2024 - Centrale - MP - MPI - Mathématiques 1

Enoncé

Inégalité de Carleman

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Le problème est constitué de trois parties largement indépendantes.
La première partie commence en démontrant un analogue intégral de cette inégalité : l'inégalité de Knopp.
La deuxième partie s'intéresse à la démonstration originale de l'inégalité de Carleman, utilisant du calcul différentiel. Enfin, la troisième partie étudie l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

I Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carleman (on justifie cette appellation en fin de partie).

I.A - Deux inégalités intégrales

I.A.1) Inégalité intégrale de Jensen

Q1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J. Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\ dt.$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

I.A.2) Une autre inégalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable.
Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\ dt \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\ dt.$$

Q2. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

Q3. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Notant $1_{[0,x]}$ la fonction indicatrice de $[0,x]$, on pourra remarquer que $g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}tf(t)1_{[0,x]}(t)\ dt$.

Q4. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} h(x)dx.$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

I.B - Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Q5. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\, dt\right) \leqslant \frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\, dt.$$

On pourra remarquer que $\ln(f(t)) = \ln(tf(t)) - \ln(t)$.

Q6. En déduire que $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\, dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\, dt\right) dx \leqslant e\int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

I.C - Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs.
On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

Q7. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par

$$\begin{cases} v_k(x) &= \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \dfrac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k) \quad \text{si } k \geqslant 2 \\ v_1(x) &= \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

Q8. Démontrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\, dt\right) dx \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right).$$

On pourra utiliser la question précédente.

Q9. En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

Q10. Expliquer comment on peut retirer l'hypothèse de décroissance.

II Inégalité de Carleman

On démontre dans cette partie l'inégalité de Carleman d'une manière indépendante de la partie I.
La sous-partie II.A établit l'inégalité arithmético-géométrique avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la sous-partie II.B pour démontrer l'inégalité de Carleman.
La sous-partie II.B est indépendante de II.A. L'inégalité arithmético-géométrique sera utilisée dans la Partie III.
Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.

II.A - Inégalité arithmético-géométrique

Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s.$$

On note X_s le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\}$.

Q11. On admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n.
Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de U_n.

Q12. Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$.

On pourra vérifier que f est strictement positive en certains points de $X_s \cap U_n$.

On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

Q13. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda}$.

Q14. Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

II.B - Démonstration de l'inégalité de Carleman

On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad F_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + (x_1x_2)^{1/2} + (x_1x_2x_3)^{1/3} + \ldots + (x_1 \ldots x_n)^{1/n}.$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad h_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n - 1.$$

On admet que F_n et h_n sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n.

On note H_n l'ensemble $H_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 1\}$.

Q15. Déterminer le gradient de F_n et le gradient de h_n en tout point de U_n.

Q16. Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n} \cap H_n$ admet un maximum.

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n \cap H_n$.

On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $(a_1, \ldots, a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint.

Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k = (a_1a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

Q17. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\begin{cases} \gamma_1 + \dfrac{\gamma_2}{2} + \ldots + \dfrac{\gamma_n}{n} &= \lambda a_1. \\ \dfrac{\gamma_2}{2} + \ldots + \dfrac{\gamma_n}{n} &= \lambda a_2. \\ &\vdots \\ \dfrac{\gamma_n}{n} &= \lambda a_n. \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= 1. \end{cases}$$

Q18. En déduire que :

a) $\lambda = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n = M_n$;

b) pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\gamma_k = \lambda\omega_k a_k$, où

$$\begin{cases} \omega_k = k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) & \text{si } k \in [\![1, n-1]\!], \\ \omega_n = n. \end{cases}$$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leqslant e$. On suppose par l'absurde que $\lambda > e$.

Q19. Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{e} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$.

Q20. Démontrer que $\omega_1 \leqslant \dfrac{1}{e}$ et que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$.

On pourra démontrer, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, que $\omega_{k+1}^{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}\omega_k^k \left(1 - \dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$.

Q21. Aboutir à une contradiction sur ω_n.
En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant e.$$

Q22. En déduire l'inégalité de Carleman.

III Inégalité de Carleman-Yang

Le but de cette dernière partie est d'établir l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

III.A - Un développement en série entière

Soit φ la fonction définie par

$$\forall t \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \varphi(t) = (1-t)^{1-1/t}. \qquad \text{(III.1)}$$

On définit aussi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} b_0 &= -1. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n &= -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} b_{n-k}. \end{cases}$$

Q23. Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0.
On notera toujours φ ce prolongement.

Q24. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant 1$.
En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} b_k t^k$.

Q25. Démontrer que, pour tout t dans $]-1,1[$, $\varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$, où

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \psi(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} t^n, \qquad \text{(III.2)}$$

puis que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\varphi^{(n)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0).$$

Q26. Conclure alors que

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \varphi(t) = e\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right). \qquad \text{(III.3)}$$

III.B - Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

Q27. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}.$$

Q28. En considérant $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, en déduire l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n.$$

Q29. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geqslant 0$.
En quoi l'inégalité précédente est-elle un raffinement de l'inégalité de Carleman ?

