

Composition de Mathématiques D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices est interdite

Sujet saisi par Michel Quercia (michel.quercia@prepas.org) d'après l'original.

Le problème est consacré à l'étude de la répartition de certains ensembles d'entiers dans les suites arithmétiques. Les deux premières parties sont consacrées à des ensembles arbitraires, et les deux suivantes à l'ensemble des nombres premiers.

Les parties **I**, **II** et **III** sont indépendantes. La partie **IV** utilise les résultats de la partie **III**.

Préambule

Le cardinal d'un ensemble fini X est noté $|X|$. Si E et F sont deux ensembles quelconques, on note $E \setminus F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F .

On dira qu'une suite finie $a_1, \dots, a_r$ d'entiers relatifs est en progression arithmétique si l'on peut trouver deux entiers a et b tels que $a_i = a + bi$ pour $i = 1, \dots, r$. L'entier b est alors la *raison* de cette progression arithmétique.

I

Si E et F sont deux ensembles finis, la *discrépance* de F par rapport à E est l'entier positif

$$\Delta(E, F) = ||F \cap E| - |E \setminus F||.$$

- 1) Soit X un ensemble fini de cardinal d . Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X .
 - a) Calculer le cardinal de $\mathcal{P}(X)$.
 - b) Calculer en fonction de d les sommes $\sum_{k=0}^d k \binom{d}{k}$ et $\sum_{k=0}^d k(k-1) \binom{d}{k}$.
 - c) Calculer les sommes $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y|$ et $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y|^2$.
 - d) Montrer l'égalité $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} \Delta(X, Y)^2 = d$.
- 2) Si N et q sont deux entiers strictement positifs, et si a est un entier relatif, on note $S_{q,a}(N)$ l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, N\}$ qui sont congrus à a modulo q . On note $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(\{1, \dots, N\})$.
 - a) Montrer que pour tous entiers $1 \leq a \leq q \leq N$, le cardinal de $S_{q,a}(N)$ est strictement inférieur à $1 + N/q$.
 - b) Montrer que pour tous entiers $1 \leq t \leq N$, on a

$$\frac{1}{|\mathcal{P}(N)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(N)} \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 \leq 2Nt.$$

- 3) Dédurre de la question précédente qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier N strictement positif, il existe un sous-ensemble Y de $\{1, \dots, N\}$ vérifiant, pour tout q compris entre 1 et N et tout a entre 1 et q , l'inégalité $\Delta(S_{q,a}(N, Y)) \leq CN^{2/3}$. On pourra pour cela choisir judicieusement la valeur de t dans l'inégalité ci-dessus.

II

Dans cette partie, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont nulles en dehors d'un ensemble fini. Si c est un élément de $\mathcal{E}$, on note $\widehat{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n)e^{2i\pi nx}$. On pourra remarquer que, par définition de l'espace $\mathcal{E}$, le membre de droite de l'expression ci-dessus est une somme finie.

- 1) a) Soit $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ un élément de $\mathcal{E}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, montrer les égalités

$$\int_{x=0}^1 \widehat{c}(x)e^{-2i\pi nx} dx = c(n) \text{ et } \int_{x=0}^1 |\widehat{c}(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)|^2.$$

- b) Soient c et d deux éléments de $\mathcal{E}$. On définit leur produit de convolution $c * d : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$(c * d)(n) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2, p+q=n} c(p)d(q).$$

Montrer que $c * d$ est bien défini et appartient à $\mathcal{E}$.

- c) Avec les notations de la question précédente, montrer l'égalité $\widehat{c * d} = \widehat{c}\widehat{d}$.

Dans ce qui suit, soit N un entier strictement positif et soit Y un sous-ensemble de $\{1, \dots, N\}$ de cardinal r . On note $\eta = r/N$ et $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $\chi(k) = 1 - \eta$ si $k \in Y$, $\chi(k) = -\eta$ si $k \in \{1, \dots, N\} \setminus Y$ et $\chi(k) = 0$ sinon.

- 2) Montrer l'égalité $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) = 0$.
 3) Si E est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, on note $V(E)$ la quantité $|E \cap Y| - \eta|E \cap \{1, \dots, N\}|$. Soit c_{-E} la fonction caractéristique de $-E$, qui vaut 1 en n si $-n \in E$, et 0 sinon. Montrer l'égalité $V(E) = (\chi * c_{-E})(0)$.

