

Centrale MP Maths1 2016

I Si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0$

I.A - Deux exemples de normes sous-multiplicatives

I.A.1) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & N(A) \in \mathbb{R}^+ \text{ (évident)} \\ (ii) & N(\lambda A) = |\lambda| \cdot N(A) \\ (iii) & N(A + B) \leq N(A) + N(B) \\ (iv) & N(A) = 0 \implies A = 0 \\ (v) & N(AB) \leq N(A) \cdot N(B) \end{array} \right.$$

Pour (ii) : Si $\lambda = 0$ on a bien $N(\lambda A) = N(0) = 0 = |\lambda| \cdot N(A)$. On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$ donc $\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| \leq |\lambda| \cdot N(A)$

comme c'est vrai pour tout i , on a $N(\lambda A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| \right) \leq |\lambda| \cdot N(A)$

On applique alors cette inégalité à la matrice λA et au scalaire $\frac{1}{\lambda}$

ainsi $N(\frac{1}{\lambda} \lambda A) \leq |\frac{1}{\lambda}| \cdot N(\lambda A)$ et donc $N(\lambda A) \geq |\lambda| \cdot N(A)$

Les deux inégalités donnent $N(\lambda A) = |\lambda| \cdot N(A)$

Pour (iii) : Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq N(A) + N(B)$

donc $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$

Pour (iv) : On suppose que $N(A) = 0$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a donc $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ (somme de réels positifs) donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{i,j} = 0$

donc $A = 0$

Pour (v) : On note $AB = (c_{i,j})$

Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $|c_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}|$

donc $\sum_{j=1}^n |c_{i,j}| \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \left(\sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right) \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot N(B) \leq N(A) N(B)$

On a montré que l'application $A \mapsto N(A)$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

I.A.2) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \|A\| \in \mathbb{R}^+ \\ (ii) & \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \\ (iii) & \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \\ (iv) & \|A\| = 0 \implies A = 0 \\ (v) & \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \end{array} \right.$$

Le (i) découle du (i) pour N et du fait que l'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto Q^{-1}AQ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie.

Le (ii) et (iii) découlent respectivement de (ii) et (iii) pour N et du fait que l'application ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Le (iv) découle de (iv) pour N et du fait que l'application ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Le (v) découle de (v) pour N et du fait que l'application ψ est un morphisme d'algèbre

On a montré que l'application $A \mapsto \|A\|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

I.B - Une conséquence de l'inégalité $\rho(A) < 1$

I.B.1) On écrit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ On a alors $T\Delta = (t_{i,j}\delta^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$

et comme $\Delta^{-1} = \text{diag}(1, 1/\delta, \dots, 1/\delta^{n-1})$, on a alors $\hat{T} = \Delta^{-1}T\Delta = (t_{i,j}\delta^{j-1}/\delta^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Ainsi $\hat{T} = (t_{i,j}\delta^{j-i})_{1 \leq i,j \leq n}$

Comme T est triangulaire supérieure, si $i > j$ on a $t_{i,j} = 0$ donc $\hat{T}$ est triangulaire supérieure

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme A et T sont semblable, on a $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(T) = \{t_{k,k} / 1 \leq k \leq n\}$ ainsi $|t_{i,i}| < 1$

On a $\sum_{j=1}^n |t_{i,j}\delta^{j-i}| = |t_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}\delta^{j-i}|$ car $\hat{T}$ est triangulaire supérieure

On a $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}\delta^{j-i}| = 0$ (somme finie éventuellement vide) donc $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n |t_{i,j}\delta^{j-i}| = |t_{i,i}| \in [0, 1[$

ceci nous fournit $\alpha_i > 0$, tel que $\forall \delta > 0, \delta \leq \alpha_i \Rightarrow \sum_{j=1}^n |t_{i,j}\delta^{j-i}| \leq \frac{|t_{i,i}| + 1}{2} < 1$ car $|t_{i,i}| < \frac{|t_{i,i}| + 1}{2} < 1$

En choisissant $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$, on obtient $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n |t_{i,j}\delta^{j-i}| < 1$

On a montré qu'on peut choisir δ de sorte que $N(\hat{T}) < 1$

I.B.2) On remarque au préalable que A est trigonalisable car son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ d'après d'Alembert-Gauss. Ceci justifie l'existence de matrices P et T introduites en **I.B.1)** et donc celles de Q et δ .

On a $\|A\| = N((P\Delta)^{-1}AP\Delta) = N(\Delta^{-1}P^{-1}AP\Delta) = N(\Delta^{-1}T\Delta) = N(\hat{T})$ Ainsi $\|A\| < 1$

comme $\| \cdot \|$ est sous-multiplicative d'après I.A.2, on a par récurrence immédiate $0 \leq \|A^m\| \leq \|A\|^m$

donc par théorème d'encadrement $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A^m\| = 0$

on en déduit $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0$ car en dimension finie, la convergence ne dépend pas du choix de la norme

II Chemins dans les matrices positives

II.A - Réduction d'un chemin à un chemin élémentaire

On suppose qu'il existe dans A un chemin de i vers j où $i \neq j$.

On note E l'ensemble des longueurs des chemins dans A de i vers j .

L'ensemble E est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément ℓ .