2024 - Centrale - MP - MPI - Mathématiques 1

Un corrigé

I Inégalité de Knopp

Q1. On utilise le théorème sur les sommes de Riemann. Puisque f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, on a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

De même, puisque φ est continue sur J, $\varphi\circ f$ est bien définie et continue par morceaux sur $[a, b]$, d'où :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Puisque φ est convexe sur J, on a pour tous réels $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ de J :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x_k).$$

En particulier, en posant $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad x_k = f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

On passe à la limite lorsque $n\to+\infty$ et on utilise la continuité de φ :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) &= \varphi\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \underset{\varphi \text{ est continue}}{=} \lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f(t)\,dt.}$$

Q2. f est continue par morceaux donc bornée sur le segment $[0, 1]$.
Donc $\exists M > 0,\ \forall t \in [0, 1],\ 0 \leqslant f(t) \leqslant M$. Pour $x \in [0, 1]$:

$$0 \leqslant g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x tM\,dt = \frac{M}{x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{M}{x}\,\frac{x^2}{2} = \frac{M}{2}x \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 0.}$

Q3. On remarque que, en notant $1_{[0,x]}$ la fonction indicatrice de $[0, x]$:

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{t}{x}f(t)1_{[0,x]}(t)\,dt.$$

On applique **le théorème de convergence dominée**, étendu au cas d'une famille de paramètres réels.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{x}f(t)1_{[0,x]}(t)$ est **continue par morceaux** sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{t}{x}f(t)1_{[0,x]}(t)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{x}f(t)1_{[0,x]}(t) = 0$.
La fonction $t \mapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) **Hypothèse de domination.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left\{\begin{array}{llll} \forall t \in [0,x], & 1_{[0,x]}(t) = 1 & \text{donc} & \dfrac{t}{x}1_{[0,x]}(t) = \dfrac{t}{x} \leqslant 1. \\ \forall t \in]x,+\infty[, & 1_{[0,x]}(t) = 0 & \text{donc} & \dfrac{t}{x}1_{[0,x]}(t) = 0 \leqslant 1. \end{array}\right. \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{t}{x}1_{[0,x]}(t) \leqslant 1.$$

Puisque f est positive, on en déduit l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \boxed{0 \leqslant \frac{t}{x}f(t)1_{[0,x]}(t) \leqslant f(t).}$$

La fonction f est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, indépendante de x.

Par **le théorème de convergence dominée** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t}{x}f(t)1_{[0,x]}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} 0\ dt = 0.$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

Q4. Soient $0 < a < b$. On effectue une intégration par parties, en intégrant $x \mapsto xf(x)$ et en dérivant $x \mapsto \dfrac{1}{x}$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \frac{1}{x}\times(xf(x))\ dx = \left[\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\ dt\right]_a^b - \int_a^b\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\int_0^x tf(t)\ dt\right)\ dx = \Big[g(x)\Big]_a^b + \int_a^b h(x)\ dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b h(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - g(b) + g(a).$$

Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale partielle $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ admet une limite finie lorsque $a \to 0$ et $b \to +\infty$.

D'après la question **Q2.**, $\displaystyle\lim_{a\to 0} g(a) = 0$.

D'après la question **Q3.**, $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} g(b) = 0$.

Donc l'intégrale partielle $\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx$ admet une limite finie lorsque $a \to 0$ et $b \to +\infty$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\ dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} h(x)\ dx.}$

Q5. On fixe $x > 0$.

- D'une part, on calcule :

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t)\ dt\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\Big[t\ln(t) - t\Big]_0^x\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}(x\ln(x) - x)\right) = \exp(1-\ln(x)) = \frac{e}{x}.$$

- D'autre part, soit $a \in]0,x[$. Alors $g : \left|\begin{array}{ccc} [a,x] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(tf(t)) \end{array}\right.$ est continue par morceaux sur le segment $[a,x]$.
  On applique la question **Q1.** avec $\varphi = \exp$ qui est continue et convexe sur $\mathbb{R}$ (car $\exp'' = \exp \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$).

$$\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln(tf(t))\ dt\right) \leqslant \frac{1}{x-a}\int_a^x \exp\circ\ln(tf(t))\ dt = \frac{1}{x-a}\int_a^x tf(t))\ dt.$$

  La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0,x]$.
  De plus, f est continue par morceaux et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc $t \mapsto \ln(f(t))$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
  La somme des deux fonctions précédentes est la fonction $t \mapsto \ln(tf(t))$ et est intégrable sur $]0,x]$.
  On passe à la limite quand $a \to 0$ et on utilise la continuité de exp :

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\ dt\right) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x tf(t))\ dt.$$

- On obtient

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt\right) &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \Big(\ln(tf(t)) - \ln(t)\Big)\ dt\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t)\ dt\right)\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\ dt\right)\\
&= \frac{e}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\ dt\right) \qquad \leqslant \frac{e}{x}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t))\ dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall x>0,\quad \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt\right) \leqslant \frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t))\ dt.}$$

Q6. D'après la question **Q5.**, on a

$$\boxed{\forall x>0,\quad 0<\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt\right) \leqslant eh(x).}$$

D'après la question **Q4.**, la fonction eh est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par règle de majoration pour les fonctions positives, $\boxed{\text{la fonction } x\mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt\right) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$ car positive et majorée par la fonction eh.
De plus, par croissance de l'intégrale :

$$\forall A>0,\quad \int_0^A \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt\right)\ dx \leqslant e\int_0^A h(x)\ dx \leqslant e\int_0^{+\infty} h(x)\ dx \underset{\mathbf{Q4.}}{=} e\int_0^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Par passage à la limite quand $A\to+\infty$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt\right)\ dx \leqslant e\int_0^{+\infty} f(x)\ dx.}$$

Q7. La fonction v_1 est constante sur $[0,1]$, donc minimale en $x=1$.
Soit $k\geqslant 2$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs donc

$$\forall i\in[\![1,k-1]\!],\quad a_i\geqslant a_k,\qquad \text{donc } \frac{a_i}{a_k}\geqslant 1,\quad \ln\left(\frac{a_i}{a_k}\right)\geqslant 0,\qquad \text{et } \sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(\frac{a_i}{a_k}\right)\geqslant 0.$$

Puisque $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[k-1,k]$:

$$\begin{aligned}
\forall x\in[k-1,k],\quad v_k(x) &= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \frac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k)\\
&= \ln(a_k) + \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) - (k-1)\ln(a_k)\right)\\
&= \ln(a_k) + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\geqslant 1/k}\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(\frac{a_i}{a_k}\right)}_{\geqslant 0}\\
&\geqslant \ln(a_k) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(\frac{a_i}{a_k}\right) \qquad = v_k(k).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, \text{ la fonction } v_k \text{ est minimale pour } x=k.}$

Q8. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1,k[$.