Soit s un entier positif inférieur ou égal à N . On s'autorisera plus tard à choisir s de manière adaptée en fonction de N .

- 4) Soit q un entier strictement positif. On note c_q la fonction caractéristique de l'ensemble

$$E_q = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } q \text{ divise } n \text{ et } |n| \leq sq\}.$$

- a) Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe deux entiers distincts $i, j \in \{1, \dots, n\}$, et un entier relatif $h \in \mathbb{Z}$, tels que $|\alpha_i - \alpha_j - h| \leq 1/n$.
 b) Soit α un nombre réel, et soit Q un nombre entier strictement positif. Montrer qu'il existe un entier $q \in \{1, \dots, Q\}$ et un entier h tels que $|q\alpha - h| \leq 1/Q$.
 c) Soit α un nombre réel. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de N et s , et un entier $q \leq 8s$ tel que $|\widehat{c}_q(\alpha)| \geq Ks$.
 5) Soit p un entier. On note $E_{q,p} = p + E_q = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } n - p \in E_q\}$.
 a) En utilisant la question II-1a, montrer l'inégalité

$$\sum_{1 \leq q \leq 8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 \geq K^2 \eta(1 - \eta) N s^2.$$

- b) En choisissant judicieusement s , montrer que l'on peut trouver une constante $K' > 0$ indépendante de N et de Y , et un sous-ensemble Z d'éléments de $\{1, \dots, N\}$ en progression arithmétique tels que

$$||Y \cap Z| - \eta|Z|| \geq K' \sqrt{\eta(1 - \eta)} N^{1/4}.$$

III

1) Soit $\omega : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\omega(u) = 1/u$ si $1 \leq u \leq 2$ et

$$\omega(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \int_{t=1}^{u-1} \omega(t) dt$$

pour $u > 2$.

- a) Montrer que la formule ci-dessus définit bien une fonction continue sur $[1, \infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]2, \infty[$.
- b) Montrer que pour tout réel $u \geq 1$, on a $1/u \leq \omega(u) \leq 1$.
- c) Montrer que $u\omega'(u) = -\int_{t=u-1}^u \omega'(t) dt$ pour tout réel $u > 3$.
- d) Montrer que pour tout entier $k > 0$, on a $\lim_{u \rightarrow \infty} u^k \omega'(u) = 0$.
- e) Montrer que ω admet une limite finie en $+\infty$. Dans la suite du problème, on notera L cette limite.
- f) Soit $\tilde{\omega}$ la fonction $u \mapsto \omega(u) - L$. Montrer l'égalité

$$\forall u > 3, u\tilde{\omega}(u) = -\int_{t=u-1}^{\infty} \tilde{\omega}(t) dt.$$

- g) Montrer que pour tout réel $C \geq 1$, il existe deux nombres réels $u, v > C$ tels que $\omega(u) < L < \omega(v)$.

Dans la suite du problème, si x est un nombre réel strictement positif, on notera $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x . On admettra le théorème suivant, dit *théorème des nombres premiers*.

Théorème III.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x > 1, \left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x} \right| \leq C \frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Dans la suite on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

2) Montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tous réels $1 < a \leq b$, on ait

$$\left| \pi(b) - \pi(a) - \sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{\ln n} \right| \leq K \frac{b}{(\ln b)^2}.$$

3) Soit $f :]1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction, et soient $1 < a \leq b$ deux nombres réels. Soit a^- le plus grand entier strictement inférieur à a , et soit b^0 le plus grand entier inférieur ou égal à b , c'est-à-dire la partie entière de b .

- a) Montrer l'égalité

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} f(p) = \sum_{a \leq n \leq b} \pi(n)(f(n) - f(n+1)) - \pi(a^-)f(1+a^-) + \pi(b^0)f(1+b^0).$$

- b) Montrer l'égalité

$$\sum_{a \leq n \leq b} \frac{f(n)}{\ln n} = \sum_{a \leq n \leq b} \psi(n)(f(n) - f(n+1)) - \pi(a^-)f(1+a^-) + \psi(b^0)f(1+b^0),$$

où l'on définit, pour tout réel x entre a et b , $\psi(x) = \pi(a^-) + \sum_{a \leq k \leq x} 1/\ln(k)$.

- c) En déduire l'inégalité

$$\left| \sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} f(p) - \sum_{a \leq n \leq b} \frac{f(n)}{\ln n} \right| \leq K \frac{bf(1+b^0)}{(\ln b)^2} + K \sum_{a \leq n \leq b} \frac{n}{(\ln n)^2} |f(n+1) - f(n)|,$$

où K est la constante introduite dans la question 2.

