{1}{3(1-x)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} &\leq \frac{1}{3(1-x)} \\ 3x(1-\cos\theta) &\leq (1-x)^2+2x(1-\cos\theta) \quad ((1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)) > 0) \\ x(1-\cos\theta) &\leq (1-x)^2 \\ 0 < (1-x)^2+2x(1-\cos\theta) &\leq 3(1-x)^2 \\ \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)^2+2x(1-\cos\theta)} &\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^2} \geq \frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^2} \quad (x \geq 1/2 > 0 \text{ et } 1-\cos\theta \geq 0) \\ -\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} &\leq -\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}. \quad (1-x > 0) \end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle, on conclut.

D. Intermède : quelques estimations de sommes

10 ▷ La fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0. L'équivalent simple :

$$\varphi_{n,\alpha}(x) \sim \frac{x^n}{x^n} = 1$$

montre que $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable en 0.

Étude en $+\infty$. On a :

$$\varphi_{n,\alpha}(x) \sim x^n e^{-\alpha x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{par croissances comparées,}$$

donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable en $+\infty$.

En conclusion, $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Ensuite, la fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'_{n,\alpha}(x) &= \frac{(nx^{n-1}e^{-\alpha x} - \alpha x^n e^{-\alpha x})(1 - e^{-x})^n - x^n e^{-\alpha x} n(1 - e^{-x})^{n-1} e^{-x}}{(1 - e^{-x})^{2n}} \\ &= \frac{x^{n-1} e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-x})^{n+1}} ((n - \alpha x)(1 - e^{-x}) - nxe^{-x}). \end{aligned}$$

La fonction $\varphi'_{n,\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0. On a le développement limité suivant :

$$(n - \alpha x)(1 - e^{-x}) - nxe^{-x} = (n - \alpha x)(x + O(x^2)) - nx(1 + O(x)) = O(x^2).$$

Comme on a aussi :

$$\frac{x^{n-1} e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-x})^{n+1}} \sim \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^2},$$

on en déduit $\varphi'_{n,\alpha}(x) = O(1)$, ce qui montre l'intégrabilité de $\varphi'_{n,\alpha}$ en 0.

Étude en $+\infty$. Comme précédemment, par croissances comparées, on a $\varphi'_{n,\alpha}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, ce qui montre l'intégrabilité de $\varphi'_{n,\alpha}$ en $+\infty$.

En conclusion, $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

11 ▷

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{-kt} > 0$ (puisque $kt > 0$), donc la fraction $\frac{k^n e^{-k t \alpha}}{(1 - e^{-kt})^n}$ est bien définie (et positive).

On a l'équivalent simple suivant quand k tend vers $+\infty$:

$$\frac{k^n e^{-k t \alpha}}{(1 - e^{-kt})^n} \sim k^n e^{-k t \alpha}.$$

Puisque $t\alpha > 0$, on en déduit, par croissances comparées, que :

$$\frac{k^n e^{-k t \alpha}}{(1 - e^{-kt})^n} = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

ce qui montre, par comparaison à un exemple de Riemann, que la série $\sum \frac{k^n e^{-k t \alpha}}{(1 - e^{-kt})^n}$ est absolument convergente donc convergente.

- Par positivité des termes sommés, on a :

$$S_{n,\alpha}(t) \geq \frac{e^{-t\alpha}}{(1 - e^{-t})^n} > 0.$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, on a :

$$\underbrace{\int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx}_{=a_k} = t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x) dx.$$

Par intégrabilité de $\varphi_{n,\alpha}$ et d'après le premier point, la série $\sum a_k$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k &= t \sum_{k=0}^{+\infty} ((k+1)t)^n \frac{e^{-(k+1)\alpha t}}{(1 - e^{-(k+1)t})^n} - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx \\ &= t^{n+1} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^n e^{-j\alpha t}}{(1 - e^{-j\alpha t})^n} - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx \\ &= t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx,\end{aligned}$$

ce qui conclut.

- D'après ce qui précède, il suffit de montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(t).$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} \underbrace{(x - kt)}_{\leq t} |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx \\ &\leq t \underbrace{\int_0^{+\infty} |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx}_{\text{indépendant de } t},\end{aligned}\quad (\text{intégrabilité de } \varphi'_{n,\alpha})$$

ce qui conclut.