- D'une part, on remarque que $v_1(1) = \ln(a_1)$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad v_k(k) = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \ln(a_k)\right). \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad v_k(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln(a_i).}$$

Cette expression est également valable pour $k = 1$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]k-1, k]$.
Si $k = 1$, alors $x \in]0, 1]$ et

$$\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt = \frac{1}{x}\int_0^x \ln(a_1)\ dt = \frac{1}{x} x \ln(a_1) = \ln(a_1) = v_1(x).$$

Supposons $k \geqslant 2$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \ln(f(t))\ dt &= \sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i} \ln(f(t))\ dt + \int_{k-1}^{x} \ln(f(t))\ dt \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i} \ln(a_i)\ dt + \int_{k-1}^{x} \ln(a_k)\ dt \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + (x-k+1)\ln(a_k). \\
\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt &= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \frac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k) = v_k(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]k-1, k], \quad \boxed{v_k(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt.}$$

- D'après la question précédente,

$$\forall x \in [k-1, k], \quad v_k(x) \geqslant v_k(k).$$

Par croissance de exp sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in [k-1, k], \quad \exp(v_k(x)) \geqslant \exp(v_k(k)).$$

On intègre sur le segment $[k-1, k]$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} \exp(v_k(x))\ dx \geqslant \int_{k-1}^{k} \exp(v_k(k))\ dx = v_k(k).$$

En remplaçant par les expressions trouvées :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\ dt\right)\ dx \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right).}$$

Q9. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite $\boxed{\textbf{décroissante}}$ de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

- Soit f la fonction en escalier qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est égale à a_n sur l'intervalle $[n-1, n[$.
Alors f est continue par morceaux et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Montrons que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $A > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $A \leqslant N$.
Puisque f est positive, par croissance de l'intégrale, puis par relation de Chasles :

$$\int_0^A f(x)\ dx \leqslant \int_0^N f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n} f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n} a_n\ dx = \sum_{n=1}^{N} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Les intégrales partielles de f (qui est positive) sont majorées donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
Ainsi f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, on peut lui appliquer la question **Q6.**.
On a montré que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^N f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} a_n$, d'où en passant à la limite quand $N \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On utilise la question **Q8.**, la relation de Chasles et la question **Q6.** :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\right) & \\
& = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)\right) & \\
& \underset{\mathbf{Q8}.}{\leqslant} & \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)\,dx & \\
& = & \displaystyle\int_0^{N} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)\,dx & \text{par la relation de Chasles} \\
& \leqslant & \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)\,dx & \text{car la fonction est positive et intégrable} \\
& \underset{\mathbf{Q6}.}{\leqslant} & \displaystyle e\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n. &
\end{array}$$

La série de terme général $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, donc converge. Donc la série $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \text{ converge.}}$
En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient **l'inégalité de Carleman :**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$$

Q10. On retire l'hypothèse de décroissance sur la suite.
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

- La série $\sum a_n$ converge donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
- On construit $\boxed{\text{une permutation } \sigma \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ telle que la suite } (a_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite décroissante.}}$
  - ⋆ Construisons le premier terme $\sigma(1)$.
    Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < a_1$. (a_k) tend vers 0 donc il existe un rang $N \geqslant 1$, $\forall k \geqslant N+1$, $a_k \leqslant \varepsilon$.
    On pose
    $$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 & = & \max\{a_k,\ k \in [\![1,N]\!]\}. \\ \sigma(1) & = & \min\{k \in [\![1,N]\!] \text{ tel que } a_k = b_1\}. \end{array}\right.$$
    Alors
    $$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \leqslant a_{\sigma(1)}.$$
  - ⋆ Supposons $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n-1))$ construits, deux à deux distincts et vérifiant :
    $$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{\sigma(1),\ldots,\sigma(n-1)\}, \quad a_k \leqslant a_{\sigma(n-1)} \leqslant \ldots \leqslant a_{\sigma(1)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < a_{\max(\sigma(1),\dots,\sigma(n-1))+1}$. En particulier, $\varepsilon \leqslant a_{\sigma(n-1)}$.
(a_k) tend vers 0 donc il existe un rang $N \geqslant 1$, $\forall k \geqslant N+1$, $a_k \leqslant \varepsilon$.
On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_n & = & \max\Big\{a_k, \quad k \in [\![1,N]\!] \setminus \{\sigma(1),\dots,\sigma(n-1)\}\Big\}. \\ \sigma(n) & = & \min\{k \in [\![1,N]\!] \setminus \{\sigma(1),\dots,\sigma(n-1)\} \text{ tel que } a_k = b_n\}. \end{array}\right.$$

Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}, \quad a_k \leqslant a_{\sigma(n)} \leqslant a_{\sigma(n-1)} \leqslant \dots \leqslant a_{\sigma(1)}.$$

$\star$ Par construction, σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ et la suite $(a_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- D'après le cours, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge également et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

- On applique le résultat de la question **Q9.** à la suite décroissante $(a_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$: la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction de la permutation σ, les n termes $(a_{\sigma(k)})_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont deux à deux plus grands que n termes quelconques de la suite (a_k) ordonnés de manière décroissante, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}.$$

Par croissance de $t \mapsto t^{1/n}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)^{1/n}.$$

Donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)^{1/n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Les sommes partielles sont majorées donc la série à termes positifs $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \text{ converge.}}$

Par passage à la limite quand $N \to +\infty$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$$

II Inégalité de Carleman

Q11. D'après l'énoncé, on admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n.

