

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2025

Épreuve de mathématiques I, MP & MPI, quatre heures
(corrigé)

Remarque culturelle. Cette démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$ peut paraître inutilement sophistiquée, puisque l'on sait que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que l'irrationalité de π^2 se démontre par des moyens plus élémentaires (mais non triviaux tout de même). Il est cependant intéressant de savoir qu'on peut obtenir l'irrationalité de $\zeta(3)$ (qui ne s'exprime pas en fonction de π^3 ; du moins, on est incapable de le démontrer à l'heure actuelle) en suivant une démarche similaire. C'est ainsi que ce fut démontré par Apéry en 1978. Voir l'épreuve de Mathématiques des Écoles Normales Supérieures de 1996 (filiale P') pour une adaptation de cette démonstration au programme des classes préparatoires.

Notation. Dans tout le corrigé, je note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\mathbb{P}_x$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à x , pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Partie A - Un encadrement de la fonction π

I - Calculs préliminaires

Q1. Soit $p \in \llbracket n+2, 2n+1 \rrbracket$ un nombre premier. On a :

$$n! \binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = \prod_{k=n+2}^{2n+1} k = p \prod_{\substack{k=n+2 \\ k \neq p}}^{2n+1} k.$$

On en déduit que p divise $n! \binom{2n+1}{n}$, et comme p ne divise pas $n!$ (en effet, si c'était le cas, par le lemme d'Euclide p diviserait un entier inférieur ou égal à n , ce qui est impossible puisque $p > n$), par le lemme d'Euclide p divise $\binom{2n+1}{n}$. Comme des nombres premiers distincts sont premiers entre eux, on en déduit que $\prod_{p \in \mathbb{P}_{2n+1} \setminus \mathbb{P}_{n+1}} p$ divise $\binom{2n+1}{n}$, d'où la première inégalité :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_{2n+1} \setminus \mathbb{P}_{n+1}} p \leq \binom{2n+1}{n}.$$

Pour la seconde, on utilise la formule du binôme de Newton :

$$2 \cdot 2^{2n} = (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \geq \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = 2 \binom{2n+1}{n},$$

d'où : $\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$. D'où le résultat.

Q2. On suit l'indication de l'énoncé et raisonne par récurrence forte sur n . Initialisons. On a trivialement :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_1} p = 1 < 4^1, \quad \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p = 2 < 4^2, \quad \prod_{p \in \mathbb{P}_3} p = 6 < 4^3,$$

d'où le résultat aux rangs $n \in \{1, 2, 3\}$.

Soit alors $n \geq 4$. On suppose que pour tout entier k dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a : $\prod_{p \in \mathbb{P}_k} p < 4^k$. On veut démontrer : $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p < 4^n$. Si n est pair et supérieur strictement à 2 (ce qui est le cas ici puisqu'on a supposé $n \geq 4$), alors n n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et $n \neq 2$. On a donc : $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{n-1}$, puis par hypothèse de récurrence :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p = \prod_{p \in \mathbb{P}_{n-1}} p < 4^{n-1} \leq 4^n,$$

d'où le résultat au rang n si n est pair.

Si n est impair, on peut l'écrire : $n = 2m + 1$, avec m un entier naturel. On a : $m + 1 \leq n - 1$ (en effet cette inégalité équivaut à : $3 \leq n$, qui est vrai), donc par hypothèse de récurrence :

$\prod_{p \in \mathbb{P}_{m+1}} p < 4^{m+1}$, donc :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p = \prod_{p \in \mathbb{P}_{m+1}} p \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{m+1}} p < 4^{m+1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_{2m+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1}} p,$$

et par la question précédente on a : $\prod_{p \in \mathbb{P}_{2m+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1}} p \leq 4^m$. D'où le résultat au rang n :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p < 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1} = 4^n.$$

Par récurrence forte on a démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p < 4^n.$$

Remarque. Dans cette question et les suivantes de cette partie, je ne comprends pas pourquoi l'énoncé s'évertue à demander des inégalités strictes. C'est une fatigue inutile puisque des inégalités larges suffisent dans tout le problème.

Q3. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on se ramène à la question précédente *via* la partie entière de x :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_x} p = \prod_{p \in \mathbb{P}_{\lfloor x \rfloor}} p < 4^{\lfloor x \rfloor} \leq 4^x,$$

d'où le résultat.

Q4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par la formule du binôme de Newton :

$$4^n = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \binom{2n}{n} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

La dernière somme a un terme général strictement positif. Lorsque n est supérieur ou égal à 1, elle est indexée par un ensemble non vide : la somme est donc strictement positive. D'où l'inégalité stricte suivante :

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

Pour l'inégalité : $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$, on remarque que par la relation $n \binom{2n}{n} = 2n \binom{2n-1}{n-1}$, elle revient à démontrer :

$$2^{2n-1} \leq 2n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Nous allons encore la déduire de la formule du binôme de Newton. Justifions d'abord que la valeur maximale de $\binom{2n-1}{k}$, quand k parcourt $\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, est en $k = n-1$. Pour cela nous allons étudier la monotonie de $\left(\binom{2n-1}{k} \right)_{0 \leq k \leq 2n-1}$. Soit $k \in \llbracket 0, 2n-2 \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \binom{2n-1}{k+1} - \binom{2n-1}{k} &= \frac{(2n-1)!}{(2n-k-2)!(k+1)!} - \frac{(2n-1)!}{(2n-1-k)!(k)!} \\ &= (2n-1)! \left(\frac{2n-1-k}{(2n-1-k)!(k+1)!} - \frac{k+1}{(2n-1-k)!(k+1)!} \right) \\ &= \frac{(2n-1)!(2n-2k-2)}{(2n-1-k)!(k+1)!}. \end{aligned}$$