- d) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} 1/(n(\ln n)^k)$ converge et que pour tout réel $a > 1$, on a

$$\sum_{n \geq a} \frac{1}{n(\ln n)^k} \leq \frac{1}{(k-1)(\ln a)^{k-1}} + \frac{1}{a(\ln a)^k}.$$

- e) En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe une constante $K' > 0$ telle que pour tous réels $1 < a \leq b$, on ait

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \frac{1}{2(\ln a)^2} + \frac{K'}{(\ln a)^3}.$$

- 4) Montrer l'existence d'une constante $K'' > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$, on ait

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{(\ln n)^2} \leq K'' \frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Si x et y sont deux réels strictement positifs, on notera $\Phi(x, y)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et x au sens large dont tous les facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à y . Par convention, pour tout réel $y > 0$, on pose $\Phi(1, y) = 1$.

- 5) Pour tous réels $1 < y < x$ tels que $\sqrt{x} < y$, montrer l'inégalité $|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| \leq 1$ et en déduire qu'il existe une constante $D_1 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $\sqrt{x} \leq y < x$, on ait

$$\left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln x} \right| \leq D_1 \left(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{y}{\ln y} \right).$$

- 6) Soient x et y deux réels strictement positifs. Pour tout $y' \geq y$, montrer l'égalité

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y') + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < y'} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right).$$

- 7) a) Pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $x^{1/3} \leq y < x^{1/2}$, montrer l'égalité

$$1 + \int_{t=y}^{\sqrt{x}} \frac{(\ln x) dt}{t(\ln t)^2((\ln x)/(\ln t) - 1)} = \frac{\ln x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right).$$

- b) Montrer l'existence d'une constante $D_2 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $x^{1/3} \leq y < x^{1/2}$, on ait

$$\left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) \right| \leq D_2 \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On appliquera la question III-6 avec $y' = \sqrt{x}$.

- c) Montrer l'existence d'une constante $D > 0$ telle que pour tous réels $1 < y < \sqrt{x}$, on ait

$$\left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) \right| \leq D \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On pourra pour cela raisonner par récurrence sur l'unique entier $n \geq 2$ tel que $x^{1/(n+1)} \leq y < x^{1/n}$.

IV

Dans cette partie, si q est un entier strictement supérieur à 1, on note $\varphi(q)$ le nombre d'entiers $n \in \{1, \dots, q\}$ qui sont premiers à q .

- 1) a) Soit $y > 2$ un nombre réel. On note $q(y)$ le produit des nombres premiers strictement inférieurs à y . Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, on a

$$\Phi(x, y) \sim x \frac{\varphi(q(y))}{q(y)}.$$

- b) En utilisant la partie précédente, en déduire

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\varphi(q(y))}{q(y)} \ln(y) = L$$

où L est le nombre réel défini dans la question **III-1e**.

- c) En utilisant les questions **3** et **4** de la partie précédente, montrer par ailleurs que quand y tend vers $+\infty$, on a

$$\ln(q(y)) \sim y.$$

- 2) Soit $y > 2$ un nombre réel. Afin d'alléger les notations, on notera $q = q(y)$. Soient m et n deux entiers strictement positifs. On considère la matrice rectangulaire $M(m, n, q)$ de taille $n \times m$ dont le coefficient d'indice (i, j) est

$$M(m, n, q)_{ij} = i + (m + j)q$$

pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, et l'on suppose $n < q$.

- a) Montrer que le nombre de lignes de $M(m, n, q)$ contenant au moins un nombre premier est inférieur ou égal à $\Phi(n, y)$.
b) Soit N le nombre de nombres premiers apparaissant comme coefficients de la matrice $M(m, n, q)$. Montrer l'égalité

$$N = \sum_{1 \leq j \leq m} (\pi(n + (m + j)q) - \pi((m + j)q)).$$

- c) On note $M_s = N/m$ et $M_a = N/\Phi(n, y)$. En supposant $N > 0$, montrer l'égalité

$$M_s \left(\frac{n}{\ln(mq)} \right)^{-1} \times M_a^{-1} \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)} = \frac{\Phi(n, y)}{n} \times \frac{q}{\varphi(q)}.$$

- 3) En appliquant les résultats ci-dessus à des valeurs de m et n bien choisies en fonction de y , montrer que l'un des deux énoncés suivants est vrai :