On a : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \overline{U_n}, \quad g_s(x_1,\dots,x_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s$. Donc $\quad \forall x \in U_n, \quad \boxed{\nabla g_s(x) = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}}.$

On a : $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\overline{U_n},\quad f(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}x_k$. Donc

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in U_n,\quad \nabla f(x)=\begin{pmatrix}x_2\cdots x_n\\ x_1x_3\cdots x_n\\ \vdots\\ x_1\cdots x_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\prod\limits_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{1\}}x_k\\ \vdots\\ \prod\limits_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{n\}}x_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{f(x)}{x_1}\\ \frac{f(x)}{x_2}\\ \vdots\\ \frac{f(x)}{x_n}\end{pmatrix}.\quad \boxed{\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\frac{f(x)}{x_1}\\ \frac{f(x)}{x_2}\\ \vdots\\ \frac{f(x)}{x_n}\end{pmatrix}}.$$

Q12. • L'application $f : x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto \prod_{k=1}^{n}x_k$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^n$.

• Montrons que X_s est compact.

$$X_s=\{x\in\overline{U_n}\mid g_s(x)=0\}=\overline{U_n}\cap g_s^{-1}(\{0\}).$$

L'application $g_s : x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)-s$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^n$.
Le singleton $\{0\}$ est fermé.
L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé, donc $g_s^{-1}(\{0\})$ est fermé.
Une adhérence est fermée donc $\overline{U_n}$ est fermée.
L'intersection de deux fermés est fermée, donc $\boxed{X_s \text{ est fermé.}}$
On note, pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|$.

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in X_s$. Alors $\forall k\in[\![1,n]\!], x_k>0$ et $x_k\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i=s$ donc $0<x_k\leqslant s$ et ainsi $|x_k|\leqslant s$.

D'où $\forall x\in X_s, \|x\|_\infty\leqslant s$. Donc $\boxed{X_s \text{ est bornée pour la norme } \|\cdot\|_\infty}$ (par s).
Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
Finalement, X_s est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie.
Donc $\boxed{X_s \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n.}$

• $\boxed{\text{L'application } f \text{ est continue sur le compact } X_s.}$
Par le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes sur X_s.
En particulier, $\boxed{f \text{ est majorée et atteint son maximum sur } X_s.}$

• Posons $y=(s/n,\dots,s/n)$. Alors $\forall k\in[\![1,n]\!],\ y_k=\frac{s}{n}>0$ donc $y\in U_n\subset\overline{U_n}$.

De plus, $\sum_{k=1}^{n}y_k=n\frac{s}{n}=s$, donc $g_s(y)=0$. Ainsi $y\in X_s$.

$$f(y)=\prod_{k=1}^{n}y_k=\prod_{k=1}^{n}\frac{s}{n}=\left(\frac{s}{n}\right)^n>0.$$

En particulier, le maximum m_n de f sur X_s vérifie $m_n\geqslant f(y)=\left(\frac{s}{n}\right)^n>0$ donc $m_n>0$.
Supposons par l'absurde que le maximum m_n de f sur X_s ne soit pas atteint sur $X_s\cap U_n$, alors il est atteint en un point $x=(x_1,\dots,x_n)$ vérifiant $x\in\overline{U_n}\setminus U_n$.

Donc il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0}=0$, alors $m_n=f(x)=\prod_{k=1}^{n}x_k=0$, ce qui est absurde car $m_n>0$.

Donc $\boxed{\text{le maximum } m_n \text{ de } f \text{ sur } X_s \text{ est en fait atteint sur } X_s\cap U_n.}$

Q13. On applique le **théorème d'optimisation sous une contrainte.**

• U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien.

• D'après l'énoncé, $f : U_n\to\mathbb{R}$ et $g_s : U_n\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U_n.

- $X_s \cap U_n = \{x \in U_n \mid g_s(x) = 0\}$ est l'ensemble des zéros de g_s sur U_n.
- $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum global.

  Donc la restriction de f à $X_s \cap U_n$ admet un extremum local en a. De plus $\nabla g_s(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

- D'après le théorème, ∇f et ∇g_s sont colinéaires : $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g_s(a).}$

On obtient :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{f(a)}{a_1} \\ \dfrac{f(a)}{a_2} \\ \vdots \\ \dfrac{f(a)}{a_n} \end{pmatrix} = \lambda \nabla g_s(a) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{f(a)}{a_k} = \lambda.$$

On remarque que $a \in U_n$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k > 0$ et $f(a) = \prod_{k=1}^{n} a_k > 0$. D'où $\lambda = \dfrac{f(a)}{a_1} > 0$.