12 ▷ Pour tout $x > 0$, on a $|e^{-x}| < 1$ donc :

$$\underbrace{\frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}}}_{=f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{x e^{-(n+1)x}}_{=u_n(x)}.$$

Chaque fonction u_n est continue (par morceaux) et positive sur \mathbb{R}_+^* .

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* et sa somme f est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème d'intégration terme à terme (cas positif), on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x) dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} && (\text{par intégration par parties}) \\ &= \frac{\pi^2}{6}. && (\text{résultat admis})\end{aligned}$$

Notons que le caractère fini de la somme montre l'intégrabilité de la fonction f , même s'il était possible de le justifier directement.

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

13 ▷ Notons $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble de réels contenant l'ensemble des valeurs prises par X , avec, éventuellement, $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$, ce qui permet de traiter indifféremment les cas où X prend un nombre fini ou infini de valeurs. On suppose, naturellement, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, injective. Comme les variables aléatoires

$\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ admettent une espérance, on peut utiliser le théorème de transfert qui nous assure de la convergence absolue des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\theta x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$ et nous donne

$$\mathbb{E}(\cos(\theta X) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X))) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\theta x_n) \mathbb{P}(X = x_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$$

Comme les deux séries sont convergentes, on peut les regrouper par linéarité,

$$|\mathbb{E}(\cos(\theta X) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X)))| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(\theta x_n) + i \sin(\theta x_n)) \mathbb{P}(X = x_n) \right|$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n)$ converge et vaut, 1. On peut donc faire passer le module à l'intérieur de la somme

$$|\Phi_X(\theta)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\cos(\theta x_n) + i \sin(\theta x_n)| \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1.$$

14 ▷ Pour cette question, on peut utiliser à nouveau le théorème de transfert, qui nous donne, comme dans la question précédente

$$\begin{aligned} \Phi_{aX+b}(\theta) &= \mathbb{E}(\cos(\theta(aX + b))) + i\mathbb{E}(\sin(\theta(aX + b))) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\theta(ax_n + b)) \mathbb{P}(X = x_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta(ax_n + b)) \mathbb{P}(X = x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(ax_n+b)} \mathbb{P}(X = x_n). \end{aligned}$$

On sait que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (avec $q = 1 - p$), on peut donc prendre $x_n = n$, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et

$$\mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1} \text{ pour } n > 0$$

On reporte dans l'expression précédente, pour obtenir la somme d'une série géométrique de raison $qe^{ia\theta}$ et de premier terme $pe^{i(a+b)\theta}$. Cette série converge, car $|qe^{ia\theta}| = q \in]0, 1[$, On en déduit

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i(an+b)} p (qe^{ia\theta})^{n-1} = \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1 - qe^{ia\theta}}.$$

15 ▷ Pour montrer que X^k est d'espérance finie, on peut, à nouveau utiliser le théorème de transfert. Selon ce théorème, il suffit de montrer que $(n^k \mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable. Ou encore que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k \mathbb{P}(X = n)$ converge. On peut écrire, par le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 n^k pq^{n-1} = 0, \text{ car } q \in [0, 1[$$

On en déduit la majoration $0 \leq n^k pq^{n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, sachant que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Le théorème de

comparaison, permet alors de conclure à la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k pq^{n-1}$.

Le théorème de transfert permet alors d'assurer l'existence de l'espérance de X^k .

Pour montrer que Φ_X est de classe \mathcal{C}^∞ , on applique le théorème de dérivation des séries de fonctions à l'expression

$$\Phi_X(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} pq^{n-1}.$$

Posons, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $u_n(\theta) = e^{in\theta} pq^{n-1}$. Alors, à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la fonction u_n est de classe \mathcal{C}^∞ . Dans la question 13, on a vu la convergence simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n^{(k)}(\theta) = i^k n^k e^{in\theta} pq^{n-1} \Rightarrow |u_n^{(k)}(\theta)| \leq n^k pq^{n-1},$$

(en fait, on est dans le cas d'égalité). Le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. Il y a convergence normale.