Notons $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow \dots \rightarrow i_\ell = j$ un chemin de longueur minimale, ℓ

Par l'absurde si ce chemin n'était pas élémentaire il existerait $0 \leq k < k' \leq \ell$, tels que $i_k = i_{k'}$

Ainsi on aurait un autre chemin $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_{k'+1} \rightarrow \dots \rightarrow i_\ell = j$ qui va de i vers j de longueur $\ell - (k' - k)$

car on a enlevé les indices de $k+1$ à k'

donc $\ell - (k' - k) \in E$ et $\ell - (k' - k) < \min E$ Absurde

Ainsi s'il existe dans A un chemin de i vers j , avec $i \neq j$, alors il existe un chemin *élémentaire* de i vers j

et comme l'application : $k \in \llbracket 0, \ell \rrbracket \mapsto i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est injective : la longueur ℓ de ce chemin vérifie $\ell \leq n - 1$

On fait de même pour les chemins (i_k) allant de i vers i mais en utilisant l'injectivité de $k \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket \mapsto i_k$

s'il existe dans A un circuit passant i , alors il existe un circuit *élémentaire* passant par i et de longueur $\ell \leq n$

Preuve algorithmique : J'ai souvent vu une preuve algorithmique mais celle-ci manquait du variant de boucle qui permettait de justifier la terminaison de l'algorithme.

On considère un chemin $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow \dots \rightarrow i_\ell = j$ allant de i vers j de longueur $\ell \in \mathbb{N}^*$.

Si ce chemin est élémentaire il n'y a plus rien à faire, sinon il existe $k < k'$ dans $\llbracket 0, \ell \rrbracket$ tel que $i_k = i_{k'}$.

Je considère alors le chemin : $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow i_k = i_{k'} \rightarrow i_{k'+1} \rightarrow \dots \rightarrow i_\ell = j$

Ce chemin va de i vers j de longueur $\ell - (k' - k) < \ell$.

On réitère le procédé tant que le nouveau chemin allant de i vers j n'est pas élémentaire.

À chaque étape le nouveau chemin va bien de i vers j (invariant de boucle). De plus la suite des longueurs (variant de boucle) des chemins est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et est strictement décroissante. Le processus s'arrête. Le dernier chemin obtenu est nécessairement élémentaire et va de i vers j . Ce qui permet de conclure.

II.B - Une caractérisation de l'existence d'un chemin de i à j

Soit $A \geq 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $m \geq 1$. Montrons par récurrence l'équivalence demandée pour tout i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, que je note $\mathcal{P}_m$.

Initialisation : Soit i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On a l'équivalence entre les trois propositions :

- il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur 1 ;
- $a_{i,j} > 0$
- le coefficient d'indice i, j de A^1 (noté $a_{i,j}^{(1)}$) est strictement positif.

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_m$. Montrons $\mathcal{P}_{m+1}$.

Soit i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$\Rightarrow$ On suppose qu'il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur $m + 1$.

Notons $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m+1} = j$ ce chemin et $q = i_m$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on a $a_{i,q}^{(m)} > 0$ par hypothèse de récurrence appliqué à i et q

$$\text{or } a_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} = a_{i,q}^{(m)} a_{q,j} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq q}} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} \text{ et } \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq q}} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} \geq 0 \text{ car } \forall p \geq 1, A^p \geq 0$$

et $a_{q,j} > 0$ à cause du chemin $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = q \rightarrow i_{m+1} = j$ ce qui prouve que $a_{i,j}^{(m+1)} > 0$

$\Leftarrow$ On suppose que $a_{i,j}^{(m+1)} > 0$.

On a donc $\sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} > 0$ ceci nous fournit $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i,q}^{(m)} a_{q,j} > 0$

Comme les coefficients sont tous positifs, alors $a_{i,q}^{(m)} > 0$ et $a_{q,j} > 0$

$\mathcal{P}_m$ nous fournit un chemin de longueur m dans A : $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = q$

donc $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = q \rightarrow j$ est un chemin de longueur $m + 1$ dans A allant de i à j

Conclusion : On a bien montré par récurrence l'équivalence des propositions :

- il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur m ;
- le coefficient d'indice i, j de A^m (noté $a_{i,j}^{(m)}$) est strictement positif.

II.C - Chemins dans une puissance de A

On désigne par $(a^{(m)})_{i,j}^{(\ell)}$ le terme général de la matrice $(A^m)^\ell$

En remarquant que $(A^m)^\ell = A^{m\ell}$ et à l'aide de la question précédente :

On a alors l'équivalence entre :

- il existe dans A^m un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur ℓ ;
- $(a^{(m)})_{i,j}^{(\ell)} > 0$
- $a_{i,j}^{(m\ell)} > 0$
- il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur $m\ell$.

III Matrices primitives et indice de primitivité

III.A - Chemins élémentaires dans une matrice primitive

Soit $i \neq j$. Soit $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$. Ainsi **II.B** nous fournit un chemin dans A de i vers j

donc **II.A** nous fournit alors dans A un chemin élémentaire de i à j et de longueur $\ell \leq n - 1$

et de manière analogue il existe dans A un circuit élémentaire passant par i et de longueur $\ell \leq n$

III.B - Puissances d'une matrice primitive

III.B.1) Je prends $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 sauf $[A]_{1,1} = 0$

Les coefficients de la première ligne ou de la première colonne de A^2 valent $n - 1 > 0$ les autres valent $n > 0$

A est un exemple simple d'une matrice carrée primitive mais non strictement positive

III.B.2) Par l'absurde on suppose que l'on n'a pas $Bx > 0$.

donc il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sum_j^n [B]_{i,j} x_j = 0$ (somme de termes positifs)

donc $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[B]_{i,j} x_j = 0$ donc $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j = 0$ car $B > 0$

donc $x = 0$ Absurde

si $B > 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$ alors $Bx > 0$

III.B.3) On va montrer par récurrence que pour tout $p \geq m$: $A^p > 0$

Initialisation : évidente pour $p = m$

Hérédité : Soit $p \geq m$ tel que $A^p > 0$. Montrons $A^{p+1} > 0$

Par l'absurde si on n'avait pas $A^{p+1} > 0$

On note $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de A de sorte que les colonnes de $A^{p+1} = A^p A$ sont $A^p c_1, A^p c_2, \dots, A^p c_n$

donc il existerait j tel que $A^p c_j$ ne vérifie pas $A^p c_j > 0$ or $A^p > 0$ et $c_j \geq 0$

donc par contraposition de la question précédente $c_j = 0$

On a donc $Ae_j = 0$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$

d'où $A^p e_j = 0$ or $A^p > 0$ et $e_j \geq 0$ et $e_j \neq 0$

ce qui est en contradiction avec le résultat de la question précédente.