Finalement

$$\boxed{\exists \lambda > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = \frac{f(a)}{\lambda}.}$$

Q14. • Déterminons le point a. D'après la question **Q13.** : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda} = a_1$.
Puisque $a \in X_s$, on a $g_s(a) = 0$, d'où :

$$g_s(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) - s = n a_1 - s = 0 \text{ donc } a_1 = \frac{s}{n}.$$

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = a_1 = \dfrac{s}{n}$ et $\boxed{a = \left(\dfrac{s}{n}, \dots, \dfrac{s}{n} \right).}$

- La restriction de f à X_s atteint son maximum en a donc $\forall x \in X_s \cap U_n, \quad f(x) \leqslant f(a)$. Ainsi :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n, \quad f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant f(a) = \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{s}{n} = \left(\frac{s}{n} \right)^n.$$

Par croissance de $t \mapsto t^{1/n}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n, \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leqslant \frac{s}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.}$$

- Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.
Premier cas. On suppose qu'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} = 0$.
Alors $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$, donc l'inégalité à démontrer est claire.
Deuxième cas. On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i \neq 0$. Alors $x \in U_n = (\mathbb{R}_+^*)^n$.
Posons $s = \sum_{i=1}^{n} x_i > 0$. Alors $x \in X_s \cap U_n$.
On a déjà démontré l'inégalité dans le cas où $x \in X_s \cap U_n$.
Conclusion. Dans les deux cas, on obtient **l'inégalité arithmético-géométrique :**

$$\boxed{\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.}$$

Q15. D'après l'énoncé, on admet que F_n et h_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n.

On a : $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \overline{U_n}, \quad h_n(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \ldots + x_n - 1$. Donc $\quad \forall x \in U_n, \quad \boxed{\nabla h_n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}.$

On a : $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \overline{U_n}, \quad F_n(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + (x_1x_2)^{1/2} + (x_1x_2x_3)^{1/3} + \ldots + (x_1\ldots x_n)^{1/n}$. Donc

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in U_n, \quad \boxed{\nabla F_n(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1}\left(x_1 + \dfrac{1}{2}(x_1x_2)^{1/2} + \dfrac{1}{3}(x_1x_2x_3)^{1/3} + \ldots + \dfrac{1}{n}(x_1\ldots x_n)^{1/n}\right) \\ \dfrac{1}{x_2}\left(\dfrac{1}{2}(x_1x_2)^{1/2} + \dfrac{1}{3}(x_1x_2x_3)^{1/3} + \ldots + \dfrac{1}{n}(x_1\ldots x_n)^{1/n}\right) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{x_n}\dfrac{1}{n}(x_1\ldots x_{n-1}x_n)^{1/n}. \end{pmatrix}}.$$

Q16. • Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

L'application $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \displaystyle\prod_{i=1}^{k} x_i$ est polynomiale donc continue sur $(\mathbb{R}_+)^n$.
L'application $t \mapsto t^{1/k}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par composition, chaque application $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1\ldots x_k)^{1/k}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+)^n$.
Par somme d'applications continues, $F_n : x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_1\ldots x_k)^{1/k}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+)^n$.

• Montrons que $\overline{U_n} \cap H_n$ est compact.

$$\overline{U_n} \cap H_n = \overline{U_n} \cap \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \ldots + x_n = 1\} = \overline{U_n} \cap \{x \in \mathbb{R}^n, h_n(x) = 0\} = \boxed{\overline{U_n} \cap h_n^{-1}(\{0\})}.$$

L'application $h_n : x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - 1$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^n$.
Le singleton $\{0\}$ est fermé.
L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé, donc $h_n^{-1}(\{0\})$ est fermé.
Une adhérence est fermée donc $\overline{U_n}$ est fermée.
L'intersection de deux fermés est fermée, donc $\boxed{\overline{U_n} \cap H_n \text{ est fermé.}}$
On note, pour $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

Soit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \overline{U_n} \cap H_n$. Alors $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k > 0$ et $x_k \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ donc $0 < x_k \leqslant 1$ et ainsi $|x_k| \leqslant 1$.

D'où $\forall x \in \overline{U_n} \cap H_n, \|x\|_\infty \leqslant 1$. Donc $\boxed{\overline{U_n} \cap H_n \text{ est bornée pour la norme } \|\cdot\|_\infty}$ (par 1).
Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
Finalement, $\overline{U_n} \cap H_n$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie.
Donc $\boxed{\overline{U_n} \cap H_n \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n.}$

• $\boxed{\text{L'application } F_n \text{ est continue sur le compact } \overline{U_n} \cap H_n.}$
Par le théorème des bornes atteintes, F_n est bornée et atteint ses bornes sur $\overline{U_n} \cap H_n$.
En particulier, $\boxed{F_n \text{ est majorée et atteint son maximum sur } \overline{U_n} \cap H_n.}$

Q17. On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $a = (a_1,\ldots,a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint. Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k = (a_1\ldots a_k)^{1/k}$.

On applique le **théorème d'optimisation sous une contrainte.**

• U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien.
• D'après l'énoncé, $F_n : U_n \to \mathbb{R}$ et $h_n : U_n \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U_n.

- $U_n \cap H_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_n \mid x_1 + \ldots + x_n = 1\} = \{x \in U_n \mid h_n(x) = 0\}$ est l'ensemble des zéros de h_n sur U_n.
- $a = (a_1, \ldots, a_n)$ est un élément de $U_n \cap H_n$ en lequel la restriction de F_n à $U_n \cap H_n$ atteint son maximum global.

  Donc la restriction de F_n à $U_n \cap H_n$ admet un extremum local en a. De plus $\nabla h_n(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.
- D'après le théorème, ∇F_n et ∇h_n sont colinéaires : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \nabla F_n(a) = \lambda \nabla h_n(a)$.
- De plus, $a \in H_n$ donc $h_n(a) = 0$.