Or : $2n - 2k - 2 \geq 0$ si et seulement si $k \leq n - 1$, et pour tout k ainsi choisi on a donc : $\binom{2n-1}{k+1} - \binom{2n-1}{k} \geq 0$: ainsi, la suite $k \mapsto \binom{2n-1}{k}$ est croissante sur $\llbracket 0, n \rrbracket$, et on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \binom{2n-1}{k} \leq \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}.$$

De plus, pour tout $k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket$, on a $2n-1-k \leq n-1$ et donc :

$$\binom{2n-1}{k} = \binom{2n-1}{2n-1-k} \leq \binom{2n-1}{n-1}.$$

Finalement, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ on a : $\binom{2n-1}{k} \leq \binom{2n-1}{n-1}$. On en déduit :

$$2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \leq 2n \binom{2n-1}{n-1} = n \binom{2n}{n},$$

donc : $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n}$, d'où le résultat.

Q5. On a : $n! = \prod_{k=1}^n k$, donc :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^n v_p(k) = \sum_{\substack{k=1 \\ p|k}}^n v_p(k) = \sum_{k \in \mathcal{M}_n(p)} v_p(k),$$

où $\mathcal{M}_n(p)$ est l'ensemble des entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui sont multiples de p (en effet, par définition d'une valuation p -adique, on a $v_p(k) = 0$ dès que $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{M}_n(p)$). On définit de la même manière $\mathcal{M}_n(p^\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a alors :

$$\mathcal{M}_n(p) = \bigsqcup_{\ell=1}^{+\infty} \left(\mathcal{M}_n(p^\ell) \setminus \mathcal{M}_n(p^{\ell+1}) \right),$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{M}_n(p^\ell) \setminus \mathcal{M}_n(p^{\ell+1})} v_p(k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{M}_n(p^\ell) \setminus \mathcal{M}_n(p^{\ell+1})} \ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \left(\text{card}(\mathcal{M}_n(p^\ell)) - \text{card}(\mathcal{M}_n(p^{\ell+1})) \right). \end{aligned}$$

Calculons ces cardinaux. Soit $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un multiple de p^ℓ est un entier de la forme mp^ℓ . On veut uniquement dénombrer ceux qui sont dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Or :

$$1 \leq mp^\ell \leq n \iff 1 \leq m \leq \frac{n}{p^\ell},$$

donc : $\mathcal{M}_n(p^\ell) = \left\{ mp^\ell \mid m \in \llbracket 1, \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor \rrbracket \right\}$, puis : $\text{card}(\mathcal{M}_n(p^\ell)) = \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor$ (ce calcul démontre en passant que $\text{card}(\mathcal{M}_n(p^\ell)) = 0$ pour tout ℓ suffisamment grand). Donc :

$$v_p(n!) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \left(\left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\ell+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{+\infty} (\ell-1) \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor,$$

d'où le résultat. Les manipulations sur les sommes sont toutes licites puisqu'elles sont à support fini.

Remarque. C'est la *formule de Legendre*.

Q6. Soient n, k et p des entiers naturels. On suppose que n n'est pas nul, que p est un nombre premier et enfin que p^k divise $\binom{2n}{n}$. Par définition de la valuation p -adique d'un entier, on a : $p^k \leq p^{v_p(\binom{2n}{n})}$. Pour démontrer l'inégalité de l'énoncé, il suffit donc de le faire pour $k = v_p(\binom{2n}{n})$.

Faisons. On a : $\forall \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\left\lfloor \frac{2n}{p^\ell} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor < \frac{2n}{p^\ell} - 2 \left(\frac{n}{p^\ell} - 1 \right) = 2$, donc le terme général de la somme donnant $v_p(\binom{2n}{n})$, dans la question précédente, est inférieur ou égal à 1. De plus, il est nul dès que $p^\ell > 2n$, c'est-à-dire dès que $\ell > \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}$. Donc :

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^\ell} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor \right) \leq \sum_{\ell=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor} 1 = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor,$$

puis : $p^{v_p(\binom{2n}{n})} \leq p^{\frac{\ln(2n)}{\ln(p)}} = 2n$. D'où le résultat.

II - Majoration de $\pi(x)$

Q7. C'est trivial, puisque $[\sqrt{n}, n]$ est inclus dans $[1, n]$ et qu'on multiplie des facteurs positifs.

Q8. On minore tous les facteurs du produit $\prod_{p \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{\sqrt{n}}} p$ par $\sqrt{n}$, et on utilise la question **Q2** pour majorer strictement $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p$. On obtient :

$$\sqrt{n}^{\text{card}(\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{\sqrt{n}})} < 4^n.$$

D'où le résultat, puisque le cardinal de $\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{\sqrt{n}}$ est $\pi(n) - \pi(\sqrt{n})$ par définition de la fonction π .

Q9. On a : $\mathbb{P}_{\sqrt{n}} \subseteq [1, \sqrt{n}]$, donc en comparant les cardinaux : $\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$.