Conclusion : Si $A^m > 0$ alors $\forall p \geq m$, $A^p > 0$

III.B.4) On suppose A primitive et on prend $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$

Pour $k \geq 1$, on a donc $(A^k)^m = A^{km} > 0$ car $km \geq m$ et à l'aide de la question précédente

si A est primitive, alors A^k est primitive pour tout $k \geq 1$

III.B.5) Par l'absurde, on suppose qu'il existe une matrice A primitive d'indice m dont le rayon spectral est nul.

Le polynôme caractéristique de A noté χ_A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ d'après d'Alembert-Gauss et $\text{Sp}(A) = \{0\}$ donc

$\chi_A = X^n$ donc $A^n = 0$ D'après Cayley-Hamilton

Ainsi $A^{m+n} = 0$ et $A^{m+n} > 0$ d'après **III.B.3** Absurde

ainsi le rayon spectral d'une matrice primitive est strictement positif

III.C - La matrice de Weilandt

III.C.1) On a $W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_{W_2} = X^2 - \text{tr}(W_2)X + \det(W_2) = X^2 - X - 1$ on a vérifié le résultat pour $n = 2$

et $\chi_{W_3} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & 1 \\ 1 & 1 & X \end{vmatrix} = X^3 - X - 1$ avec Sarus (Argh!). Si $n > 3$, on développe selon la dernière colonne :

$$\chi_{W_n} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_{[n]} = X^n + \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

or en développant selon la dernière colonne, pour $p > 3$, on a :

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{[p]} = + \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{[p-1]} = \begin{vmatrix} \ddots & & & & & \end{vmatrix}_{[3]} \quad (\text{termes d'une suite constante})$$

$$\text{donc } \chi_{W_n} = X^n + \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = X^n - 1 - X$$

Ainsi le polynôme caractéristique de W_n est $X^n - X - 1$

En appliquant Cayley-Hamilton, on a $W_n^n = W_n + I_n$

$$\text{donc } W_n^{n^2-2n+1} = W_n (W_n^n)^{n-2} = W_n (W_n + I_n)^{n-2}$$

$$\text{Comme } I_n \text{ et } W_n \text{ commutent : on a } W_n^{n^2-2n+1} = W_n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} W_n^k I_n^{n-2-k}$$

$$\text{Après développement et changement d'indice : } W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$$

$$\text{Puis } W_n^{n^2-2n+2} = W_n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k = \binom{n-2}{n-2} W_n^n + \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} W_n^{k+1}$$

$$\text{À nouveau avec Cayley-Hamilton et changement d'indice : } W_n^{n^2-2n+2} = I_n + W_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k$$

III.C.2)

Méthode algébrique : En reprenant (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$

On a $W_n e_1 = e_n$ et pour $i \geq 3$ $W_n e_i = e_{i-1}$

donc pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $W_n^k e_1 = e_{n-k+1}$

ainsi pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $[W_n^k]_{1,1} = 0$ et $[W_n^n]_{1,1} = [W_n]_{1,1} + [I_n]_{1,1} = 1$

donc d'après II.B, le plus court circuit passant par l'indice 1 dans la matrice W_n est de longueur n

et à l'aide de la matrice W_n : le plus court circuit passant par l'indice 1 est : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \cdots (n-1) \rightarrow n \rightarrow 1$

Méthode visuelle : Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, le seul coefficient non nul sur la i -ème ligne de W_n est $[W_n]_{i,i+1} = 1 > 0$

ainsi il n'y a qu'un seul chemin de longueur 1 partant de i : $i \rightarrow i+1$

Par conséquent, il n'y a qu'un seul chemin partant de 1 de longueur $n-1$: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \cdots (n-1) \rightarrow n$.

Ce qui prouve qu'il n'y a pas de circuit passant par l'indice 1 de longueur $\leq n-1$.

On retrouve donc la même longueur minimale pour un circuit passant par 1.

$$\text{Ainsi d'après les calculs de la question précédente : } [W_n^{n^2-2n+1}]_{1,1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} [W_n^k]_{1,1} = 0$$

donc $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive

III.C.3) En utilisant le circuit de longueur n dans $W_n : 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow (n-1) \rightarrow n \rightarrow 1$, on voit qu'il existe un chemin qui va de i vers j pour tous $i \neq j$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$

En utilisant **II.A**, il existe bien un chemin d'origine i , d'extrémité j , et de longueur inférieure ou égale à $n-1$

Pour tous $i \neq j$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe alors $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $[W_n^k]_{i,j} > 0$ d'après **II.B**, de plus $\forall p \in \mathbb{N}$, $W_n^p \geq 0$

$$\text{donc } [W_n^{n^2-2n+2}]_{i,j} = [I_n]_{i,j} + [W_n]_{i,j} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} [W_n^k]_{i,j} > 0$$

et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $[I_n]_{i,i} = 1 > 0$ et donc $[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,i} > 0$

donc pour tous i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,j} > 0$

On en déduit que la matrice $W_n^{n^2-2n+2}$ est strictement positive comme la matrice $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive, on peut conclure que W_n est primitive, d'indice de primitivité $n^2 - 2n + 2$

III.D - Indice de primitivité maximum

III.D.1) Par l'absurde, on suppose $\ell = n$.