On obtient le système :

$$\boxed{(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \nabla F_n(a) & = & \lambda \nabla h_n(a). \\ h_n(a) & = & a_1 + \ldots + a_n - 1 = 0. \end{array} \right.}$$

D'où

$$\nabla F_n(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1}\left(a_1 + \frac{1}{2}(a_1a_2)^{1/2} + \ldots + \frac{1}{n}(a_1 \ldots a_n)^{1/n}\right) \\ \frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{2}(a_1a_2)^{1/2} + \ldots + \frac{1}{n}(a_1 \ldots a_n)^{1/n}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n}\frac{1}{n}(a_1 \ldots a_{n-1}a_n)^{1/n}. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1}\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \ldots + \frac{\gamma_n}{n}\right) \\ \frac{1}{a_2}\left(\frac{\gamma_2}{2} + \ldots + \frac{\gamma_n}{n}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n}\frac{\gamma_n}{n} \end{pmatrix} = \lambda \nabla h_n(a) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne donne $\lambda = \frac{1}{a_n}\frac{\gamma_n}{n} > 0$ (car $a \in U_n$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!], \ a_k > 0$). Finalement :

$$(\mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists \lambda > 0, \left\{ \begin{array}{rcll} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \ldots + \frac{\gamma_n}{n} & = & \lambda a_1. & (L_1) \\ \frac{\gamma_2}{2} + \ldots + \frac{\gamma_n}{n} & = & \lambda a_2. & (L_2) \\ & \vdots & & \\ \frac{\gamma_n}{n} & = & \lambda a_n. & (L_n) \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n & = & 1. & (L_{n+1}) \end{array} \right.}$$

Q18. a) Puisque le maximum M_n de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ est atteint en $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on a $M_n = F_n(a)$.
La somme des n premières lignes du système précédent donne ensuite :

$$M_n = F_n(a) = F_n(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + (a_1a_2)^{1/2} + \ldots + (a_1 \ldots a_n)^{1/n} = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \lambda(a_1 + \ldots + a_n) = \lambda \times 1 = \lambda.$$

Donc $\boxed{\lambda = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n = M_n.}$

b) La ligne (L_n) donne $\frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n$ donc $\gamma_n = \lambda n a_n = \lambda \omega_n a_n$ en posant $\omega_n = n$.
Le système précédent donne également, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$L_k - L_{k+1} : \quad \frac{\gamma_k}{k} = \lambda(a_k - a_{k+1}) = \lambda a_k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \quad \text{donc} \quad \gamma_k = \lambda k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) a_k.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \gamma_k = \lambda \omega_k a_k \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{rcll} \omega_k & = & k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) & \text{si } k \in [\![1, n-1]\!], \\ \omega_n & = & n. & \end{array} \right.}$$

Q19. Montrons que $\boxed{\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+u) \leqslant u.}$

Posons $f : u \mapsto u - \ln(1+u)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad f'(u) = 1 - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{u}{1+u} \geqslant 0$.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $f(0) = 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$, d'où le résultat.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \exp\left((k+1)\ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\right) \leqslant \exp\left((k+1)\frac{1}{k+1}\right) = e.$$

En passant à l'inverse, on obtient :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{e} \leqslant \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}.}$$

Q20. On suppose par l'absurde que $\lambda > e$.

- On a $\gamma_1 = a_1$, or $\gamma_1 = \lambda\omega_1 a_1$, avec $a_1 > 0$ car $a = (a_1, \dots a_n) \in U_n \cap H_n$.
  Donc $\lambda\omega_1 = 1$. Puisque $\lambda > e$, $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{e}.}$
  D'après la question **Q19.** appliquée en $k = 0$: $\dfrac{1}{e} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{\omega_1 \leqslant \dfrac{1}{2}.}$
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimons ω_{k+1}^{k+1} en fonction de ω_k^k.

$$\begin{aligned} \gamma_k^k &= a_1 \cdots a_k &&= \lambda^k \omega_k^k a_k^k. \\ \gamma_{k+1}^{k+1} &= a_1 \cdots a_k a_{k+1} &&= \lambda^{k+1}\omega_{k+1}^{k+1} a_{k+1}^{k+1}. \\ \frac{\gamma_{k+1}^{k+1}}{\gamma_k^k} &= a_{k+1} &&= \lambda \frac{\omega_{k+1}^{k+1}}{\omega_k^k}\frac{a_{k+1}^{k+1}}{a_k^k}. \end{aligned}$$

  On en déduit que

$$\frac{\omega_{k+1}^{k+1}}{\omega_k^k} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^{-k} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}.$$

  D'où $\boxed{\omega_{k+1}^{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k}.}$
- Montrons par récurrence finie sur k que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$.
  - **Initialisation : $k = 1$.** On a déjà montré que $\omega_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  - **Hérédité.** On suppose le résultat vrai au rang k et on le montre au rang $k+1$.

  Par hypothèse de récurrence, $\omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$. Par décroissance des fonctions $x \mapsto -x$ et $x \mapsto x^{-k}$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} & \omega_k &\leqslant\ & \frac{k}{k+1}. \\ \Rightarrow\ & -\frac{\omega_k}{k} &\geqslant\ & -\frac{1}{k+1}. \\ \Rightarrow\ & 1 - \frac{\omega_k}{k} &\geqslant\ & 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}. \\ \Rightarrow\ & \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} &\leqslant\ & \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

  D'après la formule montrée précédemment :

$$\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\left(\frac{k}{k+1}\right)^{-k} = \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{e} \underset{\textbf{Q19.}}{\leqslant} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}.$$

  Donc $\omega_{k+1} \leqslant \dfrac{k+1}{k+2}$, ce qui achève la récurrence.

  On a montré que $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}.}$

Q21. On aboutit à la contradiction suivante : $\boxed{\omega_n = n \leqslant \dfrac{n}{n+1}}$ ce qui est absurde car $\dfrac{1}{n+1} < 1$ (en effet $n \geqslant 1$).