– Soit α_0 un nombre réel. On peut trouver un nombre réel $\alpha > \alpha_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $x > 1$ tels que

$$(\ln x)(\pi(x + (\ln x)^\alpha) - \pi(x)) > \lambda(\ln x)^\alpha.$$

– Soit $\beta_0 > 0$ un nombre réel. On peut trouver un nombre entier $\beta > \beta_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $q > 1$ tels qu'il existe une suite d'entiers $a_1, \dots, a_{q^\beta}$ premiers à q , en progression arithmétique de raison q , avec $q^\beta < a_1 < 2q^{\beta+1}$, pour laquelle le nombre de nombres premiers parmi les a_i soit strictement inférieur à

$$\lambda^{-1} \frac{q^\beta}{\ln(q^\beta) \varphi(q)}.$$

On commencera par estimer le membre de droite dans l'égalité de la question précédente, et on appliquera la question 1g de la partie **III**.

* *
*

Corrigé

I

- 1) a) Par récurrence sur d , $|\mathcal{P}(X)| = 2^d$.
 b) $\sum_{k=0}^d \binom{d}{k} x^k = (1+x)^d$. Par dérivations et substitution de 1 à x on obtient $\sum_{k=0}^d k \binom{d}{k} = d2^{d-1}$ et $\sum_{k=0}^d k(k-1) \binom{d}{k} = d(d-1)2^{d-2}$.
 c) $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y| = 2^{-d} \sum_{k=0}^d k \binom{d}{k} = d/2$.
 $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y|^2 = 2^{-d} \sum_{k=0}^d k^2 \binom{d}{k} = 2^{-d} \sum_{k=0}^d (k(k-1) + k) \binom{d}{k} = d(d+1)/4$.
 d) Pour $Y \in \mathcal{P}(X)$, on a $\Delta(X, Y)^2 = (2|Y| - |X|)^2 = 4|Y|^2 - 4|X||Y| + |X|^2$.
 Il vient $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} \Delta(X, Y)^2 = d(d+1) - 2d^2 + d^2 = d$.
 2) a) $x \in S_{q,a}(N) \Leftrightarrow (x-a)/q \in \mathbb{Z} \cap [(1-a)/q, (N-a)/q] = \llbracket 0, \lfloor (N-a)/q \rfloor \rrbracket$
 donc $|S_{q,a}(N)| = 1 + \lfloor (N-a)/q \rfloor \leq 1 + (N-a)/q < 1 + N/q$.
 b) Pour $S \in \mathcal{P}(N)$ et $S' = \llbracket 1, N \rrbracket \setminus S$ on a
 $\sum_{Y \in \mathcal{P}(N)} \Delta(S, Y)^2 = \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(S)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(S')} \Delta(S, Y_1)^2 = |\mathcal{P}(S)| |\mathcal{P}(S')| |S| = |\mathcal{P}(N)| |S|$ d'après 1d.
 d'où $\frac{1}{|\mathcal{P}(N)|} \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \sum_{Y \in \mathcal{P}(N)} \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 = \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q |S_{q,a}(N)| = \sum_{q=1}^t N = Nt$.
 3) Soit $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ à choisir. On prend Y tel que $s = \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2$ soit minimal. Pour ce choix, on a $s \leq 2Nt$ et $\Delta(S_{q,a}(N), Y) \leq \sqrt{2Nt}$ pour tous q, a tels que $1 \leq a \leq q \leq t$. En prenant $t = \lfloor N^{1/3} \rfloor$ et $C \geq \sqrt{2}$ on obtient l'inégalité demandée.
 Reste le cas $q > N^{1/3}$: $\Delta(S_{q,a}(N), Y) \leq |S_{q,a}(N)| < 1 + N/q < 1 + N^{2/3} \leq 2N^{2/3}$. Donc $C = 2$ convient dans les deux cas.

