1. **Question préliminaire.** Soit $R > 0$. Soit $n \geq 1$. Je pose $u_n = \frac{(pn)^r}{(pn)!} R^n$.

$$\text{On a } u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{pn+p}{pn}\right)^r \times \frac{R}{\prod_{i=1}^p (pn+i)}$$

$$\text{or } \frac{pn+p}{pn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } \prod_{i=1}^p (pn+i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $0 < 1$. D'où selon d'Alembert la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Ainsi la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$

Soit $z \in \mathbb{C}$. En prenant $Z = z^p$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} Z^n$ converge d'après ce qui précède

donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}$ est convergente.

Ainsi la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}$ a aussi pour rayon de convergence $+\infty$

Autre méthode pour le premier résultat : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\left| \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n \right| = \frac{(pn)^r}{(pn)!} (|z|^{1/p})^{pn}$

Or par croissance comparée la suite $\left(\frac{N^r (|z|^{1/p})^N}{N!} \right)_{N \geq 0}$ converge vers 0

donc la suite extraite $\left(\frac{(pn)^r}{(pn)!} |z|^n \right)_{n \geq 1}$ converge vers 0 et donc la suite $\left(\frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n \right)_{n \geq 1}$ est bornée

On arrive à la même conclusion avec le lemme d'Abel.

A. Equivalence entre $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ lorsque $r > 0$

2. La fonction φ_x est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$.

Soit $t > 1$. On a $\varphi'_x(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = t^{-r}(t-1)^{r-1} [(1-r)(t-1) + rt]$

donc $\varphi'_x(t) = t^{-r}(t-1)^{r-1}(t-1+r)$

donc $t-1+r = 0 \Leftrightarrow t = 1-r$ or $1-r < 1 \leq t$

Ainsi $\varphi'_x(t) > 0$

donc φ_x est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

De plus $\varphi_x(1) = -x$ et quand $t \rightarrow +\infty$, $\varphi_x(t) \sim t \rightarrow +\infty$

ainsi φ_x réalise une bijection entre $[1, +\infty[$ et $[-x, +\infty[$

donc φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on note t_x

et pour $t \geq 1$ on a : $\varphi_x(t) > 0 \Leftrightarrow t > t_x$ et $\varphi_x(t) < 0 \Leftrightarrow 1 \leq t < t_x$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n(x) > 0$ et $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{x^n}{n!} \left[\frac{(n+1)^r x}{n+1} - n^r \right]$

donc $u_{n+1}(x) - u_n(x) = -\frac{x^n (n+1)^{r-1}}{n!} \varphi_x(n+1)$ où $n+1 \geq 1$

Si $n \leq n+1 \leq \lfloor t_x \rfloor \leq t_x$, on a donc $\varphi_x(n+1) \leq 0$ et $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$

Si $n \geq \lfloor t_x \rfloor$ alors $n+1 \geq t_x$, on a donc $\varphi_x(n+1) \geq 0$ et $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$

ainsi la suite finie $(u_n(x))_{0 \leq n \leq \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite infinie $(u_n(x))_{n \geq \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x \geq 1 - \alpha$, on a $\varphi_x(x + \alpha) = (x + \alpha)^{1-r}(x + \alpha - 1)^r - x$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $(x + \alpha)^{1-r}(x + \alpha - 1)^r = x \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} \left(1 + \frac{\alpha-1}{x}\right)^r$

donc $(x + \alpha)^{1-r}(x + \alpha)^r = x \left(1 + (1-r)\frac{\alpha}{x} + o(1/x)\right) \left(1 + r\frac{\alpha-1}{x} + o(1/x)\right)$

ainsi $(x + \alpha)^{1-r}(x + \alpha)^r = x \left(1 + (1-r)\frac{\alpha}{x} + r\frac{\alpha-1}{x} + o(1/x)\right) = x + (\alpha - r\alpha + r\alpha - r) + o(1)$

donc $\varphi_x(x + \alpha) = \alpha - r + o(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_x(x + \alpha) = \alpha - r$

Soit $\varepsilon > 0$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_x(x + r + \varepsilon) = \varepsilon$

ce qui nous fournit $A_1 > 1$ tel que $\forall x \geq A_1, \varphi_x(x + r + \varepsilon) \geq \varepsilon/2$

donc selon les variations de φ_x , on a $\forall x \geq A_1, x + r + \varepsilon \geq t_x$

et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_x(x + r - \varepsilon) = -\varepsilon$

ce qui nous fournit $A_2 > 1$ tel que $\forall x \geq A_2, x + r - \varepsilon \leq t_x$ de façon analogue.