Les hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions est vérifié à tout ordre. On peut donc en déduire que Φ_X est de classe \mathcal{C}^∞ , et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}, \Phi_X^{(k)}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k i^k e^{in\theta} pq^{n-1}.$$

L'utilisation du théorème de transfert, permet alors d'obtenir, dans le cas $\theta = 0$,

$$\Phi_X^k(0) = i^k \mathbb{E}(X^k).$$

16 \triangleright On utilise l'expression de la question 14, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1 - qe^{i\theta}}.$$

Pour montrer l'existence d'une suite de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on procède, classiquement, par récurrence en montrant l'existence de P_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour le rang $k = 0$, on a $\Phi_X = \Phi_X^{(0)} = \frac{pe^{i\theta}}{1 - qe^{i\theta}}$. On pose $P_0 = 1$, qui convient.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe P_k tel que $P_k(0) = 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X^{(k)}(\theta) = pi^k e^{i\theta} \frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1 - qe^{i\theta})^{k+1}}.$$

On peut dériver cette expression, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \Phi_X^{(k+1)}(\theta) &= pi^{k+1} e^{i\theta} P_k(qe^{i\theta}) \frac{1}{(1 - qe^{i\theta})^{k+1}} \\ &\quad + pi^k e^{i\theta} qie^{i\theta} P_k'(qe^{i\theta}) \frac{1}{(1 - qe^{i\theta})^{k+1}} \\ &\quad + pi^k e^{i\theta} P_k(qe^{i\theta}) \frac{-(k+1)qie^{i\theta}}{(1 - qe^{i\theta})^{k+2}} \\ &= pi^{k+1} e^{i\theta} \frac{P_k(qe^{i\theta})(1 - qe^{i\theta}) + qe^{i\theta} P_k'(qe^{i\theta})(1 - qe^{i\theta}) - (k+1)qe^{i\theta} P_k(qe^{i\theta})}{(1 - qe^{i\theta})^{k+2}} \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$P_{k+1} = (1 - X)P_k + X(1 - X)P_k' - (k+1)XP_k.$$

pour obtenir le résultat. En substituant 0 à X , on obtient $P_k(0) = P_{k+1}(0)$. Ainsi, la condition $P_{k+1}(0) = 1$.

Le principe de récurrence permet alors de montrer l'existence de P_k , pour tout k entier naturel, satisfaisant les propriétés demandées.

17 \triangleright Selon la question 15, on peut écrire $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$. La question 16, nous donne $\Phi_X^{(k)}(0) = p i^k \frac{P_k(q)}{(1-q)^{k+1}} = \frac{P_k(q)}{p^k}$.

On peut alors écrire l'égalité

$$\left| \mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k} \right| = \left| \frac{P_k(q) - 1}{p^k} \right| = \left| \frac{P_k(q) - P_k(0)}{p^k} \right|.$$

Cette dernière expression nous fait penser à utiliser le théorème des accroissements finis. C'est possible, puisque P_k est un polynôme, donc une fonction \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On pose

$$C_k = \sup_{t \in [0,1]} |P_k'(t)|$$

Bien entendu, selon la question 16, P_k ne dépend pas de p , il en va donc de même de C_k . Le théorème des accroissements finis nous donne alors

$$\left| \mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k} \right| = \left| \frac{P_k(q) - P_k(0)}{p^k} \right| \leq \frac{C_k q}{p^k}$$

18 \triangleright On développe le membre de gauche suivant la formule du binôme de Newton,

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) = \mathbb{E}(X^4) - 4\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) + 6\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)^2 - 4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)^3 + \mathbb{E}(X)^4.$$

On remplace les $\mathbb{E}(X)$ par des $\frac{1}{p}$, pour obtenir

$$\mathbb{E}(X^4) - 4\mathbb{E}(X^3)\frac{1}{p} + 6\mathbb{E}(X^2)\frac{1}{p^2} - 4\frac{1}{p}\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4}.$$

On fait alors intervenir des $\mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}$, autant que faire se peut. On fait également attention à les retrancher pour compenser.

$$\left(\mathbb{E}(X^4) - \frac{1}{p^4} \right) - 4 \left(\mathbb{E}(X^3) - \frac{1}{p^3} \right) \frac{1}{p} + 6 \left(\mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{p^2} \right) \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - 4 \frac{1}{p^4} + 6 \frac{1}{p^4} - 4 \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^4}.$$

Les termes en $\frac{1}{p^4}$ se simplifient. On utilise alors l'inégalité triangulaire,

$$\left| \mathbb{E}(E^4) - \frac{1}{p^4} \right| \leq \left| \mathbb{E}(X^4) - \frac{1}{p^4} \right| + \frac{4}{p} \left| \mathbb{E}(X^3) - \frac{1}{p^3} \right| + \frac{6}{p^2} \left| \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{p^2} \right|$$

La question précédente nous donne

$$\left| \mathbb{E}(E^4) - \frac{1}{p^4} \right| \leq \frac{C_4 q}{p^4} + \frac{4C_3 q}{p^4} + \frac{6C_2 q}{p^4}$$

On obtient le résultat demandé, avec $K = C_4 + 4C_3 + 6C_2$.