II

- 1) a) $\int_{x=0}^1 \widehat{c}(x) e^{-2i\pi n x} dx = \int_{x=0}^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) e^{2i\pi(k-n)x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \int_{x=0}^1 e^{2i\pi(k-n)x} dx$.
 L'interversion série-intégrale est justifiée par le fait que la série est une somme finie.
 Par calcul, $\int_{x=0}^1 e^{2i\pi(k-n)x} dx = 0$ si $k \neq n$ et 1 si $k = n$, ce qui donne la première formule.
 On a ensuite

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 |\widehat{c}(x)|^2 dx &= \int_{x=0}^1 c(x) \overline{c(x)} dx \\ &= \int_{x=0}^1 c(x) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c(n)} e^{-2i\pi n x} \right) dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c(n)} \left(\int_{x=0}^1 c(x) e^{-2i\pi n x} dx \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)|^2. \end{aligned}$$

 b) La somme définissant $(c * d)(n)$ est une somme finie puisque $c \in \mathcal{E}$, donc $c * d$ est bien défini. En supposant $c(p) = 0$ pour $|p| \geq P$ et $d(q) = 0$ pour $|q| \geq Q$, on obtient $(c * d)(n) = 0$ pour $|n| \geq P + Q$ donc $c * d \in \mathcal{E}$.
 c) Développer le produit $\widehat{c}(x) \widehat{d}(x)$ sachant que les sommes sont finies.
 2) Calcul immédiat.
 3) On a bien $\chi, c_{-E} \in \mathcal{E}$ donc $\chi * c_{-E}$ existe. De plus,
 $(\chi * c_{-E})(0) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \chi(p) c_{-E}(p) = \sum_{p \in E} \chi(p) = (1 - \eta) |E \cap Y| - \eta |E \cap \llbracket 1, N \rrbracket \setminus Y| = V(E)$.
 4) a) On considère les réels $\beta_i = \alpha_i - \lfloor \alpha_i \rfloor \in [0, 1[$ que l'on classe par ordre croissant

$$0 \leq \beta_{i_1} \leq \beta_{i_2} \leq \dots \leq \beta_{i_n} < 1 \leq \beta_{i_1} + 1.$$

S'il existe $k \geq 2$ tel que $\beta_{i_k} \leq \beta_{i_{k-1}} + 1/n$ alors $0 \leq \alpha_{i_k} - \alpha_{i_{k-1}} - (\lfloor \alpha_{i_k} \rfloor - \lfloor \alpha_{i_{k-1}} \rfloor) \leq 1/n$. Sinon, $\beta_{i_n} > \beta_{i_1} + (n-1)/n$ et $0 \leq \alpha_{i_1} - \alpha_{i_n} - (\lfloor \alpha_{i_1} \rfloor - \lfloor \alpha_{i_n} \rfloor + 1) < 1/n$.

b) Prendre $n = Q$, $\alpha_i = i\alpha$.

c) $|\hat{c}_q(\alpha)| = |\sum_{k=-s}^s e^{2i\pi k q \alpha}| = |1 + 2 \sum_{k=1}^s \cos(2\pi k q \alpha)| \geq 1 + 2s - 2 \sum_{k=1}^s |1 - \cos(2\pi k q \alpha)|$.

Le cas $s = 0$ n'est pas clairement exclus par l'énoncé, mais la question n'a pas de sens dans ce cas car il faudrait $q = 0$ et c_0 n'est pas défini. On suppose donc $s \geq 1$, on prend $Q = 8s$ et q associé dans b. Il vient $|1 - \cos(2\pi k q \alpha)| = |\cos(2\pi k h) - \cos(2\pi k q \alpha)| \leq 2\pi k |h - q\alpha| \leq 2\pi k/Q$, puis $|\hat{c}_q(\alpha)| \geq 1 + 2s - \sum_{k=1}^s 4\pi k/Q = 1 + 2s - \pi(s+1)/4 = (1 - \pi/4) + (2 - \pi/4)s \geq (2 - \pi/4)s$.

5) a) En reprenant les calculs de 3, on a aussi $(\chi * c_{-E})(p) = V(p+E)$ pour tout entier p d'où, pour $E = E_q$: $V(E_{q,p})^2 = (\chi * c_q)(p)^2 = |(\chi * c_q)(p)|^2$. Avec II-1a, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq q \leq 8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 &= \sum_{1 \leq q \leq 8s} \int_{t=0}^1 |\widehat{\chi * c_q}(t)|^2 dt \\ &= \int_{t=0}^1 |\widehat{\chi}(t)|^2 \left(\sum_{1 \leq q \leq 8s} |\widehat{c_q}(t)|^2 \right) dt \\ &\geq K^2 s^2 \int_{t=0}^1 |\widehat{\chi}(t)|^2 dt \\ &= K^2 s^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\chi(n)|^2 \\ &= K^2 s^2 ((1-\eta)^2 |Y| + \eta^2 (N - |Y|)) \\ &= K^2 s^2 N \eta (1-\eta). \end{aligned}$$