En prenant $A = \max(A_1, A_2)$, on a $\forall x \geq A, -\varepsilon \leq x + r - t_x \leq \varepsilon$

On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \geq 1, \forall x \geq 1, x \geq A \implies |x + r - t_x| \leq \varepsilon$$

Ainsi $t_x - x - r$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $\lfloor x \rfloor \rightarrow +\infty$ donc $\lfloor x \rfloor + k > 0$

donc $\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{N}^*$ pour x au voisinage de $+\infty$

de plus $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \frac{(\lfloor x \rfloor + k)^r}{(\lfloor x \rfloor + k)!} x^{\lfloor x \rfloor + k} > 0$ et $\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k + 1}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)} = \left(\frac{\lfloor x \rfloor + k + 1}{\lfloor x \rfloor + k}\right)^r \times \frac{x}{\lfloor x \rfloor + k + 1}$

or $\frac{\lfloor x \rfloor + k + 1}{\lfloor x \rfloor + k} = 1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor + k} \rightarrow 1$

et $0 < x + k \leq \lfloor x \rfloor + k + 1 \leq x + k + 1$ pour x au voisinage de $+\infty$

donc $\frac{x}{x + k + 1} \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor + k + 1} \leq \frac{x}{x + k}$

d'où $\frac{x}{\lfloor x \rfloor + k + 1} \rightarrow 1$ selon les gendarmes et ainsi $\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k + 1}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)} \rightarrow 1$

donc $u_{\lfloor x \rfloor + k + 1}(x) \sim u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

On vient de montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}, u_{\lfloor x \rfloor + p + 1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor + p}(x)$ puis par récurrences immédiates :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}, u_{\lfloor x \rfloor + p + m}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor + p}(x) \text{ et } u_{\lfloor x \rfloor + p - m}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor + p}(x)$$

Finalement : $\forall k \in \mathbb{Z}, u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ en prenant $p = k$ et $m = |k|$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \sum_{j=0}^n u_{\lfloor x \rfloor - n + j}(x)$.

$u_{\lfloor x \rfloor - n + j}(x) \sim u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ ainsi $u_{\lfloor x \rfloor - n + j}(x) = u_{\lfloor x \rfloor}(x) + o(u_{\lfloor x \rfloor}(x))$

En sommant n fois (n ne dépend pas de x), on a $\sum_{j=0}^n u_{[x]-n+j}(x) = \sum_{j=0}^n u_{[x]}(x) + o(u_{[x]}(x))$

donc $\sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x) - nu_{[x]}(x) = u_{[x]}(x) + o(u_{[x]}(x))$

d'où $\sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x) - nu_{[x]}(x) \sim u_{[x]}(x)$

or $\forall p \in \mathbb{N}, u_p(x) > 0$

Par théorème sur le signe des équivalents, on a pour x au voisinage de $+\infty$, $\sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x) - nu_{[x]}(x) > 0$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout x au voisinage de $+\infty$, $\sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x) \geq nu_{[x]}(x)$

5. **Méthode 1 :** Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier naturel n tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Pour ce n , la question précédente donne, pour x assez grand : on a $x > n + 1$ et

$$0 \leq u_{[x]} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=[x]-n}^{[x]} \frac{i^r}{i!} x^i \leq \frac{x^r}{n} \sum_{i=[x]-n}^{[x]} \frac{i^r}{i!} x^i \leq \frac{x^r e^x}{n} \leq \varepsilon x^r e^x$$

Ainsi $u_{[x]} = o(x^r e^x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 : Quand $x \rightarrow +\infty$, je note $N = [x] + 1$

de sorte que $1 \leq x \leq N \leq 1 + x$ et $N \sim x$ et $N \rightarrow \infty$ comme en 4.