20 \triangleright Commençons par montrer que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie. On sait que Y^4 est d'espérance finie. On peut écrire, en utilisant la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A .

$$\sup(1, Y^4) = \mathbf{1}_{|Y| \leq 1} + Y^4 \mathbf{1}_{|Y| > 1}.$$

Les deux termes de cette somme sont des variables aléatoire admettant une espérance, puisque, d'une part $\mathbf{1}_{|Y| \leq 1}$ est bornée, et, d'autre part, on a la majoration

$$0 \leq Y^4 \mathbf{1}_{|Y| > 1} \leq Y^4.$$

(théorème de comparaison pour les espérances.) On peut alors passer aux variables aléatoires Y^2 et $|Y|^4$, en utilisant les inégalités

$$0 \leq Y^2 \leq \sup(1, Y^4) \text{ et } 0 \leq |Y|^3 \leq \sup(1, Y^4)$$

Puisque $\sup(1, Y^4)$ possède une espérance, le théorème de comparaison nous dit qu'il en va de même de Y^2 et de $|Y|^3$.

Passons à la première inégalité, afin de ne pas refaire le coup du théorème de transfert, et pour varier les plaisirs, on va utiliser le théorème de Cauchy-Schwarz. Si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, alors leur produit $Z_1 Z_2$ admet une espérance, et l'on a

$$\mathbb{E}(Z_1 Z_2) \leq \mathbb{E}(Z_1^2)^{1/2} \mathbb{E}(Z_2^2)^{1/2}.$$

Comme Y^4 possède une espérance, les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $Z_1 = Y^2$ et $Z_2 = 1$. On obtient ainsi,

$$\mathbb{E}(Y^2) \leq \mathbb{E}(Y^4)^{1/2} \mathbb{E}(1)^{1/2} = \mathbb{E}(Y^4)^{1/2}.$$

Pour la seconde inégalité, on aimerait utiliser l'inégalité de Jensen pour les espérances. Elle n'est pas au programme. Pour rentrer dans ce cadre, on va utiliser, à nouveau, le théorème de transfert. On note $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de réels contenant les valeurs prises par Y . Bien entendu, on suppose la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ injective.

$|Y|^3$ possède une espérance, donc, selon le théorème de transfert, la famille $(|y_n|^3 \mathbb{P}(Y = y_n))$ est sommable et l'on a

$$\mathbb{E}(Y^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^3 \mathbb{P}(Y = y_n).$$

On pose $\mu_N = \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(Y_n = y_n)$, comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mu_N = 1$, on peut écrire que $\mu_N \neq 0$ pour N suffisamment grand. La limite de μ_N , nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}(Y^3) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu_N} \sum_{n=0}^N |y_n|^3 \mathbb{P}(Y = y_n).$$

Pour appliquer le théorème de Jensen, on a notre somme. Il nous reste à trouver une fonction φ , convexe (ou concave). L'énoncé nous suggère $\varphi : t \mapsto t^{4/3}$, définie sur \mathbb{R}_+ .

Cette fonction est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée seconde est

$$\varphi''(t) = \frac{4}{3} \frac{1}{3} t^{-2/3} > 0.$$

φ est donc bien continue et convexe sur \mathbb{R}^+ . Dans ces conditions, l'inégalité de Jensen s'écrit

$$\varphi \left(\sum_{i=0}^N \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=0}^N \varphi(\lambda_i x_i),$$

avec, pour N le même que défini plus haut, $\lambda_n = \frac{1}{\mu_N} \mathbb{P}(Y = y_n)$, et $x_n = |y_n|^3$. Les λ_n sont alors bien de somme 1, les x_n dans \mathbb{R}_+ . On en arrive alors à

$$\left(\mathbb{E}(|Y|^3) \right)^{4/3} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N (|y_n|^3)^{4/3} \mathbb{P}(Y = y_n) = \mathbb{E}(Y^4),$$

où la continuité de φ nous a permis d'inverser $\lim_{N \rightarrow +\infty}$ et φ . Pour conclure, il suffit de prendre la puissance $3/4 > 0$ de l'égalité obtenue.