On a montré par l'absurde que $\boxed{\lambda \leqslant e.}$
Puisque $\lambda = M_n$ est le maximum de F_n sur $U_n \cap H_n$, on a :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_n \cap H_n, \quad F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant M_n = \lambda \leqslant e.$$

Donc

$$\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ tel que } x_1 + \ldots + x_n = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant e.}$$

Q22. • Démontrons un résultat intermédiaire.

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On pose $s = \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = \dfrac{x_k}{s} > 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} y_k = \dfrac{1}{s} \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.
Donc $(y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ vérifie $y_1 + \ldots + y_n = 1$. D'après la question **Q21.**, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (y_1 \cdots y_k)^{1/k} \leqslant e.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} (y_1 \cdots y_k)^{1/k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_1}{s} \cdots \frac{x_k}{s} \right)^{1/k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{s^k} x_1 \cdots x_k \right)^{1/k} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant e.$$

D'où $\sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant es = e \sum_{k=1}^{n} x_k$. On a ainsi démontré que :

$$\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant e \sum_{k=1}^{n} x_k.}$$

• Démontrons l'inégalité de Carleman.

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. D'après le résultat démontré au début de cette question, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n} = \sum_{n=1}^{N} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{N} a_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Puisque la suite des sommes partielles est majorée, la série à termes positifs $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n} \text{ converge.}}$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient **l'inégalité de Carleman :**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$$

III Inégalité de Carleman-Yang

Q23. Pour $t \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, quand $t \to 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (1-t)^{1-1/t} &&= \exp\left[\left(1 - \frac{1}{t} \right) \ln(1-t) \right] &&= \exp\left[\frac{(t-1)}{t} (-t + o(t)) \right] \\ &= \exp\Big[(t-1)(-1 + o(1)) \Big] &&= \exp(1 + o(1)) &&\underset{t \to 0}{\to} e. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \varphi(0) = e.}$

Q24. • Montrons par une récurrence forte sur $n \geqslant 1$ que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant 1$.

⋆ **Initialisation : cas** $n = 1$**.** On a $b_0 = -1$ donc $b_1 = -\dfrac{1}{2}b_0 = \dfrac{1}{2}$. En particulier, $|b_1| \leqslant 1$.

⋆ **Hérédité.** Supposons le résultat vrai **jusqu'au rang** $n-1$ et montrons-le au rang n.
On a $|b_0| = 1$ et on suppose que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ |b_k| \leqslant 1$. Par inégalité triangulaire :

$$|b_n| = \left| -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} b_{n-k} \right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\underbrace{|b_{n-k}|}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{n} = 1,$$

ce qui achève la récurrence. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |b_n| \leqslant 1.}$

• Soit R le rayon de convergence de de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} b_k t^k$.

Par définition du rayon de convergence, on a $R = \sup\Big\{ r \geqslant 0, \text{tel que la suite } (b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\Big\}$.

On vient de montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par 1), donc $\boxed{R \geqslant 1.}$

Q25. • On a :

$$\forall t \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \varphi(t) = (1-t)^{1-1/t} = \exp\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right)\ln(1-t)\right).$$

Donc φ est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et

$$\forall t \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{t^2}\ln(1-t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)\frac{-1}{1-t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\ln(1-t).$$

Ainsi $\forall t \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$ en posant $\boxed{\psi(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}\ln(1-t).}$

ψ admet une limite finie en 0 :

$$\text{Quand } t \to 0, \quad \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\ln(1-t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\left(-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = -\frac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\to} -\frac{1}{2}.$$

On a donc $\displaystyle\lim_{t\to 0}\psi(t) = -\frac{1}{2}$. D'après la question **Q23.**, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varphi(t) = e$. il vient

$$\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\to} \left(\lim_{t\to 0}\varphi(t)\right)\left(\lim_{t\to 0}\psi(t)\right) = -\frac{e}{2}.$$

Donc le prolongement par continuité de φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -\dfrac{e}{2}$.
De plus, le développement en série entière sur $]-1,1[$ de $t \mapsto \ln(1-t)$ donne :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1,1[\setminus\{0\}, \qquad \psi(t) &= \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\ln(1-t) &&= \frac{1}{t^2}\Big(t + \ln(1-t)\Big) &&= \frac{1}{t^2}\left(t - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{t^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n}{n} &&= -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^{n-2}}{n} &&= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+2}. \end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $t = 0$ car $\displaystyle\lim_{t\to 0}\psi(t) = -\frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]-1,1[\text{ et } \forall t \in]-1,1[, \quad \varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t) \text{ où } \psi(t) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+2}.}$

• ψ est une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$, donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
De plus, les coefficients de la série entière s'expriment en fonction des dérivées en 0 de la somme de la série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{n+2} = \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{donc} \quad \boxed{\psi^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n+2}.}$$

- φ et ψ sont continues sur $]-1,1[$ donc $\varphi' = \varphi \times \psi$ est continue sur $]-1,1[$.
  Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
  Montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$ que φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-1,1[$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  Initialisation : pour $k = 1$, on a montré que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
  Hérédité : supposons le résultat vrai au rang k et montrons-le au rang $k+1$.
  Par hypothèse de récurrence, φ est de classe $\mathcal{C}^k$.
  ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^k$.
  $\varphi' = \varphi \times \psi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).
  Donc φ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui termine la récurrence.
  On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
  On a montré que $\forall t \in]-1,1[, \quad \varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$.
  Par **la formule de Leibniz** de dérivation $(n-1)$ fois d'un produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n)}(0) = (\varphi')^{(n-1)}(0) &= (\psi \times \varphi)^{(n-1)}(0) &&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \psi^{(k)}(0)\varphi^{(n-1-k)}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(-\frac{k!}{k+2}\right) \varphi^{(n-k-1)}(0) &&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0).
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^{(n)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0).}$$