On a $u_N(x) = \frac{N^r}{N!} x^N \sim \frac{x^r e^N}{\sqrt{2\pi N N^N}} x^N$ d'après Stirling et car $N \sim x$ or

$$0 \leq \frac{x^r e^N}{\sqrt{2\pi N N^N}} x^N = x^r e^x \frac{e^{N-x}}{\sqrt{2\pi N}} \left(\frac{x}{N}\right)^N \leq x^r e^x \frac{e}{\sqrt{2\pi N}}$$

or $\frac{e}{\sqrt{2\pi N}} \rightarrow 0$ donc $u_{[x]+1}(x) = o(x^r e^x)$

En utilisant la question précédente, on obtient, on conclut que

pour tout entier relatif k , $u_{[x]+1}(x) \sim u_{[x]}(x) \sim u_{[x]+k}(x) = o(x^r e^x)$ quand $x \rightarrow +\infty$

On a $t_x - x - r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ d'après 3 ce qui nous fournit $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $-1/2 \leq t_x - x - r \leq 1/2$

Soit $x \geq A$. On a $x + r - 1/2 \leq t_x \leq x + r + 1/2$.

d'où $[x] + [r] - 1/2 \leq t_x \leq [x] + [r] + 2 + 1/2$

ainsi $[x] + [r] - 1 \leq [t_x] \leq [x] + [r] + 2$

donc $[r] - 1 \leq [t_x] - [x] \leq [r] + 2$

donc $M_x = u_{[t_x]}(x) = u_{[x]+i}(x)$ avec i entier compris entre $[r] - 1$ et $[r] + 2$

d'où $0 \leq M_x \leq \sum_{i=[r]-1}^{[r]+2} u_{[x]+i}(x)$ car les $u_{[x]+i}(x) > 0$

or $\sum_{i=\lfloor r \rfloor - 1}^{\lfloor r \rfloor + 2} u_{\lfloor x \rfloor + i}(x) = 4 o(x^r e^x) = o(x^r e^x)$

On peut conclure que $M_x = o(x^r e^x)$

6. Soit $x > 0$. On a $S_{r,1}(zx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) z^n$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\sum_{n=1}^N \frac{n^r}{n!} x^n z^n = \sum_{n=1}^N u_n(x) (D_{n+1} - D_n) = \sum_{n=1}^N u_n(x) D_{n+1} - \sum_{n=1}^N u_n(x) D_n$

donc après changement d'indice et car $u_0(x) = 0$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{n^r}{n!} x^n z^n = \sum_{p=2}^{N+1} u_{p-1}(x) D_p - \sum_{n=1}^N u_n(x) D_n = u_N(x) D_{N+1} + \sum_{n=1}^N D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x))$$

Or $|u_N(x) D_{N+1}| = \frac{N^r x^N}{N!} \left| \sum_{k=0}^N z^k \right| \leq \frac{N^r x^N}{N!} \sum_{k=0}^N |z^k| \leq \frac{N^r x^N}{N!} \times (N + 1)$

Ainsi en faisant comme en 1 et avec les gendarmes, on a $u_N(x) D_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} x^n z^n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x) D_{n+1}$ converge de même somme :

$$S_{r,1}(zx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x))$$

On a donc $S_{r,1}(zx) = - \sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} D_n (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x))$

En utilisant les variations de la suite $(u_n(x))_n$,

on a donc $n \geq \lfloor t_x \rfloor + 1 \Rightarrow u_{n-1}(x) - u_n(x) \geq 0$ et $n \leq \lfloor t_x \rfloor \Rightarrow u_n(x) - u_{n-1}(x) \geq 0$ puis

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} |D_n| (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} |D_n| (u_{n-1}(x) - u_n(x))$$

Comme la suite $(u_n(x))_n$ converge vers 0,

alors la série $\sum_{n \geq \lfloor t_x \rfloor + 1} (u_{n-1}(x) - u_n(x))$ converge de somme $u_{\lfloor t_x \rfloor} = M_x$ d'après le lien suite série