Pour le lecteur intéressé, l'inégalité de Jensen donne directement le résultat. Comme φ est continue, convexe sur \mathbb{R}_+ , on peut écrire

$$\mathbb{E}(|Y|^3)^{4/3} = \varphi(\mathbb{E}(|Y|^3)) \leq \mathbb{E}(\varphi(|Y|^3)) = \mathbb{E}(Y^4).$$

20 \triangleright On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange. La fonction $f : u \rightarrow e^{iu}$ est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} . On peut donc écrire

$$\left| f(u) - f(0) - f'(0)u - \frac{f''(0)}{2}u^2 \right| \leq \frac{\sup_{[0,1]} |f'''(u)|}{6} |u|^3.$$

Ici, l'on a $f(0) = 1$, $f'(0) = i$, $f''(0) = -1$ et $f'''(u) = i^2 e^{iu} \Rightarrow |f'''(u)| = 1$. On en déduit

$$\forall u \in \mathbb{R}, \left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{|u|^3}{6}.$$

On remplace u par $Y\theta$ et l'on prend l'espérance dans l'inégalité

$$\mathbb{E} \left| e^{iY\theta} - 1 - iY\theta + \frac{Y\theta^2}{2} \right| \leq \mathbb{E} \left(\frac{|Y|^3}{6} \right)$$

On utilise alors les relations $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, et $|\Im(z)| \leq |z|$, valable pour tout z complexe. On utilise également le fait que la valeur absolue de l'espérance est inférieure à l'espérance de la valeur absolue. On peut, ainsi écrire, sachant $\mathbb{E}(Y) = 0$ comme Y est centrée.

$$\begin{aligned} \left| \Phi_Y(\theta) - 1 - \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| &= \left| \mathbb{E}(\cos(Y\theta) + i\mathbb{E}(\sin(Y\theta) - 1 - i\mathbb{E}(Y)\theta + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2}) \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E}(\cos(Y\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2}) \right| + |\mathbb{E}(\sin(Y\theta) - \mathbb{E}(Y)\theta)| \\ &\leq \mathbb{E} \left(\left| \cos(Y\theta) - 1 - \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \right) + \mathbb{E}(|\sin(Y\theta) - Y\theta|) \\ &\leq 2\mathbb{E} \left(\left| \cos(Y\theta) + i\sin(Y\theta) - 1 + iY\theta + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \right) \\ &\leq 2\mathbb{E} \left(\frac{|Y\theta|^3}{6} \right) \leq \frac{|\theta|^3}{3} \mathbb{E}(Y^4)^{3/4} \end{aligned}$$

On a utilisé la deuxième inégalité de la question précédente.

21 \triangleright Je commence par un petit lemme liminaire,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, |e^{-y} - 1 + y| \leq \frac{1}{2}y^2.$$

Il va sans dire que le lecteur perspicace aura reconnu la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $f : y \mapsto e^{-y}$. La fonction f est bien \mathcal{C}^2 et l'on a $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ et $f''(y) = e^{-y}$, donc $\sup_{\mathbb{R}_+} |f''| = 1$.

On peut donc substituer dans

$$|f(y) - f(0) - f'(0)y| \leq \frac{1}{2} \sup_{\mathbb{R}_+} |f''| y^2$$

On peut alors effectuer les calculs suivants

$$\begin{aligned} \left| \Phi_Y(\theta) - \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) \right| &\leq \left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| + \left| \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \\ &= \frac{|\theta|^3}{3} \mathbb{E}(Y^4)^{3/4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right)^2 = \frac{|\theta|^3}{3} \mathbb{E}(Y^4)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y^4) \end{aligned}$$

F. Convergence vers une gaussienne

22 ▷ On procède par récurrence sur $n \geq 1$.

initialisation

Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Pour $n = 2$, on écrit,

$$\begin{aligned} |z_1 z_2 - u_1 u_2| &= |z_1 z_2 - z_1 u_2 + z_1 u_2 - u_1 u_2| \\ &= |z_1(z_2 - u_2) + (z_1 - u_1)u_2| \leq |z_1| \cdot |z_2 - u_2| + |u_2| \cdot |z_1 - u_1| \\ &\leq |z_1 - u_1| + |z_2 - u_2| \end{aligned}$$

puisque $|z_1| \leq 1$ et $|u_2| \leq 1$. On utilisera ce cas, $n = 2$, dans la suite du raisonnement.

hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que pour tous complexes (z'_1, \dots, z'_n) et (u'_1, \dots, u'_n) , on a

$$\left| \prod_{k=1}^n z'_k - \prod_{k=1}^n u'_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z'_k - u'_k|.$$

Soient alors $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$ et $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ des complexes. On applique l'hypothèse de récurrence à,

$$z'_1 = z_1, \dots, z'_{n-1} = z_{n-1}, z'_n = z_n z_{n+1} \text{ et } u'_1 = u_1, \dots, u'_{n-1} = u_{n-1}, u'_n = u_n u_{n+1}.$$

On remarque que le membre de gauche nous donne

$$\left| \prod_{k=1}^n z'_k - \prod_{k=1}^n u'_k \right| = \left| \prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |z_k - u_k| + |z_n z_{n+1} - u_n u_{n+1}|.$$

On applique alors la propriété au rang 2 pour conclure.

Le théorème de récurrence permet alors de conclure. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

23 ▷ Notons, tout d'abord, que les résultats des questions 19 à 21 s'appliquent ici avec $Y = Y_k$. En effet, Z_k suit une loi géométrique, donc elle possède des moments à tout ordre, car sa fonction génératrice, $G_{Z_k}(t) = \frac{pt}{1-qt}$ est de classe C^∞ au voisinage de 1. Il en va donc de même pour Y_k . Cette dernière variable aléatoire est centrée : $\mathbb{E}(Y_k) = k\mathbb{E}(Z_k - \mathbb{E}(Z_k)) = 0$.

On commence par utiliser la question 14, avec $X = Z_k$, $p = 1 - e^{-kt}$, $a = k$ et $b = -k\mathbb{E}(z_k) = \frac{-k}{1-e^{-kt}}$, ce qui nous donne

$$\prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) = \prod_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-kt})e^{i(k-k/(1-e^{-kt}))\theta}}{1 - e^{-kt+ik\theta}}.$$

Selon la question 3, on a déjà la limite suivante,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{-kt}}{1 - e^{k(i\theta-t)}} = \frac{P(e^{i\theta-t})}{P(e^{-t})}$$

Il nous reste à étudier, lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$\prod_{k=1}^n \exp\left(ik \left(1 - \frac{1}{1 - e^{-kt}}\right) \theta\right) = \exp\left(-i\theta \sum_{k=1}^n \frac{ke^{-kt}}{1 - e^{-kt}}\right) \rightarrow e^{-i\theta S_{1,1}(t)}.$$

La somme dans l'exponentielle est justement la somme partielle de la série servant à définir $S_{1,1}(t)$, au début de la partie D. En reportant dans l'expression du produit, en utilisant $m_t = S_{1,1}(t)$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) = e^{-im_t \theta} \frac{P(e^{-t} e^{i\theta})}{P(e^{-t})} = h(t, \theta)$$

L'expression de $\sigma_t^2 = S_{2,1}(t)$ est donnée au début de la partie D

$$\sigma_t^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}$$

On va alors simplifier l'expression suivante à l'aide de la question 22,

$$\left| \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}\right) \right|$$

Pour pouvoir utiliser la question 23, il nous reste à faire le lien avec $\mathbb{E}(Y_k^2)$. La variable aléatoire Z_k suit une géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-kt}$. On a donc les relations

$$\mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{1 - e^{-kt}} \text{ et } v(Z_k) = \frac{e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}.$$

Comme $Y_k = k(Z_k - \mathbb{E}(Z_k))$, on en déduit $v(Y_k) = k^2 v(Z_k) = \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}$. De plus Y_k est centrée. La formule de Koenig-Huygens, nous donne $\mathbb{E}(Y_k^2) = v(Y_k) + \mathbb{E}(Y_k)^2$. On en tire $\mathbb{E}(Y_k^2) = \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}$. Avec tout cela, on va pouvoir utiliser la question 21 comme le suggère l'énoncé,

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}\right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y_k^2) \theta^2}{2}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{|\theta|^3}{3} \mathbb{E}(Y_k^4)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y_k^4) \end{aligned}$$