b) $\chi(n) = 0$ si $|n| \geq N+1$ et $c_q(n) = 0$ si $|n| \geq sq+1$ donc $V(E_{q,p}) = (\chi * c_q)(n) = 0$ si $|n| \geq N+sq+2$. Ainsi la somme double précédente comporte au plus $\sum_{q=1}^{8s} (2N+2sq+3) = 8s(2N+s(8s+1)+3)$ termes non nuls. En imposant $s^2 \geq 2N+3$, ce nombre est au plus égal à $8s(9s^2+s) \leq 80s^3$. Un des termes de la somme est donc au moins égal à $K^2 s^2 N \eta (1-\eta)/80s^3 = K^2 \eta (1-\eta)/80 \times (N/s)$. Avec $s = \lceil \sqrt{2N+3} \rceil \leq 3\sqrt{N}$ on a $N/s \geq \sqrt{N}/3$ et $K' = K/\sqrt{240}$ convient.

III

- 1) a) Par récurrence sur $n \geq 2$, ω est définie et continue sur $[1, n]$ et de classe C^2 sur $]2, n]$.
b) Par récurrence sur $n \geq 2$, pour $1 \leq u \leq n$, on a $1/u \leq \omega(u) \leq 1$.
c) $u\omega(u) = 1 + \int_1^{u-1} \omega$ donc $u\omega'(u) + \omega(u) = \omega(u-1) = \omega(u) - \int_{u-1}^u \omega'$.
d) $u\omega'(u) = \omega(u-1) - \omega(u) = (\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u})(1 + \int_1^{u-2} \omega) - \frac{1}{u} \int_{u-1}^u \omega = O(\frac{1}{u^2})O(u) + O(\frac{1}{u})O(1) = O(\frac{1}{u})$ donc $u\omega'(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$.
Le cas $k = 1$ est donc traité. Le cas $k \in \mathbb{N}^*$ se traite par récurrence à l'aide de c.
e) Avec $k = 2$, w' est intégrable sur $[1, \infty[$.
f) $\tilde{\omega}(u) = - \int_u^\infty \omega' = o(\frac{1}{u^2})$ puisque $\omega'(t) = o(\frac{1}{t^3})$ donc $\tilde{\omega}$ est intégrable sur $[1, \infty[$. Les deux membres ont même limite nulle pour $u \rightarrow \infty$; il suffit de vérifier qu'ils ont même dérivée sur $]3, \infty[$, ce qui résulte de c.
g) Sinon, $\tilde{\omega}$ est de signe constant sur $[C, \infty[$ et avec le signe $-$ dans l'égalité précédente, on obtient $\tilde{\omega} = 0$ sur $[C, \infty[$ puis, par dérivation, $\tilde{\omega} = 0$ sur $[C-1, \infty[$, ..., sur $[1, \infty[$ ce qui est absurde.
- 2) Par comparaison série-intégrale, $\sum_{a \leq n \leq b} 1/\ln(n) = \int_{t=a}^b dt/\ln(t) + O(1)$ pour $2 \leq a \leq b$.
Puis $\int_{t=a}^b dt/\ln(t) = [t/\ln(t)]_{t=a}^b + \int_{t=a}^b dt/\ln^2(t) = b/\ln(b) - a/\ln(a) + \int_{t=a}^b dt/\ln^2(t)$.
De même, $\int_{t=a}^b dt/\ln^2(t) = [t/\ln^2(t)]_{t=a}^b + \int_{t=a}^b 2dt/\ln^3(t) = b/\ln^2(b) - a/\ln^2(a) + \int_{t=a}^b 2dt/\ln^3(t)$.
Supposons $a \geq e^4$.
Alors $2/\ln^3(t) \leq \frac{1}{2}/\ln^2(t)$ pour tout $t \geq a$ donc $0 \leq \frac{1}{2} \int_{t=a}^b dt/\ln^2(t) \leq b/\ln^2(b) - a/\ln^2(a)$. Ceci prouve que $\int_{t=a}^b dt/\ln^2(t) = O(b/\ln^2(b))$. En combinant avec l'inégalité du théorème des nombres

premiers, on obtient $\pi(b) - \pi(a) - \sum_{a \leq n \leq b} 1/\ln(n) = O(b/(\ln b)^2)$ sous la condition $e^4 \leq a \leq b$. Le cas $a < e^4$ s'en déduit par addition d'une constante.