De plus pour $n \in \mathbb{N}$, on a $D_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ car $z \neq 1$ d'où $|D_n| \leq \frac{|1| + |z|^n}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}$

donc $|S_{r,1}(zx)| \leq \sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} \frac{2}{|1 - z|} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} \frac{2}{|1 - z|} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \frac{2}{|1 - z|} M_x + \frac{2}{|1 - z|} M_x$

Par conséquent $|S_{r,1}(zx)| \leq \frac{4M_x}{|1 - z|}$

Ainsi $S_{r,1}(zx) = O(M_x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, ce qui permet de conclure que $S_{r,1}(zx) = o(x^r e^x)$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} \zeta^{kn} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k \right) \frac{n^r}{n!} x^n$$

Or pour $n \in \mathbb{N}$, si $p|n$, on a $\zeta^n = 1$ et donc $\sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k = p$

si $n \not\equiv 0 [p]$, alors $\zeta^n \neq 1$ et donc $\sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k = \frac{1 - \zeta^{pn}}{1 - \zeta^n} = 0$ car $\zeta^p = 1$

La série étant absolument convergente, on peut réordonner la somme (sommation par paquets) et la ré-indexer

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 0 [p]}}^{+\infty} 0 + \sum_{m=1}^{+\infty} p \frac{(pm)^r}{(pm)!} x^{pm}$$

On a bien montré que $\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = p S_{r,p}(x)$

On suppose que $(H_{r,1})$ est vrai on a donc

$$S_{r,1}(\zeta^0 x) = S_{r,1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x = \frac{x^r e^x}{1}$$

de plus pour $k \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, on a $\zeta^k \neq 1$ et $|\zeta^k| = 1$ donc $S_{r,1}(\zeta^k x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^r e^x)$ selon 6

Par somme, on a donc $\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x$

d'où $S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^r e^x}{p}$ ce qui nous donne $(H_{r,p})$

Réciproquement si on suppose $(H_{r,p})$, alors en utilisant 6, on obtient $(H_{r,1})$

On en déduit que $\boxed{\text{les énoncés } (H_{r,p}) \text{ et } (H_{r,1}) \text{ sont équivalents}}$

B. Une démonstration probabiliste

8. Soit $\alpha > 0$. Soit $x > 0$. On a $X_x \sim \mathcal{P}(x)$ donc d'après le cours $\mathbb{E}(X_x) = \mathbb{V}(X_x) = x < +\infty$ de plus $\alpha x^{2/3} > 0$,

Alors selon Pafnouti Tchebichev, on a $\mathbb{P}(|X_x - \mathbb{E}(X_x)| \geq \alpha x^{2/3}) \leq \frac{\mathbb{V}(X_x)}{\alpha^2 x^{4/3}}$

donc $\mathbb{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) \leq \frac{1}{\alpha^2 x^{1/3}}$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty}$ selon les gendarmes

9. Soit $x > 1$. Soit $\omega \in \Omega$. On a

Si $Z_x(\omega) \geq 1 - x^{-1/3}$, alors $A_x(\omega) = 0$

et si $Z_x(\omega) < 1 - x^{-1/3}$, alors comme $Z_x(\omega) = \frac{X_x(\omega)}{x} > 0$

on a $A_x(\omega) = Z_x(\omega)^r \leq (1 - x^{-1/3})^r$

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $0 \leq A_x(\omega) \leq (1 - x^{-1/3})^r$ et $0 \leq B_x(\omega) \leq (1 + x^{-1/3})^r$ (analogue)

Les variables aléatoires $\boxed{A_x \text{ et } B_x \text{ sont donc d'espérances finies}}$ car bornées

de plus on a $0 \leq A_x \leq (1 - x^{-1/3})^r \mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}$ en reprenant la disjonction de cas

d'où $0 \leq \mathbb{E}(A_x) \leq (1 - x^{-1/3})^r \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})})$

or $(1 - x^{-1/3})^r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}) = \mathbb{P}(Z_x < 1 - x^{-1/3})$ (loi de Bernoulli)

or $(Z_x < 1 - x^{-1/3}) = (X_x < x - x^{2/3}) \subset (|X_x - x| > x^{2/3})$

donc $0 \leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}) \leq \mathbb{P}(|X_x - x| > x^{2/3})$

en utilisant la question précédente, on a $\mathbb{P}(|X_x - x| > x^{2/3}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

ainsi en appliquant les gendarmes et par produit $\boxed{\mathbb{E}(A_x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$