On applique alors la question 18 à la variable aléatoire $X = Z_k$,

$$\mathbb{E}(Y_k^4) = k^4 \mathbb{E}((Z_k - \mathbb{E}(Z_k))^4) \leq k^4 K \frac{e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^4}.$$

On reporte dans l'expression précédente. On en arrive à la majoration (on a fait tendre n vers $+\infty$)

$$\begin{aligned} \left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| &\leq \frac{|\theta|^3 K^3}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3 e^{-3kt/4}}{(1 - e^{-kt})^3} + K\theta^4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - 4e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^4} \\ &= K^{3/4} |\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t). \end{aligned}$$

24 \triangleright On utilise le développement limité de la question 11 qui permet d'exprimer un équivalent de $S_{n,\alpha}$ sous forme d'intégrale.

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = S_{2,1}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2} \\ &\underset{t \rightarrow 0+}{=} \frac{1}{t^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} dx + O(1/t^2) \\ &\underset{t \rightarrow 0+}{=} \frac{\pi^2}{3t^3} + O(1/t^2) \underset{t \rightarrow 0+}{=} \frac{\pi^2}{3t^3} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

selon le résultat admis de la question 12. On a le droit de prendre la puissance $1/2$ d'un équivalent, ce qui nous donne bien $\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3t^{3/2}}}$.

On remarque, en passant, que l'on a de la même façon,

$$m_t \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t^2} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx + O(1/t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{\pi^2}{6t^2} + O(1/t).$$

On reporte ceci dans l'expression de $\zeta(t, u)$

$$\begin{aligned} \zeta(t, u) &= \exp \left(i \frac{u}{\sigma_t} \left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2} \right) \right) \\ &\underset{t \rightarrow 0^+}{=} \exp \left(i u \frac{\sqrt{3} t^{3/2}}{\pi} O(1/t) \right) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Pour l'expression de $h(t, u/\sigma_t)$, on utilise la question 23 avec $\theta = \frac{u}{\sigma_t}$, donc $\sigma_t \theta = u$.

$$\left| h(t, u/\sigma_t) - e^{-u^2/2} \right| \leq K^{3/4} \left| \frac{u}{\sigma_t} \right|^3 S_{3,3/4}(t) + K \left| \frac{u}{\sigma_t} \right|^4 S_{4,1}(t)$$

On va montrer que les deux termes tendent vers 0 avec t . La question 11 nous donne déjà $S_{3,3/4}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(1/t^3)$ ainsi que $S_{4,1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(1/t^5)$, et l'on a vu, dans cette question 24, $\frac{1}{\sigma_t^4} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(t^6)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} K^{3/4} \left| \frac{u}{\sigma_t} \right|^3 S_{3,3/4}(t) &\underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(t^{3/2}) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \\ K \left| \frac{u}{\sigma_t} \right|^4 S_{4,1}(t) &\underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Muni de ces deux résultats, on peut conclure sur la limite de $j(t, u)$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left| j(u, t) - e^{-u^2/2} \right| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \zeta(t, u) h(t, \frac{u}{\sigma_t}) - e^{-u^2/2} \right| = 0.$$

25 \triangleright On note $g : \theta \mapsto \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2}$ pour $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ et $g(0) = \frac{1}{2}$. C'est une fonction continue, dans la mesure où l'on a le développement limité

$$\frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \underset{\theta \rightarrow 0}{=} \frac{1 - (1 - \theta^2/2 + o(\theta^2))}{\theta^2} \underset{\theta \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

On a, ainsi, une fonction continue sur l'intervalle compact $[-\pi, \pi]$. Elle y admet donc un minimum atteint en un point $\theta^* \in [-\pi, \pi]$. Il s'agit du théorème des bornes atteintes. On pose $\alpha = g(\theta^*)$. Pour montrer que $\alpha > 0$, on raisonne par l'absurde, en supposant, $\alpha \leq 0$, alors, comme $g(0) = 1/2 > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que g doit s'annuler.