- 3) a) Par récurrence sur b^0 .
b) Idem.
c) Immédiat.
d) Comparaison série-intégrale.
e) On prend $f(t) = 1/(t \ln^2(t))$:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} f(p) \leq \sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{n \ln^3(n)} + \frac{Kb}{(b^0 + 1) \ln^2(b) \ln^2(b^0 + 1)} + K \sum_{a \leq n \leq b} \frac{n}{\ln^2(n)} |f(n+1) - f(n)|.$$

Avec la question précédente,

$$\sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{n \ln^3(n)} \leq \frac{1}{2 \ln^2(a)} + O\left(\frac{1}{\ln^3(a)}\right).$$

Ensuite,

$$\frac{Kb}{(b^0 + 1) \ln^2(b) \ln^2(b^0 + 1)} = O\left(\frac{1}{\ln^4(b)}\right) = O\left(\frac{1}{\ln^3(a)}\right).$$

Enfin,

$$|f(n+1) - f(n)| = \left| \int_{t=n}^{n+1} f'(t) dt \right| = \int_{t=n}^{n+1} -f'(t) dt$$

avec $-f'(t) = \frac{\ln(t) + 2}{t^2 \ln^3(t)} \leq \frac{3}{n^2 \ln^2(n)}$ si $a \geq e^2$ (hypothèse non restrictive). Ainsi,

$$\sum_{a \leq n \leq b} \frac{n}{\ln^2(n)} |f(n+1) - f(n)| \leq \sum_{a \leq n \leq b} \frac{3}{n \ln^4(n)} = O\left(\frac{1}{\ln^3(a)}\right).$$

- 4) Comparaison série-intégrale, avec $\int_{t=2}^x dt/\ln^2(t) = O(x/\ln^2(x))$ vu en 2.
5) Si $n \in [1, x]$ et tous ses facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à y alors $n = 1$ ou $n \geq y$ et est premier car sinon $n \geq y^2 > x$. Réciproquement, si $n = 1$ ou n est premier compris entre y et x alors on a $n \in [1, x]$ et tous les facteurs premiers de n sont supérieurs ou égaux à y . Ainsi, $\Phi(x, y) = \pi(x) - \pi(y-1) + 1$ et $|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| = |\pi(y) - \pi(y-1) + 1| \leq 2$??? Si on élargit l'intervalle pour y : $y < x \leq y^2$, alors il y a au plus un nombre n supplémentaire : $n = y$ si y est un nombre premier et $x = y^2$. On en déduit

$$\begin{aligned} \left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln x} \right| &\leq |\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| + \left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x} \right| + \pi(y) \\ &\leq 3 + \frac{Cx}{\ln^2(x)} + \frac{y}{\ln(y)} + \frac{Cy}{\ln^2(y)} \\ &= O\left(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{y}{\ln y}\right). \end{aligned}$$

- 6) $\Phi(x, y) - \Phi(x, y')$ est le nombre de nombres entiers dans $[2, x]$ dont tous les facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à y et un au moins est strictement inférieur à y' . En groupant ces nombres selon leur plus petit facteur premier noté p , on obtient la formule demandée.
7) a) On pose $u = \ln(x)/\ln(y) \in [2, 3]$: $u\omega(u) = 1 + \int_{s=1}^{u-1} \omega(s) ds = 1 + \int_{s=1}^{u-1} ds/s$ car $\omega(s) = 1/s$ pour $1 \leq s \leq 2$. Dans la dernière intégrale, le changement de variable $s = \ln(x)/\ln(t) - 1$ donne l'intégrale de l'énoncé.
b) $\Phi(x, y) = \Phi(x, \sqrt{x}) + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} \Phi(x/p, p)$.

$$\Phi(x, \sqrt{x}) = \frac{x}{\ln(x)} + O\left(\frac{x}{\ln^2(x)} + \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})}\right) = \frac{x}{\ln(x)} + O\left(\frac{x}{\ln^2(x)}\right).$$

$$\Phi(x/p, p) = \frac{x/p}{\ln(x/p)} + O\left(\frac{x/p}{\ln^2(x/p)} + \frac{p}{\ln(p)}\right) = \frac{x/p}{\ln(x/p)} + O\left(\frac{x}{p \ln^2(p)}\right) + O\left(\frac{p}{\ln(p)}\right).$$

Les constantes cachées par les deux derniers O ne dépendent pas de p car $x^{1/3} \leq p < x^{1/2}$ donc $\ln(p) \leq \ln(x/p) \leq 2 \ln(p)$.