On remarque que $(1 - x^{-1/3})^r \mathbf{1}_{(|X_x - x| \leq x^{2/3})} \leq B_x = \mathbf{1}_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})} Z_x^r \leq (1 + x^{-1/3})^r \mathbf{1}_{(|X_x - x| \leq x^{2/3})}$ donc

$$(1 - x^{-1/3})^r \mathbb{P}(|X_x - x| \leq x^{2/3}) \leq B_x \leq (1 + x^{-1/3})^r \mathbb{P}(|X_x - x| \leq x^{2/3})$$

or $\mathbb{P}(|X_x - x| \leq x^{2/3}) = 1 - \mathbb{P}(|X_x - x| > x^{2/3})$ et

lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $\mathbb{P}(|X_x - x| > x^{2/3}) \rightarrow 0$ donc $\mathbb{P}(|X_x - x| \leq x^{2/3}) \rightarrow 1$

Ainsi $(1 - x^{-1/3})^r \mathbb{P}(|X_x - x| \leq x^{2/3}) \rightarrow 1$ et $(1 + x^{-1/3})^r \mathbb{P}(|X_x - x| \leq x^{2/3}) \rightarrow 1$

On trouve que $\boxed{\mathbb{E}(B_x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}$ selon les gendarmes

10. Soit $x > 0$. Soit $\omega \in \Omega$.

Si $X_x(\omega) \leq N - 1$ alors $Y_{N,x}(\omega) = 0$

et si $X_x(\omega) \geq N$, alors $Y_{N,x}(\omega) = \frac{X_x(\omega)!}{(X_x(\omega) - N)!} \mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})}(\omega) \geq 0$

donc $Y_{N,x} \geq 0$, on calcule alors dans $[0, +\infty]$ avec la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(Y_{N,x}) = \sum_{\substack{n=N \\ n > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \frac{n!}{(n - N)!} \mathbb{P}(X_x = n) = \sum_{\substack{n=N \\ n > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{(n - N)!} = \sum_{\substack{k=0 \\ k + N > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \frac{x^{k+N} e^{-x}}{k!}$$

donc par réunion dénombrable disjointe :

$$\mathbb{E}(Y_{N,x}) = x^N \sum_{\substack{k=0 \\ k > x + x^{2/3} - N}}^{+\infty} \mathbb{P}(X_x = k) = x^N \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{k=0 \\ k > x + x^{2/3} - N}}^{+\infty} (X_x = k)\right)$$

d'où $\boxed{x^N \mathbb{P}(X_x > x + x^{2/3} - N) = \mathbb{E}(Y_{N,x}) \in \mathbb{R}$ et $Y_{N,x}$ est bien d'espérance finie

Pour x au voisinage de $+\infty$, on a $N \leq \frac{x^{2/3}}{2}$ car $\frac{x^{2/3}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

On a donc $(X_x > x + x^{2/3} - N) \subset (X_x - x > \frac{1}{2}x^{2/3}) \subset (|X_x - x| > \frac{1}{2}x^{2/3})$

or d'après 8 $\mathbb{P}(|X_x - x| > \frac{1}{2}x^{2/3}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

d'où selon les gendarmes $\mathbb{P}(X_x > x + x^{2/3} - N) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathbb{E}(Y_{N,x}) = o(x^N)$ quand $x \rightarrow +\infty$

11. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on considère le polynôme de $\mathbb{R}[T]$: $P_k = \prod_{i=1}^{k-1} (T - i)$. et on a $\deg P_k = k - 1$.