Démontrons l'inégalité : $\sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)}$. Pour cela, on remarque qu'une étude des variations de l'application $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ (elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ et de dérivée $x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$) démontre qu'elle est décroissante sur $]1, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$. Son minimum est donc en e et vaut e . On en déduit en particulier :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \ln(\sqrt{x}) \leq \frac{\sqrt{x}}{e}.$$

Posons $x = n$. On a : $\ln(n) = 2 \ln(\sqrt{n}) \leq \frac{2}{e} \sqrt{n} < \sqrt{n}$ (même si la valeur approchée $e \approx 2,718$ est de la culture scientifique, on peut vérifier que $\frac{2}{e}$ est strictement inférieur à 1 avec la calculatrice, qui était autorisée pour cette épreuve). Cette inégalité est équivalente à celle demandée, d'où le résultat :

$$\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)}.$$

Obtenons la seconde majoration de l'énoncé. Il y a là une erreur dans le sujet d'origine : la fonction π n'est évidemment pas majorée par une suite convergeant vers 0 (c'est une fonction croissante et tendant vers l'infini). La majoration attendue est un cas particulier de celle de la question suivante : on veut démontrer que $\pi(n)$ est inférieur ou égal à $4 \frac{n}{\ln(n)}$.

Pour cela, en considérant le logarithme (qui est strictement croissant) dans l'inégalité de la question précédente, on a :

$$(\pi(n) - \pi(\sqrt{n})) \ln(n) < 2 \cdot n \ln(4).$$

On isole $\pi(n)$ et majore $\pi(\sqrt{n})$ grâce à la majoration ci-dessus. On obtient :

$$\pi(n) < \frac{2n \ln(4)}{\ln(n)} + \frac{n}{\ln(n)} = (2 \ln(4) + 1) \frac{n}{\ln(n)}.$$

On a : $2 \ln(4) + 1 \leq 4$ (la calculatrice est autorisée et permet de trouver la valeur approchée $2 \ln(4) + 1 \approx 3,77$), d'où le résultat :

$$\pi(n) \leq 4 \frac{n}{\ln(n)}.$$

Q10. Nous avons déjà justifié la croissance sur $[e, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ dans la question précédente. Nous allons l'utiliser en comparant ses valeurs en x et $\lfloor x \rfloor$. Comme x est supérieur ou égal à 3, on a aussi : $\lfloor x \rfloor \geq 3$, et donc x et sa partie entière sont bien dans l'intervalle de croissance de la fonction ci-avant. On en déduit, par l'inégalité de la question précédente :

$$\pi(x) = \pi(\lfloor x \rfloor) \leq 4 \frac{\lfloor x \rfloor}{\ln(\lfloor x \rfloor)} \leq 4 \frac{x}{\ln(x)},$$

d'où le résultat.

III - Minoration de $\pi(x)$

Q11. Par le théorème fondamental de l'arithmétique et la question **Q6** (dont on remarque en particulier qu'elle démontre que les diviseurs premiers de $\binom{2n}{n}$ sont tous inférieurs ou égaux à $2n$: prendre $k = 1$), on a :

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(\binom{2n}{n})} = \prod_{p \in \mathbb{P}_{2n}} p^{v_p(\binom{2n}{n})} \stackrel{(\text{Q6})}{\leq} \prod_{p \in \mathbb{P}_{2n}} (2n) = (2n)^{\pi(2n)},$$

d'où le résultat.

Q12. On a :

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} = \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} = \frac{\ln(2^n)}{\ln(2n)} \geq 1,$$

où la dernière inégalité découle de l'inégalité : $2^n \geq 2n$, que l'on démontre aisément par récurrence sur n (elle est vraie pour $n = 1$ et, si $2^n \geq 2n$, alors : $2^{n+1} \geq 4n$; on conclut alors en notant que $4n \geq 2(n+1)$ équivaut à $n \geq 1$, qui est vrai). D'où le résultat :

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)}.$$

Déduisons-en la minoration de $\pi(2n)$ demandée. On utilise l'inégalité de la question précédente, qui implique :

$$\pi(2n) \geq \frac{1}{\ln(2n)} \ln \left(\binom{2n}{n} \right) \stackrel{(\text{Q4})}{\geq} \frac{n \ln(4) - \ln(2n)}{\ln(2n)} = \frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)},$$

d'où le résultat.

Q13. On a : $x \geq 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, et la fonction π est évidemment croissante, donc par la question précédente :

$$\pi(x) \geq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \frac{\ln(2)}{\ln \left(2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right)} \geq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \frac{\ln(2)}{\ln(x)}.$$

Démontrons alors l'inégalité : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \geq \frac{x}{6}$. On a : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \geq \frac{x}{2} - 1$, et :

$$\frac{x}{2} - 1 \geq \frac{x}{6} \iff 2x \geq 6 \iff x \geq 3.$$

Cette inégalité est vérifiée par hypothèse. Par équivalence : $\frac{x}{2} - 1 \geq \frac{x}{6}$, d'où le résultat :

$$\pi(x) \geq \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)}.$$

Partie B - Une majoration d'un PPCM

I - Une première majoration

Q14. Une intersection d'idéaux est un idéal. Comme tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont engendrés par un seul élément (on dit qu'ils sont *principaux*), l'existence de $d(a_1, \dots, a_r)$ en résulte. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si a et b sont deux entiers *naturels* tels que : $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$, alors $a \in b\mathbb{Z}$ donc b divise a , et par le même argument a divise b . Ils sont associés et positifs, donc : $a = b$.