Montrons par l'absurde qu'alors tous les circuits de A sont de longueur multiple de n

On suppose qu'il existe un circuit dans A dont la longueur ne soit pas multiple de n

On considère un tel circuit de longueur minimale $r : i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_r = i_0$

On a donc $r \geq n$ et r n'est pas un multiple de n ainsi $r > n$ il existe alors $k < k'$ tel que $i_k = i_{k'}$

on extrait alors deux circuits $i_k \rightarrow i_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow i_{k'} = i_k$ et $i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow i_k = i_{k'} \rightarrow i_{k'+1} \dots \rightarrow i_r = i_0$

La somme des longueurs est r donc l'un d'entre eux a sa longueur qui n'est pas multiple de n

Ceci est en contradiction avec le caractère minimal de r

Ainsi tous les circuits de A sont de longueur multiple de n .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il n'y a pas de circuit de longueur $kn + 1$

Ainsi d'après **II.B** les matrices A^{kn+1} (avec $k \in \mathbb{N}$) sont de diagonale nulle

mais pour $p \geq m$ on a $A^p > 0$ où m est l'indice de primitivité en prenant $k = m$, on aboutit à une contradiction

III.D.2)

a) Si $1 \leq i \leq \ell$, On utilise le circuit $i \rightarrow (i+1) \rightarrow \dots \rightarrow \ell \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow i-1 \rightarrow i$ en le répétant si nécessaire, on obtient des chemins de longueur aussi grande que l'on veut, dont les sommets sont tous dans $\llbracket 1, \ell \rrbracket$

En s'arrêtant au bout de $n - \ell$ pas, on obtient un chemin d'origine i , de longueur $n - \ell$ et passant uniquement par des sommets dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$, il en est donc de même pour son extrémité

Si $\ell + 1 \leq i \leq n$, comme A est primitive il existe un chemin d'origine i et d'extrémité 1

Ceci nous fournit un chemin élémentaire d'origine i et d'extrémité 1 : $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = 1$

On considère $r = \min \{k \in \llbracket 1, m \rrbracket / 1 \leq i_k \leq \ell\}$ d'après **II.A**

comme le chemin est élémentaire ; alors $r \leq n - \ell$

On considère le chemin $i'_0 = i_r \rightarrow \dots \rightarrow i'_{m'}$ tel que $1 \leq i'_{m'} \leq \ell$ et $m' = n - \ell - r$ (construit comme dans le cas précédent)

on a donc $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_r = i'_0 \rightarrow i'_1 \dots \rightarrow i'_{m'}$ d'origine i , de longueur $n - \ell$ et son extrémité est dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$

En conclusion : dans les deux cas

Dans A , on peut former un chemin d'origine i , de longueur $n - \ell$, et dont l'extrémité est dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$

b) Soit $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$.

On utilise le circuit $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow \ell - 1 \rightarrow \ell \rightarrow 1$ qui nous donne un circuit de longueur ℓ passant par i .

En particulier il existe dans A un chemin de longueur ℓ d'origine k et d'extrémité k .

les ℓ premiers coefficients diagonaux de A^ℓ (et en particulier le k -ième) sont strictement positifs

On sait que A^ℓ est primitive d'après **III.B.4**

donc il existe un chemin dans A^ℓ de k à j de longueur $\lambda \leq n - 1$ d'après **III.A**

On commence par le chemin dans A^ℓ : $\underbrace{k \rightarrow k}_{n-1-\lambda \text{ fois}}$

cette concaténation de chemins est un chemin dans A^ℓ d'origine k d'extrémité j de longueur $n - 1$

Ainsi il existe un chemin de longueur $\ell(n - 1)$ d'origine k et d'extrémité j .

c) On concatène les chemins fournis par a) et b) pour obtenir dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j et de longueur $n + \ell(n - 2)$.

Comme c'est valable pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on en déduit finalement $A^{n+\ell(n-2)} > 0$

On a $\ell \leq n - 1$ donc $n + \ell(n - 2) \leq n + (n - 1)(n - 2) \leq n^2 - 2n + 2$ car $n \geq 2$

donc $A^{n^2-2n+2} > 0$ d'après **III.B.3**

IV Étude des puissances d'une matrice primitive

IV.A - Puissances de la matrice $B = A - rL$

IV.A.1) Soit $(x_0, y_0) \in \Delta \times H$. On peut trouver $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_0 = (A - rI_n)z$. On a

$$(x_0|y_0) = (x_0|(A - rI_n)z) = x_0^\top (A - rI_n)z = x_0^\top (A^\top - rI_n)^\top z = \left[(A^\top - rI_n)x_0 \right]^\top z = 0z = 0$$

donc $x_0 \perp y_0$. On a ainsi établi : $H \perp \Delta$. D'où $H \subset \Delta^\perp$ or le théorème du rang nous donne

$$\dim H = \text{rg}(A - rI_n) = \text{rg}(A^\top - rI_n) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Ker}(A^\top - rI_n)) = n - \dim \Delta = \dim(\Delta^\perp)$$

ainsi H est l'hyperplan orthogonal à la droite Δ (c'est-à-dire $H = \Delta^\perp$)