Ainsi la famille $(P_1, \dots, P_N)$ est une famille échelonnée en degrés de $\mathbb{R}_{N-1}[T]$

elle est donc libre composée de N polynômes et $\dim \mathbb{R}_{N-1}[T] = N$

donc $(P_1, \dots, P_N)$ est une base de $\mathbb{R}_{N-1}[T]$

ce qui nous fournit $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ tels que $T^{N-1} = \sum_{k=1}^N a_k P_k$

donc $T^N = \sum_{k=1}^N a_k \prod_{i=0}^{k-1} (T - i)$

Soit $x > 0$. On a donc $\mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} X_x^N = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} \prod_{i=0}^{k-1} (X_x - i)$

ainsi $\mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} X_x^N = \sum_{k=1}^N a_k Y_{k,x}$

On a $\mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} Z_x^N = \mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} \frac{X_x^N}{x^N} = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{x^N} Y_{k,x}$

Par linéarité, $\mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} Z_x^N$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^N) = \sum_{k=1}^N a_k \frac{\mathbb{E}(Y_{k,x})}{x^N}$

or $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbb{E}(Y_{k,x}) = o(x^k) = o(x^N)$ donc la limite de $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^N)$ est 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$

12. Soit $\omega \in \Omega$. On a $\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})}(\omega) Z_x^r(\omega) \neq 0 \implies Z_x(\omega) > 1$

donc dans tous les cas on a $0 \leq \mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})}(\omega) Z_x^r(\omega) \leq \mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})}(\omega) Z_x^{\lceil r \rceil + 1}(\omega)$

En appliquant ce qui précède à $N = \lceil r \rceil + 1 \in \mathbb{N}^*$ on a par croissance de l'espérance :

$$0 \leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r) \leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^N)$$

puis avec les gendarmes : $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

On a $Z^r = \mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r + A_x + B_x$

car $\Omega = (Z_x > 1 + x^{-1/3}) \cup (Z_x < 1 - x^{-1/3}) \cup (|Z_x - 1| < x^{-1/3})$ (réunion disjointe)

ainsi par linéarité : $\mathbb{E}(Z_x^r) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r) + \mathbb{E}(A_x) + \mathbb{E}(B_x)$

On en déduit que $\mathbb{E}(Z_x^r) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$ à l'aide de 9

On a selon la formule de transfert $\mathbb{E}(Z_x^r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{x^r} \mathbb{P}(X_x = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r x^n e^{-x}}{x^r n!} = \frac{S_{r,1}(x)}{e^x x^r}$

Ainsi $\frac{S_{r,1}(x)}{e^x x^r} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ ce qui donne la validité de l'énoncé $H_{r,1}$

13. Soit $x > 0$.

Par un changement d'indice sur les sommes partielles, on a $S_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} x^{np}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, je pose $a_n = \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}$ et $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $b_n = \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}$

de sorte que $S_{r-p,p}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{np}$ et $S_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{np}$

La série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (i) et pour $n \geq 1$, on a $b_n > 0$ (iii)

$$\text{et } \frac{a_n}{b_n} = \frac{(p(n+1))^r (pn)!}{(pn)^{r-p} (p(n+1))!} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-p} \frac{(p(n+1))^p}{(pn+p) \times (pn+p-1) \times \dots \times (pn+1)}$$

donc quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-p} \rightarrow 1$ et $\frac{(p(n+1))^p}{(pn+p) \times (pn+p-1) \times \dots \times (pn+1)} \sim \frac{(pn)^p}{(pn)^p} = 1$

donc $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ et ainsi $a_n \sim b_n$ (ii)

donc d'après le lemme de comparaison asymptotique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

donc par composition : $\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{np}}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{np}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi $S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^p S_{r-p,p}(x)$

Comme les multiplications et les divisions sont compatibles avec l'équivalence asymptotique,

on en déduit que $(H_{r,p})$ implique $(H_{r-p,p})$

On a montré que $(H_{r,p})$ est vraie pour tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$

On suppose maintenant que $r \leq 0$ je note alors $r' = r + (1 - [r/p])p$ de sorte que $r' > 0$

Ainsi $(H_{r',p})$ est vraie (établie après 12)

Par récurrence immédiate, on montre alors que $(H_{r'-kp,p})$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$