Q26.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **Q25.**, en utilisant un changement d'indice :

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} &= -\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0) \\
&= -\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k+1} \binom{n-1}{k-1} \varphi^{(n-k)}(0) \\
&= -\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k+1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \varphi^{(n-k)}(0) \\
&= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

  Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{\beta_n = -\frac{1}{e}\ \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.}$ On remarque que

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\beta_0 &=& -\frac{1}{e}\ \varphi(0) = -1 & \text{car } \varphi(0) = e. \\
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n &=& -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \beta_{n-k}. &
\end{array}\right.$$

  Donc la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncide avec la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = -e\ b_n.}$
- Si φ est développable en série entière sur $]-1,1[$, alors φ est égale à sa série de Taylor qui vaut :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n = -e \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = -e\left(-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n\right) = \boxed{e\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n\right).}$$

- Montrons que φ est développable en série entière sur $]-1,1[$.
  φ ne s'annule pas sur $]-1,1[$. Posons

$$\forall t \in]-1,1[, \quad u(t) = \frac{e}{\varphi(t)}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n\right).$$

Alors u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\begin{aligned}\forall t\in]-1,1[,\quad u'(t) &= \frac{e}{(\varphi(t))^2}\left(\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} nb_nt^{n-1}\right)\varphi(t)-\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty} b_nt^n\right)\varphi'(t)\right)\\ &= \frac{e}{(\varphi(t))^2}\left(-\varphi(t)\sum_{n=1}^{+\infty} nb_nt^{n-1}+\varphi(t)\psi(t)\sum_{n=0}^{+\infty} b_nt^n\right)\\ &= \frac{e}{\varphi(t)}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}t^n+\psi(t)\sum_{n=0}^{+\infty} b_nt^n\right).\end{aligned}$$

Un produit de Cauchy de deux séries entières, qui sont toutes deux de rayon $R\geqslant 1$, donne :

$$\begin{aligned}\forall t\in]-1,1[,\quad \psi(t)\sum_{n=0}^{+\infty} b_nt^n &= \left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+2}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_nt^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{-1}{k+2}b_{n-k}\right)t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{-1}{k+1}b_{n+1-k}\right)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}t^n,\end{aligned}$$

d'après la formule de récurrence définissant la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient alors

$$\forall t\in]-1,1[,\quad u'(t)=0.$$

Donc u est constante, égale à $u(0)=\dfrac{e}{\varphi(0)}=\dfrac{e}{e}=1$ sur $]-1,1[$. Donc $\forall t\in]-1,1[,\quad u(t)=1$, d'où :

$$\boxed{\forall t\in]-1,1[,\quad \varphi(t)=e\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty} b_kt^k\right).}$$

En particulier φ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Q27. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.
On utilise **l'inégalité arithmético-géométrique** avec $(a_nc_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est une suite de réels strictement positifs :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left(\prod_{i=1}^{n} a_ic_i\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_kc_k.$$

D'où en multipliant par $\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}>0$:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}=\left(\prod_{i=1}^{n} a_ic_i\right)^{1/n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}\leqslant\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}\sum_{k=1}^{n} a_kc_k.$$

Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On somme l'inégalité précédente de 1 à N :

$$\begin{aligned}u_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}\sum_{k=1}^{n} a_kc_k = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_kc_k\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}\\ &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant N} a_kc_k\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} a_kc_k\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}\\ &= \sum_{k=1}^{N} a_kc_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}=v_N.\end{aligned}$$

Les suites $(u_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ que l'on vient de définir sont des suites croissantes de réels strictement positifs, donc elles convergent dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. On a donc

$$\text{Dans }\overline{\mathbb{R}_+}:\quad 0<\lim_{N\to+\infty} u_N\leqslant\lim_{N\to+\infty} v_N.$$

D'où :

$$\text{Dans } \overline{\mathbb{R}_+} : \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}}.$$

Q28. Dans l'inégalité de la question **Q27.**, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}} > 0$.
On remarque que le produit suivant est télescopique :

$$\prod_{k=1}^{n} c_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)^k}{\prod_{k=1}^{n} k^{k-1}} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^{n} k^{k-1}} = (n+1)^n.$$

D'où

$$\frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^{n} c_k\right)^{-n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

La série $\sum_{n \geqslant k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge par télescopage et on obtient

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^{n} c_k\right)^{-1/n} = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{k}.$$

D'après la question **Q 27.** :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} &\underset{\mathbf{Q27}.}{\leqslant} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n} &&= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k c_k \, \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{(k+1)^k}{k^k} &&= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{1-(k+1)} &&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&\underset{\mathbf{Q26}.}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k\right),
\end{aligned}$$

en appliquant la question **Q26.** avec $t = \dfrac{1}{n+1} \in]-1, 1[$. D'où **l'inégalité de Carleman-Yang :**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n.}$$

Q29.
- Les trois premiers termes sont strictement positifs : $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{24}$, $b_3 = \dfrac{1}{48}$.
  Je ne sais pas comment montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ b_n \geqslant 0$.
- On admet que les coefficients b_n sont positifs ou nuls. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k} \leqslant 1 - \frac{b_1}{n+1} < 1.$$

  Donc l'inégalité de Carleman-Yang est plus précise que l'inégalité de Carleman :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$