IV.A.2) Soit $u \in H$. On a $Lu = xy^\top u = x(y|u) = 0$ car $H \perp \Delta$. On a identifié dans les calculs : $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Soit $v \in D$. On peut trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $v = \mu x$ donc $Lv = xy^\top(\mu x) = \mu x(y^\top x) = \mu x = v$

donc $H \subset \text{Ker}(L)$ et $D \subset \text{Ker}(L - I_n)$ ce qui prouve que $H \cap D = \{0\}$ (sous espaces propres en somme directe)

or d'après le théorème du rang $\dim H + \dim D = n$

donc $\mathbb{R}^n = H \oplus D$ et $H = \text{ker}(L)$ et $D = \text{ker}(L - I_n)$. Ainsi

L est la matrice, dans la base canonique, de la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite D , parallèlement à l'hyperplan H

IV.A.3) On a alors $\text{Im } L = D$ et D est une droite donc L est de rang 1

On a $L = (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ et pour tout i et j , on a $x_i > 0$ et $y_j > 0$ donc $L > 0$

$L^\top y = (y x^\top) y = y(x^\top y) = 1y = y$ donc $L^\top y = y$.

IV.A.4) On a $AL = A(xy^\top) = (Ax)y^\top = (rx)y^\top = rL$

et $LA = (xy^\top)A = x(y^\top A) = x(r y^\top) = r(xy^\top)$

donc $AL = LA = rL$

Par récurrence : Initialisation : on a $(A - rL)^1 = A^1 - r^1 L$

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A - rL)^m = A^m - r^m L$

On a $(A - rL)^{m+1} = (A - rL)(A^m - r^m L) = A^{m+1} - r^m AL - rLA^m + r^{m+1}L^2 = A^{m+1} - r^{m+1}L - rLA^m + r^{m+1}L^2$

donc $(A - rL)^{m+1} = A^{m+1} - r^{m+1}L - rLA^m + r^{m+1}L = A^{m+1} - rLA^m$

Par récurrence immédiate on a $LA^m = r^m L$ ce qui permet de conclure que $(A - rL)^{m+1} = A^{m+1} - r^{m+1}L$

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*, (A - rL)^m = A^m - r^m L$.

IV.B - La matrice $B = A - rL$ vérifie $\rho(B) < r$

IV.B.1) On a $z = \frac{1}{\lambda} Bz$ d'après l'énoncé

donc $Lz = \frac{1}{\lambda} L(A - rL)z$ or $L(A - rL) = LA - rL^2 = rL - rL = 0$ d'après **A**

ainsi $Lz = 0$, puis $Az = \lambda z$ car $(A - rL)z = \lambda z$

Ainsi $\text{Sp}(B) \setminus \{0\} \subset \text{Sp}(A)$ donc $\forall \lambda \in \text{Sp}(B), |\lambda| \leq \rho(A)$. On en déduit $\rho(B) \leq r$.

IV.B.2) Par l'absurde, on choisit $\lambda \in \text{Sp}(B)$ de telle sorte que $|\lambda| = r$.

Avec les notations et résultats de la questions précédentes, on a $Az = \lambda z$

En utilisant le résultat admis qui affirme : $\forall \mu \in \text{Sp}(A), |\mu| < r$ ou $\mu = r$ on obtient : $\lambda = r$

donc $Az = rz$ donc $z \in D$ donc $Lz = z$ d'après **IV.A.2**

donc $z = 0$ ce qui aboutit à une contradiction car z est un vecteur propre

On vient de montrer par l'absurde que $\rho(B) \neq r$ or $\rho(B) \leq r$ d'après la question précédente

donc on peut conclure $\rho(B) < r$

IV.B.3) On a $\left(\frac{1}{r}A\right)^m = L + \left(\frac{1}{r}B\right)^m$ d'après **IV.A.4**

or $\text{Sp}\left(\frac{1}{r}B\right) = \left\{\frac{\lambda}{r} / \lambda \in \text{Sp}(B)\right\}$ et $\forall \lambda \in \text{Sp}(B), |\lambda| < r$ donc $\forall \lambda \in \text{Sp}\left(\frac{1}{r}B\right), |\lambda| < 1$

Ainsi $\left(\frac{1}{r}B\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ d'après la partie **I** d'où $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^m = L.$

IV.C - Le rayon spectral de A est une valeur propre simple

On commence par remarquer que $\left(\frac{1}{r}T\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} P^{-1}LP$ car $X \mapsto P^{-1}XP$ est continue (linéaire en dimension finie)

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}T\right)^m$ est une matrice de rang 1

La diagonale de T est composée des valeurs propres de A comptées avec multiplicités

donc la diagonale de $\frac{1}{r}T$ est composée de complexes de modules strictement inférieur à 1 et de 1 dont le nombre d'occurrences est μ

En regardant la limite coefficients par coefficients : $P^{-1}LP = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}T\right)^m$ est une matrice triangulaire où n'apparaît sur sa diagonale uniquement que des 0 et μ occurrences de 1

donc $\mu \leq \text{rg}(P^{-1}LP) = \text{rg}(L) = 1$ ainsi $\mu = 1$

V Matrices carrées positives irréductibles

V.A - Premières propriétés des matrices irréductibles

V.A.1)

A est irréductible si et seulement si pour tous $1 \leq i, j \leq n$, il existe dans A un chemin d'origine i et d'extrémité j

V.A.2) On suppose que A est irréductible. Soit i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $i \neq j$, d'après la question précédente et **II.A**, il existe un chemin de longueur $1 \leq m \leq n - 1$ de i à j

donc selon **II.B**, on a $a_{i,j}^{(m)} > 0$

Si $i = j$, on a $1 = [I_n]_{i,i} = [A^0]_{i,i} = a_{i,i}^{(0)}$

si A est irréductible, alors pour tous i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$

V.A.3) On prend $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $J^m = J$ ou $J = I_2$

J est un exemple simple d'une matrice carrée irréductible mais non primitive

V.A.4) On suppose A^2 est irréductible. Soit $1 \leq i, j \leq n$.