Q15. Nous allons démontrer un peu mieux que ce qui est demandé : $d(a_1, \dots, a_r)$ est le plus petit entier naturel non nul divisible par $a_1, \dots, a_r$, *au sens de la relation de divisibilité*.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si n est divisible par $a_1, \dots, a_r$, alors n appartient à $a_i\mathbb{Z}$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, donc il appartient à leur intersection $\bigcap_{i=1}^r a_i\mathbb{Z} = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}$: on en déduit que $d(a_1, \dots, a_r)$ divise n . D'où le résultat, et en particulier le fait qu'un entier multiple de tous les a_i doit être supérieur ou égal à $d(a_1, \dots, a_r)$ (puisque c'en est un multiple non nul).

Q16. On a immédiatement :

$$d_2 = 2, \quad d_3 = 6, \quad d_4 = 12.$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par définition, $n!$ est un entier naturel non nul divisible par $1, \dots, n$ (il suffit d'écrire : $n! = k \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n i$), donc par la question précédente : $d_n \leq n!$, d'où le résultat.

II - Une majoration plus fine

Q17. Notons que p^{k_p} étant inférieur ou égal à n , cet entier divise d_n par définition de d_n . Comme les p^{k_p} , pour p parcourant $\mathbb{P}_n$, sont premiers entre eux deux à deux (ils ne peuvent logiquement pas avoir de diviseur premier en commun), leur produit $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{k_p}$ divise d_n également.

Réciproquement, vérifions que d_n divise $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{k_p}$. D'après la propriété du ppcm démontrée à la question **Q15**, il suffit de démontrer que $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{k_p}$ est un multiple commun à tous les entiers $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Considérons donc $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, qu'on décompose en facteurs premiers : $\ell = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{v_p(\ell)}$ (il est certain que les nombres premiers de la décomposition de ℓ sont inférieurs à n , puisque ℓ l'est). Pour tout $p \in \mathbb{P}_n$, on a : $v_p(\ell) \leq k_p$, par définition de k_p (en effet : $p^{v_p(\ell)} \leq \ell \leq n$), donc $\ell = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{v_p(\ell)}$ divise $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{k_p}$. Ceci vaut pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc par propriété du ppcm d_n divise $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{k_p}$.

Deux entiers naturels qui se divisent mutuellement sont égaux, donc : $d_n = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{k_p}$.

Q18. Soit $p \in \mathbb{P}$. On a : $p^{k_p} \leq n$, donc : $k_p \ln(p) \leq \ln(n)$, puis : $k_p \leq \frac{\ln(n)}{\ln(p)}$. Or la partie entière de $\frac{\ln(n)}{\ln(p)}$ est par définition le plus grand entier à être majoré par $\frac{\ln(n)}{\ln(p)}$, donc : $k_p \leq \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$. Réciproquement, l'entier $p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$ est bien entre 1 et n , puisque :

$$p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \leq p^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}} = e^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \ln(p)} = n,$$

donc par définition de k_p on a : $\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor \leq k_p$, d'où l'égalité :

$$k_p = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor.$$

Par la question précédente, on a donc :

$$d_n = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \leq \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}} = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} n = n^{\pi(n)},$$

d'où le résultat : $d_n \leq n^{\pi(n)}$.

Q19. Soit n au voisinage de l'infini. On a par la question précédente :

$$0 \leq \frac{d_n}{3^n} \leq \frac{n^{\pi(n)}}{3^n} = e^{\pi(n)\ln(n) - n\ln(3)},$$

et par le théorème des nombres premiers (admis dans l'énoncé) on a :

$$\pi(n)\ln(n) - n\ln(3) = n + o(n) - n\ln(3) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1 - \ln(3))n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty,$$

donc par composition de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\pi(n)}}{3^n} = 0$. Par le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{3^n} = 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait : $d_n \leq 3^n$. D'où le résultat.

Remarque culturelle. Grâce au théorème des nombres premiers, on peut démontrer que l'on a même : $d_n = e^{n+o(n)}$. Cela passe par la fonction sommatoire de von Mangoldt, traditionnellement notée ψ .

Partie C - Un critère d'irrationalité

Q20. Raisonnons par l'absurde et supposons que α est un nombre rationnel : il existe donc deux entiers naturels p et q tels que : $\alpha = \frac{p}{q}$, avec q non nul. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{\varepsilon_n}{q_n}$. Comme α est distinct de $\frac{p_n}{q_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|pq_n - qp_n|}{q_n q}.$$

Comme $|pq_n - qp_n|$ est un entier naturel strictement positif, il est supérieur ou égal à 1. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{q_n q} \leq \frac{|pq_n - qp_n|}{q_n q} = \frac{\varepsilon_n}{q_n}.$$

On obtient : $0 < \frac{1}{q} \leq \varepsilon_n$, ce qui donne l'absurdité $\frac{1}{q} = 0$ lorsque n tend vers l'infini.

Par l'absurde, α est un nombre irrationnel.

Remarque. L'hypothèse de positivité de α et de p_n est superflue.

Q21. On a $n! \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{10^{n!}} \leq \frac{1}{10^n}$. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^n}$ est de raison dans $] -1, 1[$, elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, β est bien défini (c'est-à-dire est un nombre réel).

Pour démontrer que β est un nombre irrationnel, il suffit de démontrer que β vérifie les hypothèses de la question précédente. Il est évidemment positif. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soient p_n et q_n les uniques entiers positifs premiers entre eux tels que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Ces entiers existent bien parce que $\mathbb{Q}$ est un anneau. Plus précisément, on a :

$$p_n = \sum_{k=1}^n 10^{n!-k!}, \quad \text{et} : \quad q_n = 10^{n!}.$$

Je ne démontre pas qu'ils sont effectivement premiers entre eux : cela n'interviendra pas dans la suite du raisonnement, pas plus que l'expression exacte de p_n .