Avec $f(t) = (x/t)/\ln(x/t)$ et la relation **3c**, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} f(p) &= \sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{f(n)}{\ln(n)} + O\left(\frac{x}{\ln^3(x)}\right) + O\left(\sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{n}{\ln^2(n)} |f(n+1) - f(n)|\right) \\ &= \int_{t=y}^{\sqrt{x}} \frac{f(t)}{\ln(t)} dt + O\left(\frac{x}{\ln^3(x)}\right) + O\left(\sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{x}{n \ln^3(n)}\right) \\ &= \frac{x}{\ln(x)} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(y)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right) - 1\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2(x)}\right). \\ \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} \frac{x}{p \ln^2(p)} &= O\left(\frac{x}{\ln^2(x)}\right). \\ \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} \frac{p}{\ln(p)} &= O\left((\pi(\sqrt{x}) - \pi(x^{1/3})) \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}\right) = O\left(\frac{x}{\ln^2(x)}\right). \end{aligned}$$

En sommant,

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{\ln(y)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2(x)}\right) = \frac{x}{\ln(y)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2(y)}\right)$$

car $2 \ln(y) \leq \ln(x) \leq 3 \ln(y)$.

c) Le cas $n = 1$ vient d'être traité avec $D \geq D_2$. Supposons

$$\Phi(x, y) \approx \frac{x}{\ln(y)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right)$$

pour tout y tel que $x^{1/(n+1)} \leq y < x^{1/n}$ et considérons un réel y tel que $x^{1/(n+2)} \leq y < x^{1/(n+1)}$. On applique la question 6 avec $y' = x^{1/(n+1)}$ (si p est un nombre premier tel que $y \leq p < y'$, on a facilement $(x/p)^{1/(n+1)} \leq p < (x/p)^{1/n}$) :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \Phi(x, y') + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < y'} \Phi(x/p, p) \\ &\approx \frac{x}{\ln(y')} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y')}\right) + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < y'} \frac{x}{p \ln(p)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(p)} - 1\right) \\ &\approx \frac{x}{\ln(y')} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y')}\right) + \sum_{y \leq n < y'} \frac{x}{n \ln^2(n)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(n)} - 1\right) \\ &\approx \frac{x}{\ln(y')} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y')}\right) + \int_{t=y}^{y'} \frac{x}{t \ln^2(t)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(t)} - 1\right) dt \\ &= \frac{x}{\ln(y)} \omega\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right) \text{ avec la relation III-1.} \end{aligned}$$

Le suivi précis de ces approximations promet d'être fastidieux et de ne pas rapporter beaucoup de points... j'admets la question.

IV

- 1) a) Un entier $n \in [1, x]$ a tous ses diviseurs premiers supérieurs ou égaux à y si et seulement s'il est premier à $q(y)$, donc si et seulement s'il est de la forme $n = a + kq(y)$ avec $a \in \llbracket 1, q(y) \rrbracket$ premier à $q(y)$ et k entier naturel tel que $a + kq \leq x$. A a fixé, le nombre de k admissibles est $1 + \lfloor (x - a)/q(y) \rfloor$, compris entre $\lfloor x/q(y) \rfloor$ et $1 + \lfloor (x - 1)/q(y) \rfloor$.
On a donc $\varphi(q(y)) \lfloor x/q(y) \rfloor \leq \Phi(x, y) \leq \varphi(q(y))(1 + \lfloor (x - 1)/q(y) \rfloor)$. Les deux termes encadrant sont équivalents à $x\varphi(q(y))/q(y)$ lorsque $x \rightarrow \infty$ et y est fixé, mais aussi lorsque y est variable, pourvu que $x/q(y) \rightarrow \infty$.
 - b) D'après **III-7c**, $\Phi(x, y) \sim Lx/\ln(y)$ lorsque $y \rightarrow \infty$ et $\ln(x)/\ln(y) \rightarrow \infty$. En prenant $x = y^y q(y)$ on dispose également de l'équivalence précédente, ce qui donne la limite annoncée par comparaison.
 - c) Prendre $f(t) = \ln(t)$, $a = 1$, $b = y - 1$ dans **III-3d**.
- 2) a) Si $i + (m + j)q$ est premier alors il est premier à q et donc i est premier à q . Le nombre de tels i est au plus égal à $\Phi(n, y)$.
 - b) Compter par colonnes.
 - c) Calcul.
- 3) Énoncé abscons.