Il existe dans A^2 un chemin d'origine i et d'extrémité j de longueur $m \in \mathbb{N}$

donc d'après **II.C.**, il existe dans A un chemin d'origine i et d'extrémité j de longueur 2m

On vient de montrer par la contraposée que si A n'est pas irréductible, alors A^2 n'est pas irréductible

J est un exemple simple d'une matrice carrée irréductible telle que $J^2 = I_2$ ne soit pas irréductible

V.A.5) Par l'absurde, on suppose qu'il existe une matrice A irréductible telle que $\rho(A) \leq 0$

donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$ donc A est nilpotente comme en **III.B.5**

or il existe un circuit de 1 vers 1 de longueur $m \geq 2$ en concaténant un chemin de 1 vers 2 et un autre de 2 vers 1

donc en concaténant n fois ce circuit à lui-même on obtient un circuit de 1 à 1 de longueur nm

donc $0 < [A^{nm}]_{1,1} = 0$ car $A^n = 0$ Absurde

Ainsi le rayon spectral d'une matrice irréductible est strictement positif.

V.B - Deux caractérisations de l'irréductibilité et une condition nécessaire

V.B.1) On remarque que $B, C \geq 0$. On procède par implications circulaires

A est irréductible $\implies B > 0$: On suppose que A est irréductible.

Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $[A^k]_{i,j} \geq 0$ et **V.A.2** nous fournit $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $[A^m]_{i,j} > 0$ donc $[B]_{i,j} = [I_n]_{i,j} + [A]_{i,j} + [A^2]_{i,j} + \dots + [A^{n-1}]_{i,j} > 0$ ainsi $B > 0$

$B > 0 \implies C > 0$: On suppose $B > 0$. Montrons $C > 0$

Par l'absurde si on n'avait pas $C > 0$

Comme $C \geq 0$, il existerait $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $[C]_{i,j} = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [A^k]_{i,j} = 0$ (somme de termes positifs)

donc $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $[A^k]_{i,j} = 0$ donc $[B]_{i,j} = 0$ Absurde

$C > 0 \implies A$ est irréductible : On suppose $C > 0$. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [A^k]_{i,j} > 0$

donc il existe $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $[A^m]_{i,j} > 0$ donc A est bien irréductible

On montré l'équivalence entre les trois propriétés :

- la matrice A est irréductible ;
- la matrice $B = I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ est strictement positive ;
- la matrice $C = (I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.

V.B.2) Si une colonne de A était nulle, alors il existerait un vecteur e de la base canonique tel que $Ae = 0$ donc pour tout $m \geq 1$, on aurait $A^m e = 0$ et donc A^m aurait la même colonne nulle.

et donc A ne pourrait pas être irréductible

Vue la définition, A est irréductible si et seulement si $A^\top$ est irréductible

donc si A irréductible alors aucune ligne (et aucune colonne) de A n'est identiquement nulle

V.C - Deux conditions suffisantes de primitivité

V.C.1) Soit i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il existe un chemin $\mathcal{C}$ de longueur $\ell \leq n-1$ de i vers j dans A (irréductible)

On considère alors le chemin $\mathcal{C}'$ dans A : $i \rightarrow i \rightarrow \dots \rightarrow i$ de longueur $n-1-\ell$ (éventuellement vide)

la concaténation de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ est un chemin de longueur $n-1$ de i vers j donc $a_{i,j}^{(n-1)} > 0$

si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} > 0$ alors $A^{n-1} > 0$

V.C.2) Soit j, k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Prenons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i,i} > 0$.

Comme A est irréductible, il existe dans A un chemin $\mathcal{C}_1$ de j vers i et un autre $\mathcal{C}_2$ de i vers k

La concaténation de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ nous fournit un chemin $\mathcal{C}$ de j vers k passant par i

Parmi les n^2 chemins ainsi définis, on en prend celui de longueur maximale notée m .

On note ℓ la longueur du chemin $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_3$ le chemin constant dans A : $i \rightarrow i \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow i$ de longueur $m-\ell$

Alors la concaténation de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_2$ est un chemin dans A d'origine j , d'extrémité k de longueur m

donc $a_{j,k}^{(m)} > 0$ donc $A^m > 0$ si $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} > 0$, alors A est primitive

VI Le coefficient d'imprimitivité**VI.A - Diagonales des puissances d'une matrice imprimitive**

Je trouve que la phrase « la totalité du spectre de A est invariante dans la multiplication par $\omega = \exp(2i\pi/p)$ » est ambiguë. Pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, je note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ et j'interprète l'énoncé par :

$$\{(\omega\lambda, \mu_\lambda) / \lambda \in \text{Sp}(A)\} = \{(\lambda, \mu_\lambda) / \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

ce qui est plus fort que $\{\omega\lambda / \lambda \in \text{Sp}(A)\} = \text{Sp}(A)$. Je fais cela pour deux raisons :

-1) je ne sais pas faire avec cette dernière condition plus faible

-2) le terme « totalité » nous guide vers un sens plus fort.

Ainsi on a $\text{tr}(A^m) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \mu_\lambda \lambda^m = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \mu_\lambda (\omega \lambda)^m = \omega^m \text{tr}(A^m)$ or $\omega^m \neq 1$ car m non multiple de p

donc $0 = \text{tr}(A^m) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^{(m)}$ or $A^m \geq 0$ donc la diagonale de A^m est identiquement nulle.