Leur stricte positivité est claire, puisque nous sommes des réels strictement positifs. Par définition de β et de $\frac{p_n}{q_n}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \beta$. Ensuite, comme $\frac{1}{10^{n!}}$ est strictement positif pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{n!}}$ est strictement croissante et donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{p_n}{q_n} < \beta$.

Il reste à démontrer : $\left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q_n} \right)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| = \beta - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k-n}} = \frac{1}{q_n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k-n}},$$

et pour tout $k \geq n+1$ on a : $k! - n! = n! \left(\prod_{\ell=n+1}^k \ell - 1 \right) \geq n! \cdot (k-1)$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!(k-1)}} \leq \frac{1}{q_n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k-1}} = \frac{1}{q_n} \cdot \frac{1}{10^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}},$$

et comme $\left(\frac{1}{10^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 on a bien :

$$\left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q_n} \right).$$

Puisque β vérifie bien les hypothèses de la question précédente, il s'agit d'un irrationnel : d'où le résultat.

Remarque culturelle. C'est un *nombre de Liouville*. Il est non seulement irrationnel, mais transcendant (c'est-à-dire annulé par aucun polynôme non nul à coefficients rationnels).

Q22. Le nombre $\zeta(2)$ est bien défini (c'est-à-dire est un réel), puisque les séries de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1 sont convergentes.

Par définition, d_n est divisible par tous les entiers de 1 à n . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $a_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $d_n = k \cdot a_k$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{d_n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{d_n^2},$$

d'où le résultat en posant $p_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ (qui est strictement positif en tant que somme d'entiers naturels non nuls) et $q_n = d_n^2$.

Q23. Nous allons démontrer que l'hypothèse sur $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$ est en défaut. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme l'application $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue et décroît sur $]0, +\infty[$, une comparaison série-intégrale donne :

$$\left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Déduisons-en que l'on n'a pas : $\left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q_n} \right)$. Rappelons qu'on a calculé q_n dans la question précédente. Si cette hypothèse était vérifiée, alors par la comparaison série-intégrale ci-dessus on aurait en particulier :

$$\frac{1}{n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{d_n^2} \right),$$

c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n^2}{n} = 0$. Or d_n est divisible par n pour tout entier naturel non nul, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{d_n^2}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$. En particulier, ce quotient tend vers $+\infty$ et contredit la relation de comparaison ci-dessus.

On ne peut donc pas appliquer la question **Q20** pour obtenir l'irrationalité de $\zeta(2)$.

Partie D - Calcul d'une intégrale double

I - Une intégrale double

- Q24.** Comme r et s sont des entiers naturels, l'application $x \mapsto \frac{x^r y^s}{1-xy}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet : $0 \leq xy < x \leq 1$, donc $1 - xy = 0$ est impossible), donc elle est intégrable : d'où le résultat.
- Q25.** Pour tout $y \in]0, 1[$, le changement de variable affine $u = xy$ dans l'intégrale $f_{r,s}(y)$ donne :

$$f_{r,s}(y) = y^{s-r-1} \int_0^y \frac{u^r}{1-u} du.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, l'application $F : y \mapsto \int_0^y \frac{u^r}{1-u} du$ est continue (et même de classe C^1) sur $[0, 1[$, donc sur $]0, 1[$. En tant que fonction puissance, l'application $y \mapsto y^{s-r-1}$ est continue sur $]0, 1[$, donc sur $]0, 1[$. Ainsi $f_{r,s}$ est continue comme produit de fonctions continues sur $]0, 1[$.

Justifions l'intégrabilité. On vient de mentionner la continuité sur $]0, 1[$. De plus, par le théorème d'intégration des équivalents, qui s'applique à l'équivalent $\frac{u^r}{1-u} \underset{u \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-u} > 0$ (l'intégrale $\int_0^1 \frac{du}{1-u}$ diverge), on a :

$$f_{r,s}(y) \underset{y \rightarrow 1}{\sim} \int_0^y \frac{du}{1-u} = -\ln(1-y) > 0.$$

La fonction $y \mapsto -\ln(1-y)$, qui est positive et continue sur $[0, 1[$, est intégrable au voisinage de 1 par le théorème des croissances comparées, qui permet de comparer cette fonction à une fonction de Riemann intégrable :

$$-\ln(1-y) = \underset{y \rightarrow 1}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y}} \right).$$

Par comparaison, la fonction $f_{r,s}$ est aussi intégrable au voisinage de 1. Il reste à en faire l'étude au voisinage de 0. Encore par le théorème d'intégration des relations de comparaison, cette fois-ci avec l'équivalent $\frac{u^r}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u^r > 0$ (l'intégrale $\int_0^{1/2} u^r du$ converge), on a :

$$f_{r,s}(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y^{s-r-1} \int_0^y u^r du = \frac{y^s}{r+1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

On en déduit que $f_{r,s}$ se prolonge en une fonction continue en 0, ce qui assure son intégrabilité au voisinage de ce point.

Ceci achève de démontrer que $f_{r,s}$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$.

Remarque. On pouvait aussi obtenir la continuité sur $[0, 1[$ de $f_{r,s}$ par le théorème de continuité sous le signe intégrale, qui s'applique ici très facilement puisqu'on intègre sur un segment (ce qui permet de vérifier l'hypothèse de domination en appliquant le théorème des bornes atteintes à l'application $(x, y) \mapsto \frac{x^r y^s}{1-xy}$, continue sur tout compact de la forme $[0, 1] \times [a, b]$ avec $[a, b] \subseteq [0, 1[$). Je n'ai pas procédé ainsi parce que l'expression de $f_{r,s}$ ci-dessus permettait de répondre à la question de l'intégrabilité au voisinage de 1, au contraire du théorème de continuité.