Si $\theta \in [-\pi, \pi]$ vérifie $g(\theta) = 0$, alors, on a $1 - \cos(\theta) = 0$, donc $\theta = 0$. Ce n'est pas possible, car $g(0) = 1/2$. On va alors montrer qu'il existe $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, tels que, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t, \theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t \theta)^2}.$$

On ne traitera que la première inégalité. Pour la seconde, on procède de la même façon. On utilise la relation donnée au début de la partie F, avec $x = e^{-t}$, et $t_0 = \ln(2)$

$$h(t, \theta) = e^{-im_t \theta} \frac{P(e^{-t} e^{i\theta})}{P(e^{-t})}.$$

On applique alors la première relation de la question 9.

$$|h(t, \theta)| = \left| \frac{P(e^{-t} e^{i\theta})}{P(e^{-t})} \right| \leq \exp \left(-\frac{1 - \cos(\theta)}{6(1 - e^{-t})^3} \right) \leq \exp \left(-\frac{\alpha \theta^2}{6(1 - e^{-t})^3} \right).$$

Pour faire intervenir σ_t , on va faire intervenir $S_{2,1}(t)$, que l'on peut minorer

$$S_{2,1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kt}}{(1 - e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{(1 - e^{-t})^3}.$$

On a ainsi les inégalités, sachant $t \in [0, \ln(2)]$, donc $e^{-t} \geq e^{-\ln(2)}$.

$$\left| \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} \right| \leq \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6(1 - e^{-t})^3}\right) \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{6}e^{-t}\theta^2 S_{1,1}(t)\right) \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{12}\theta^2\sigma_t^2\right)$$

On obtient l'inégalité demandé, avec $\beta = \frac{\alpha}{12}$.

26 \triangleright Pour cette question, on utilise le théorème de convergence dominée. On a, selon la question 24, $\pi\sigma_t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$.

On utilise la fonction, g définie sur $]0, t_0] \times \mathbb{R}$, par

$$g(t, u) = j(t, u)\mathbf{1}_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]}$$

À t fixé, la fonction $u \mapsto g(t, u)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , car nulle en dehors d'un intervalle borné.

On a la convergence simple, selon la question 24,

$$\forall u \in \mathbb{R}, g(t, u) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} e^{-u^2/2}.$$

Il reste à établir l'hypothèse de domination. Cela vient de la question précédente. On utilise la définition de la fonction j . Pour tout $t > 0$ et u réel,

$$|g(t, u)| \leq \left| h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) \right| \leq \sup\left(e^{-\beta u^2}, e^{-\gamma(|u|)^{2/3}}\right) = o\left(\frac{1}{1 + u^2}\right)$$

Il s'agit bien de l'hypothèse de domination, puisque la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2+1}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} .

Le théorème de convergence dominée, nous donne donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi},$$

selon le résultat admis en début d'énoncé.

27 \triangleright On utilise la relation de la question 7,

$$p_n = \frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta.$$

On commence par s'intéresser à la fonction sous le signe intégrale. On a, selon la définition de $h(t, \theta)$ et de $j(t, u)$ donnée au début de la partie F. On pose $\theta = u/\sigma_t$

$$\begin{aligned} e^{in\theta} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} &= e^{i(n+m_t)\theta} h(t, \theta) \\ &= e^{i(n+m_t)\theta} e^{(-i\theta(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}))} j(t, \theta\sigma_t) \\ &= e^{i(n+\pi^2/(6t^2))\theta} j(t, \theta\sigma_t) \end{aligned}$$

Le choix de t proposé par l'énoncé, nous donne $n = \pi^2/(6t^2)$. On peut donc simplifier l'exponentielle. L'intégrale à étudier s'écrit $\int_{-\pi}^{\pi} j(t, \theta\sigma_t) d\theta$.

On effectue le changement de variable, C^1 sur $[-\pi, \pi]$, $\theta = u/\sigma_t$. En utilisant la question 26, on en arrive à

$$\int_{-\pi}^{\pi} j(t, \theta\sigma_t) d\theta = \sigma_t^{-1} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{3}t^{3/2}}{\pi} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{6t^3}{\pi}}.$$

Pour le facteur $P(e^{-t})$, on utilise alors la relation de l'énoncé. On obtient un équivalent de p_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, ou, ce qui revient au même $t \rightarrow 0^+$. On exprime d'abord p_n en fonction de t , sachant que $n = \frac{\pi^2}{6t^2}$

$$p_n \sim \frac{e^{\pi^2/(6t)}}{2\pi} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{\pi^2/(6t)} \sqrt{\frac{6t^3}{\pi}} = e^{\pi^2/(3t)} \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{3}t^2.$$

On remplace alors t par son expression en fonction de n . Cela nous donne

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(\frac{\pi^2}{\pi\sqrt{3/(2n)}}\right) \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{3} \frac{\pi^2}{3 \times 2n} = \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$