Par conséquent par l'absurde si on avait $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r} A\right)^m = L$ avec $\text{rg } L = 1$ et $L^2 = L$

On aurait $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r} A\right)^{pm+1} = L$

donc les coefficients diagonaux de L seraient nuls (limites par coefficients)

comme $L^2 = L$, on a $\text{rg}(L) = \text{tr}(L) = 0$ donc $1 = 0$

Ainsi le résultat de la question **IV.B.3** ne tient plus si A est imprimitive

OU BIEN (j'ai un doute) *Je trouve cette question difficile à interpréter!*

Si on avait l'existence de $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r} A\right)^m = L$

Prenons x un vecteur propre de A pour la valeur propre ωr

On a pour $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{r} A\right)^{pk} x = x$ et $\left(\frac{1}{r} A\right)^{pk+1} x = \omega x$

donc si $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r} A\right)^m = L$ alors $Lx = x = \omega x$ donc $\omega = 1$ car $x \neq 0$ Absurde

VI.B - Une matrice de Weilandt « modifiée »

VI.B.1) Attention si $n = 2$, il y a un problème ! Pour $n = 2$, on a $Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $[Z_2^m]_{2,1} = 0$ car la matrice est triangulaire supérieure.

donc Z_2 n'est pas irréductible.

Je suppose désormais que $n \geq 3$

Le cycle $2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 2$ montre que pour tous $i, j \geq 2$ il existe un chemin dans Z_n de i à j

En concaténant avec le chemin $(n-1) \rightarrow 1$ (respectivement $1 \rightarrow 2$), cela permet de construire un chemin dans Z_n qui va de i à 1 (respectivement de 1 à j) *Valable car $n-1 \geq 2$*

De plus $Z_n \geq 0$ donc d'après **V.A.1**, la matrice Z_n est irréductible

VI.B.2) Je suppose encore que $n \geq 3$

On a $\chi Z_n = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}_{[n]}$. On effectue $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_n \leftarrow L_n + L_1$

$$\chi Z_n = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}_{[n]} = X \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ -2 & 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}_{[n-1]}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\chi_{Z_n} = X \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} X & -1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_{[n-2]} & -2(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ X & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & X & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X & -1 \end{vmatrix}_{[n-2]} \end{pmatrix}$$

ainsi $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } Z_n \text{ est } X(X^{n-1} - 2)}$

Si $n \geq 3$, alors Z_n admet $n - 1$ valeurs propres de modules $\rho(Z_n) = 2^{1/(n-1)}$

les valeurs propres de Z_n sont toutes de multiplicités 1 et $\text{Sp}(Z_n) = \{0\} \cup \left\{ 2^{1/(n-1)} \exp(k2i\pi/(n-1)) / k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket \right\}$

Par l'absurde si Z_n n'était pas imprimitive, comme Z_n est irréductible alors Z_n serait primitive

donc Z_n vérifierait la propriété admise de la partie **IV** donc Z_n aurait une valeur propre dominante ABSURDE

et donc Z_n est imprimitive car

Autre argument : (a priori on ne se sert pas de la partie **IV**)

D'après Cayley-Hamilton, $Z_n^n = 2Z_n$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p > 0$ tel que $Z_n^{(np)} = \alpha_p Z_n$

Par l'absurde, si Z_n était primitive

on pourrait trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q \geq m, Z_n^q > 0$

c'est absurde pour $n^p \geq m$

Vue que les valeurs propres à modules dominant sont les solutions de l'équation $\lambda^p = \rho^p$ (il y en a donc p)

On en déduit que $\boxed{Z_n \text{ est imprimitive de coefficient d'imprimitivité } n-1}$

VI.B.3) On a $Z_n^{n^2-2n+2} = Z_n^2 (Z_n^n)^{n-2} = Z_n^2 (2Z_n)^{n-2} = 2^{n-2} Z_n^n$

Ainsi $\boxed{Z_n^{n^2-2n+2} = 2^{n-1} Z_n}$

Par l'absurde si Z_n était primitive, on aurait $Z_n^{n^2-2n+2} > 0$ d'après **II.D** Absurde

ainsi $\boxed{Z_n \text{ n'est pas primitive}}$

VI.C - Coefficient d'imprimitivité et polynôme caractéristique

Coquille dans l'énoncé : $\chi_A(X) = X^n + c_{k_1} X^{n-k_1} + c_{k_2} X^{n-k_2} \dots + c_{k_s} X^{n-k_s}$

au lieu de $\chi_A(X) = X^n + c_{k_1} X^{n-k_1} + c_{k_1} X^{n-k_2} \dots + c_{k_s} X^{n-k_s}$

VI.C.1) J'utilise encore mon interprétation (forte) de l'invariance par $z \mapsto \omega z$, où $\omega = \exp(2i\pi/p)$

Le polynôme scindé unitaire de degré n : $\frac{1}{\omega^n} \chi_A(\omega X)$ a exactement les mêmes racines que $\chi_A(X)$ avec les mêmes multiplicités. donc $\chi_A(\omega X) = \omega^n \chi_A(X)$

Ainsi pour tout i , on a $\omega^{n-k_i} c_{k_i} = \omega^n c_{k_i}$ donc $\omega^{k_i} = 1$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \{k_1, k_2, \dots, k_s\}, \text{ l'entier } k \text{ est divisible par } p}$