- Q26.** Fixons pour le moment $y \in]0, 1[$. Comme xy appartient à $] -1, 1[$ pour tout $x \in [0, 1]$, on peut écrire :

$$f_{r,s}(y) = \int_0^1 x^r y^s \sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+r} y^{n+s} dx.$$

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif, dont on vérifie les hypothèses (inutiles mais dues aux contraintes du programme). Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^{n+r} y^{n+s}$. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application g_n est continue par morceaux et positive sur $[0, 1]$ par continuité des fonctions puissances, ce qui assure d'ailleurs son intégrabilité ;
- par convergence des séries géométriques de raison dans $]0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et sa somme $x \mapsto \frac{x^r y^s}{1-xy}$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.

On a donc :

$$\forall y \in]0, 1[, \quad f_{r,s}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{n+r} y^{n+s} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+s}}{n+r+1}.$$

On reprend *exactement* le même raisonnement que ci-dessus (majorer $\frac{1}{n+r+1}$ par 1 pour se ramener à une série géométrique) pour en déduire l'identité annoncée :

$$J_{r,s} = \int_0^1 f_{r,s}(y) dy = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+s}}{n+r+1} dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{y^{n+s}}{n+r+1} dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)},$$

d'où le résultat.

II - Une écriture sous forme de quotients

Q27. C'est une trivialité (mettre au même dénominateur le membre de droite).

Q28. Utiliser les deux questions précédentes (l'hypothèse de la question **Q26** est bien vérifiée, vu que $r > s$ entraîne $r \geq s$; d'ailleurs, cette hypothèse n'est jamais utilisée dans la partie D.I).

Q29. Soit n au voisinage de l'infini. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1} \right) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{r+k+1} \\ &= \sum_{k=s+1}^{n+s+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=r+1}^{n+r+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+s+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^s \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+r+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k} \\ &= - \sum_{k=n+s+1}^{n+r+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

La première somme est une somme de $r-s$ suites convergeant vers 0. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1} \right) = \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k},$$

d'où le résultat en divisant par $r-s$.

Q30. Comme $r-s$ est entre 1 et r , il divise d_r par définition. Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $d_r = (r-s)a$. On introduit de même, pour tout $k \in \llbracket s+1, r \rrbracket$, un entier a_k tel que : $d_r = k \cdot a_k$. Alors, par la question précédente :

$$J_{r,s} = \sum_{k=s+1}^r \frac{a \cdot a_k}{d_r^2},$$

d'où le résultat en posant $q_{r,s} = d_r^2$ et $p_{r,s} = \sum_{k=s+1}^r a \cdot a_k$.

Partie E - Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

Q31. Comme P_n est obtenu en dérivant n fois un polynôme de degré $2n$, c'est un polynôme de degré n . Par la formule de dérivation de Leibniz, on a de plus :

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^n)^{(k)} ((1-X)^n)^{(n-k)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (1-X)^k.$$

Simplifions. On a :

$$P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2 X^{n-k} (1-X)^k.$$

Les coefficients binomiaux sont des entiers naturels, ce qui permet de conclure que P_n est à coefficients entiers parce que $\mathbb{Z}[X]$ est trivialement un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$.

Q32. Remarquons que l'énoncé n'a pas défini $J_{r,r}$ pour $r = 0$, et demande pourtant de démontrer une identité faisant intervenir cet objet. Nous conviendrons que la définition de $J_{r,s}$ reste valable si $r = 0$ ou $s = 0$. C'est légitime : nos raisonnements de la partie I.D n'utilisent jamais la stricte positivité.

L'intégrale double $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy$ existe pour tous entiers r et s d'après la question **Q25** (remarquons que ni l'inégalité $r \geq s$, ni l'hypothèse de stricte positivité n'intervient dans cette question – pour l'intégrabilité au voisinage de 0, il faut simplement remplacer $y^s \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ par $y^s \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ si $s = 0$ –, donc le résultat vaut pour tout $(r, s) \in \mathbb{N}^2$). Par linéarité, l'intégrale double $\int_0^1 \int_0^1 \frac{P(x)Q(y)}{1-xy} dx dy$ converge pour tous polynômes P et Q , d'où le résultat en prenant $P = P_n$ et $Q = (1 - X)^n$.

De plus, par linéarité des deux intégrales en présence, on a :

$$I_n = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n \int_0^1 \int_0^1 a_r b_s \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n a_r b_s J_{r,s}.$$

En isolant les termes correspondant à $r = s$, on a le résultat :

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r}.$$

Q33. On utilise la question **Q30** et la question précédente. On a alors :

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r}.$$

De plus, l'énoncé demande d'admettre que : $J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}$. D'où, par la question **Q22** dont on reprend les notations, en remplaçant seulement la notation p_r par p'_r (sinon ces notations sont en conflit avec celles de cette question !) :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}} + \sum_{r=0}^n a_r b_r \zeta(2) - \sum_{r=0}^n a_r b_r \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{p_{r,s}(d_n^2/q_{r,s})}{d_n^2} + \sum_{r=0}^n a_r b_r \zeta(2) - \sum_{r=0}^n a_r b_r \frac{p'_r}{d_r^2} \\ &= \frac{1}{d_n^2} \left(\sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s p_{r,s} \frac{d_n^2}{q_{r,s}} - \sum_{r=0}^n a_r b_r p'_r \frac{d_n^2}{d_r^2} + \sum_{r=0}^n a_r b_r d_n^2 \zeta(2) \right). \end{aligned}$$