En particulier vraie pour $k = 1 - [r/p] \in \mathbb{N}$ or $r' - (1 - [r/p])p = r$

On conclut à la validité de $(H_{r,p})$ pour tout $r \in \mathbb{R}$

C. Application à l'équation d'Airy

14. **Question préliminaire.** Soit un entier $n > 1$.

$$\text{On a } v_n - v_{n-1} = \ln(n) + x(\ln(n) - \ln(n-1)) - \ln(x+n) = -x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$\text{donc quand } n \rightarrow +\infty, \text{ on a } v_n - v_{n-1} = -x \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} + O\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

or la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

donc par comparaison à une série à termes positifs la série $\sum (v_n - v_{n-1})$ converge absolument donc converge

Par le lien suite série la suite $(v_n)_n$ converge ce qui nous fournit ℓ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

$$\text{Or pour } n \geq 2, \text{ on a } v_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) + \ln(n^x) - \ln\left(\prod_{k=0}^n (x+k)\right) = \ln\left(\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}\right)$$

donc quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \rightarrow e^x$ car exp est continue sur $\mathbb{R}$

comme $e^x \neq 0$, on a $\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \sim e^x$

Comme $e^x > 0$, on en déduit l'existence d'un réel $\Gamma(x) = e^x > 0$ vérifiant la *formule d'Euler* :

$$\prod_{k=0}^n (x+k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{\Gamma(x)}$$

15. L'équation (Ai) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continus et celui de y'' ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

il existe une unique solution f sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy : f solution de (Ai) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

16. **Analyse** On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout réel t , $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ Par dérivations d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence (rayon infini), on a $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ et $f''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

On a $tf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{p=3}^{\infty} a_{p-3} t^{p-2}$ et $f''(t) = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

d'où $0 = f''(t) - tf(t) = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1)a_n - a_{n-3}] t^{n-2}$

Comme c'est valable pour tout réel t , par unicité du développement en série entière on a $2a_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$, $a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)}$.

On a également $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = 0$

Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ [3] $\implies a_n = 0$

Si $3|n$, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ et on a la relation de récurrence, $a_{3(k+1)} = \frac{a_{3k}}{3k(3k-1)}$

donc $a_{3k} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k 3i(3i-1)}$ par récurrence immédiate avec la convention $a_0 = 1$ (produit vide)

Synthèse : On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_n = 0$ si $3 \nmid n$ et $a_{3k} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k 3i(3i-1)}$

On pose f somme de la série entière $\sum_n a_n t^n$ en travaillant avec des sommes partielles, on montre que

cette série à même rayon que la série entière $\sum_{k \geq 0} a_{3k} t^{3k}$

Soit $t > 0$. on pose $u_k = a_{3k} t^{3k}$ et on a $u_k > 0$ de plus $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{3k(3k-1)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ et $0 < 1$

donc d'après D'Alembert la série $\sum_k u_k$ converge. Ainsi le rayon est infini et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En remontant les calculs, f est bien solution au problème précédent

Conclusion : On a $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{3k}}{\prod_{i=1}^k 3i(3i-1)}$

17. Soit $n \geq 1$. On a $a_{3n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n 3i(3i-1)}$

Or $\prod_{i=1}^n 3i(3i-1) = 3^n n! \prod_{i=1}^n (3i-1) = 3^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (3k+2) = 3^{2n} n! \prod_{k=0}^{n-1} (k+2/3)$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $\prod_{k=0}^{n-1} (k+2/3) \sim \frac{(n-1)^{3/2} (n-1)!}{\Gamma(2/3)}$

donc $a_{3n} \sim \frac{\Gamma(2/3)n}{9^n n! (n-1)^{3/2} n!} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n^{1/3}}{9^n (n!)^2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

La formule de Stirling donne :

$a_{3n} \sim n^{-1/6} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

18. On utilise le lemme de comparaison asymptotique des séries entières (avec la variable t^3 !!!) et l'équivalent qui précède

Après intervention de $S_{-1/6,2}$ et des calculs pénibles, certains trouvent $C = \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}$

FIN DU PROBLÈME : OUF !