Il est clair, au vu de la définition, que d_r divise d_n pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (un multiple commun des entiers $1, \dots, n$ est en particulier un multiple commun des entiers $1, \dots, r$). On en déduit que $\frac{d_n^2}{d_r^2}$ est un entier pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. C'est aussi le cas de $\frac{d_n^2}{q_{r,s}} = \frac{d_n^2}{d_r^2} \frac{d_r^2}{q_{r,s}}$ par la question **Q30**. D'où le résultat attendu en posant :

$$p_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s p_{r,s} \frac{d_n^2}{q_{r,s}} - \sum_{r=0}^n a_r b_r p'_r \frac{d_n^2}{d_r^2}, \quad \text{et :} \quad q_n = \sum_{r=0}^n a_r b_r d_n^2.$$

Remarque. On a utilisé le résultat admis $J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}$... Cependant l'énoncé n'a défini $J_{r,s}$ que pour $r, s \geq 1$, et en particulier ce résultat admis ne devrait pas être utilisable pour $r = 0$. Je

ne sais pas si c'est délibéré de la part du concepteur du sujet, je pense que non. Dans le doute, justifions brièvement l'égalité :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - xy} = \zeta(2).$$

Il suffit de reprendre les calculs de la question **Q26**. En effet, on n'y utilise nulle part le fait que r et s soient non nuls. On a alors :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - xy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2).$$

Q34. Soit $y \in]0, 1[$. Démontrons, par récurrence sur k , que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a :

$$P_k : \ll \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1 - xy} dx = \frac{(-y)^k}{n!} \int_0^1 \frac{k!}{(1 - xy)^{k+1}} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n(1 - x)^n) dx. \gg$$

L'initialisation découle de la définition de P_0 . Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. On suppose P_k . Nous allons intégrer par parties, en dérivant $x \mapsto \frac{1}{(1 - xy)^{k+1}}$ (dont la dérivée est $x \mapsto \frac{(k+1)y}{(1 - xy)^{k+2}}$) et en intégrant $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n(1 - x)^n)$. Pour l'annulation du terme :

$$\left[\frac{1}{(1 - xy)^{k+1}} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^n(1 - x)^n) \right]_0^1,$$

il suffit de noter que 0 et 1 sont racines de $X^n(1 - X)^n$ d'ordre de multiplicité n : elles annulent donc toutes les dérivées d'ordre ℓ avec $\ell \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Comme $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on a $n - k - 1 \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, donc la dérivée $(n - k - 1)^e$ de $X^n(1 - X)^n$ s'annule en 0 et 1. La formule de l'intégration par parties donne donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 - xy)^{k+1}} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n(1 - x)^n) dx = - \int_0^1 \frac{(k+1)y}{(1 - xy)^{k+2}} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^n(1 - x)^n) dx.$$

On conclut en utilisant P_k :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1 - xy} dx &= \frac{(-y)^k}{n!} \int_0^1 \frac{k!}{(1 - xy)^{k+1}} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n(1 - x)^n) dx \\ &= - \frac{(-y)^k}{n!} y \int_0^1 \frac{k!(k+1)}{(1 - xy)^{k+2}} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^n(1 - x)^n) dx \\ &= \frac{(-y)^{k+1}}{n!} \int_0^1 \frac{(k+1)!}{(1 - xy)^{k+2}} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^n(1 - x)^n) dx, \end{aligned}$$

d'où P_{k+1} . Par principe de récurrence, on a en particulier P_n , d'où le résultat :

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1 - xy} dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n(1 - x)^n}{(1 - xy)^{n+1}} dx.$$

Q35. Par la question précédente et par linéarité de l'intégrale on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)y^k}{1 - xy} dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n(1 - x)^n y^n y^k}{(1 - xy)^{n+1}} dx.$$

Les applications linéaires $Q \mapsto \int_0^1 \frac{P_n(x)Q(y)}{1 - xy} dx$ et $Q \mapsto (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n(1 - x)^n y^n Q(y)}{(1 - xy)^{n+1}} dx$ coïncident donc sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$: elles sont égales. En particulier, en prenant $Q = (1 - X)^n$ et en intégrant sur $]0, 1[$ (l'intégrale existe par la question **Q32**), on a par définition de I_n :

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1 - x)^n (-y)^n (1 - y)^n}{(1 - xy)^{n+1}} dx dy,$$

d'où le résultat.

Q36. Posons :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad f(x, y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}.$$

Justifions d'abord que cette fonction est bornée et atteint ses bornes ; nous trouverons alors son maximum par étude des points critiques (elle est clairement de classe C^1 en tant que quotient d'applications polynomiales). Remarquons d'abord qu'elle se prolonge par continuité en tout point de la frontière de $]0, 1[^2$. C'est évident par continuité du numérateur et du dénominateur en tout point (on a alors une limite nulle au numérateur et non nulle au dénominateur, donc on prolonge f en $(x, y) \in \partial]0, 1[^2$ en posant $f(x, y) = 0$), sauf $(1, 1)$ car le dénominateur s'y annule : regardons ce point de plus près. On se ramène d'abord à une étude en $(0, 0)$ par composition avec l'involution $(x, y) \mapsto (1-x, 1-y)$:

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad f(1-x, 1-y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{x+y-xy} = \frac{xy}{x+y} \frac{(1-x)(1-y)}{1-\frac{xy}{x+y}}.$$

Or : $\forall (x, y) \in]0, 1[^2, 0 \leq \frac{xy}{x+y} \leq \frac{xy}{x} = y \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$. On a donc :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y} = 0, \quad \text{et} : \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1-x)(1-y)}{1-\frac{xy}{x+y}} = 1.$$

Par opération classique sur les limites, on en déduit :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(1-x, 1-y) = 0.$$

Ainsi f se prolonge par continuité en $(1, 1)$ en la posant comme nulle en ce point. Ceci achève de démontrer que f se prolonge en une fonction continue (que l'on note toujours f par commodité) sur le compact non vide $[0, 1]^2$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ tel que : $f(x_0, y_0) = \max_{[0,1]^2} f$. Ce maximum ne peut pas être atteint sur la frontière, puisque f y est nulle et f est clairement strictement positive sur $]0, 1[^2$. On en déduit que (x_0, y_0) appartient à l'ouvert $]0, 1[^2$: c'est un point critique. On en déduit : $\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = 0$. Or :

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \frac{(1-2x_0+x_0^2 y_0) y_0 (1-y_0)}{(1-x_0 y_0)^2}, \quad \text{et} : \quad \partial_2 f(x_0, y_0) = \frac{(1-2y_0+y_0^2 x_0) x_0 (1-x_0)}{(1-x_0 y_0)^2}$$

(la symétrie en (x, y) de f permet de déduire la seconde dérivée partielle de la première). On en déduit que $(x_0, y_0) \in]0, 1[^2$ vérifie le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1-2x_0+x_0^2 y_0 &= 0 \\ 1-2y_0+y_0^2 x_0 &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y_0-2x_0 y_0+x_0^2 y_0^2 &= 0 \\ x_0-2y_0 x_0+y_0^2 x_0^2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 &= y_0 \\ x_0-2y_0 x_0+y_0^2 x_0^2 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_0 &= y_0 \\ 1-2x_0+x_0^3 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation polynomiale, on note que le polynôme X^3-2X+1 admet la « racine évidente » 1, et la division euclidienne de X^3-2X+1 par $X-1$ permet d'obtenir la factorisation :

$$X^3-2X+1 = (X-1)(X^2+X-1).$$

Le calcul des racines de X^2+X-1 est standard. Ce polynôme n'a qu'une seule racine dans $]0, 1[$, qui est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On en déduit :

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right),$$

et donc, pour tout $(x, y) \in]0, 1]^2$:

$$\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}-11}{2},$$

d'où le résultat (la dernière égalité est bien sûr parfaitement malhonnête, je ne l'ai vérifiée que de manière approchée avec une calculatrice).

Q37. D'après les deux questions précédentes, on a par l'inégalité triangulaire (remarquer que l'intégrande est positif, ce qui simplifie la valeur absolue) :

$$|I_n| \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n dx dy \leq \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1-xy} = \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n J_{0,0},$$

où l'on vous renvoie à la question **Q32** pour la discussion sur l'existence de $J_{0,0}$. On a par la remarque en question **Q33** : $J_{0,0} = \zeta(2)$, d'où le résultat : $|I_n| \leq \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \zeta(2)$.

Q38. Soit n au voisinage de l'infini. On utilise la question **Q33**. On a :

$$|p_n + \zeta(2)q_n| = d_n^2 |I_n|.$$

Pour tout $y \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$, donc par propriété de séparation de l'intégrale on a :

$$\forall y \in]0, 1[, \quad \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx > 0.$$

De plus, cette intégrale est une fonction continue de la variable y sur $]0, 1[$ (on utilise le théorème de continuité sous le signe intégrale ; pour l'hypothèse de domination, on introduit un segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 1[$ et on note que l'application $(x, y) \mapsto \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}$ est continue sur le compact $[0, 1] \times [a, b]$, ce qui donne une constante – nécessairement intégrable – majorant cette fonction), donc on peut utiliser le même argument de séparation pour en déduire : $|I_n| > 0$. D'où :

$$|p_n + \zeta(2)q_n| > 0.$$

Pour majorer cette quantité, on utilise la question précédente et la question **Q19** :

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq 3^{2n} \cdot \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \zeta(2).$$

Comme : $9 \cdot \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \leq \frac{5}{6}$ (c'est l'énoncé qui le dit !), on conclut :

$$0 < |p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

Q39. Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^n = 0$, la question précédente implique :

$$\left| \zeta(2) - \left(-\frac{p_n}{q_n} \right) \right| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q_n} \right)$$

(rappelons que l'énoncé admet que q_n est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$). De plus, toujours par la question précédente : $\forall n \geq N$, $\zeta(2) \neq -\frac{p_n}{q_n}$. Enfin, en minorant $|q_n|$ par 1, on a toujours par la question précédente et le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{p_n}{q_n} = \zeta(2).$$

On peut donc appliquer la question **Q20** avec $\alpha = \zeta(2) \geq 0$ (comme j'y fais la remarque, le signe de $-p_n$ n'a pas d'importance pour appliquer cette question ; si l'on veut se ramener à q_n positif, il suffit de remplacer (p_n, q_n) par $(-p_n, -q_n)$ si besoin). On en déduit que $\zeta(2)$ est un nombre irrationnel : d'où le résultat.

Q40. Si π est un nombre rationnel, alors $\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$ aussi puisque $\mathbb{Q}$ est un corps, ce qui contredit la question précédente. Par l'absurde, π est irrationnel.