VI.C.2) Je pense que $r = \rho(A)$; l'énoncé est encore reprochable ici

On a $\beta^{k_j} = 1$ car les k_j sont tous divisibles par qp et car $\beta = e^{2i\pi/(qp)}$

ainsi $\chi_A(\beta r) = (\beta r)^n + c_{k_1} (\beta r)^{n-k_1} + c_{k_2} (\beta r)^{n-k_2} \dots + c_{k_s} (\beta r)^{n-k_s} = \beta^n (r^n + c_{k_1} r^{n-k_1} + c_{k_2} r^{n-k_2} \dots + c_{k_s} r^{n-k_s})$

donc $\chi_A(\beta r) = \beta^n \chi_A(r) = 0$ car $r \in \text{Sp}(A)$ d'après la propriété admise pour les matrices irréductibles de **VI**

donc βr est une racine du polynôme χ_A en faisant un calcul analogue à la question précédente.

or $|\beta r| = r$ mais βr ne vérifie pas $(\beta r)^p = r^p$ car $q > 1$

ce qui est absurde avec la propriété admise pour les matrices irréductibles de **VI**

donc $\boxed{\text{pour tout } q \geq 2 \text{ l'un des } k_j \text{ n'est pas divisible par } pq}$

VI.D - Coefficient d'imprimitivité et longueur des circuits

VI.D.1)

$a_{i,j}^{(r)} > 0$, $a_{j,i}^{(s)} > 0$ et si k dans L_j nous fournit dans A les chemins $\mathcal{C}_1$ de i vers j , $\mathcal{C}_2$ de j vers i et $\mathcal{C}_3$ de j vers j de longueurs respectives : r, s et k

En concaténant $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2$, on obtient $r + k + s \in L_i$ donc d_i divise $r + k + s$

et d_i divise $r + s$ par concaténation de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

donc pour tout $k \in \{0\} \cup L_j$, d_i divise $r + k + s$

en remarquant que $k = (r + k + s) - (r + 0 + s) : d_i$ divise k donc leurs pgcd pour $k \in L_j : d_i$ divise d_j

VI.D.2) Avec **III.B.3**, si A est primitive on a m et $m + 1 \in L_1$ car $A^m > 0$ et $A^{m+1} > 0$

comme m et $m + 1$ sont premiers entre eux on a $d_1 = 1$

si $p = 1$, alors $d = 1$

VI.D.3) Soit $\ell \in L_1$.

On a donc $[A^\ell]_{1,1} > 0$.

donc par la contraposée de **VI.A**, p divise ℓ

donc p divise tous les éléments de L_1 donc leur pgcd ainsi p divise d

VI.D.4)

$$a) \text{ On a } \psi(\sigma) = \left(\prod_{j \notin H} [xI_n - A]_{j, \sigma(j)} \right) \left(\prod_{j \in H} [xI_n - A]_{j, \sigma(j)} \right) = \prod_{j \notin H} (x - [A]_{j,j}) \left(\prod_{j \in H} -[A]_{j, \sigma(j)} \right)$$

$$\text{ainsi } \psi(\sigma) = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j, \sigma(j)}.$$

b) On a $\psi(\sigma) \neq 0$ donc $\forall j \in H, a_{j, \sigma(j)} > 0$

ceci nous fournit les chemins dans A de longueur 1 : $j \rightarrow \sigma(j)$ pour tout $j \in H$

or $(j_1, j_2, \dots, j_m)$, avec $m \geq 2$, est un cycle entrant dans la décomposition σ en produit de cycles à supports disjoints

ainsi $j_m \rightarrow j_1$ et pour tout $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $j_i \rightarrow j_{i+1}$ sont des chemins dans A de longueur 1

car $\sigma(j_m) = j_1$ et pour tout $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $\sigma(j_i) = j_{i+1}$

donc $j_1 \rightarrow j_2 \cdots \rightarrow j_m \rightarrow j_1$ est un circuit dans la matrice A

donc $m \in L_{j_1}$ et ainsi m est un multiple de d

comme c'est vrai pour tout les cardinaux m , des supports disjoints des cycles dont la réunion est H

la somme de ces cardinaux est encore multiple de d alors h est multiple de d

c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_{i,i} / 1 \leq i \leq n\}$ de sorte que si un coefficients de $xI_n - A$ est nul, il s'agit d'un coefficient en dehors de la diagonale.

On note E est l'ensemble des permutations σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\psi(\sigma) \neq 0$ où $\psi(\sigma) = \prod_{j=1}^n [xI_n - A]_{j, \sigma(j)}$

On remarque : $[xI_n - A]_{j, \sigma(j)} = 0 \implies j \neq \sigma(j)$ et donc $[xI_n - A]_{j, \sigma(j)} = 0 \implies [A]_{j, \sigma(j)} = 0$

Cet ensemble E ne dépend pas de x même si $\psi(\sigma)$ dépend de x car x n'est pas sur la diagonale de A

On a donc $\chi_A(x) = \sum_{\sigma \in E} \psi(\sigma)$ où

donc d'après a) : $\chi_A(x) = \sum_{\sigma \in E} x^{n-h} (-1)^h \prod_{j \in H} a_{j, \sigma(j)}$ où h dépend de σ comme en a)

comme les h sont des multiples de d , $\chi_A(x)$ s'écrit : $\chi_A(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-d} + \alpha_2 x^{n-2d} + \dots + \alpha_k x^{n-kd} + \dots$

où les α_z sont éventuellement nuls

ceci étant valable sur l'ensemble infini $\mathbb{R} \setminus \{a_{i,i} / 1 \leq i \leq n\}$ (égalité de polynômes)

On peut conclure que $\chi_A(x)$ s'écrit : $\chi_A(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-d} + \alpha_2 x^{n-2d} + \dots + \alpha_k x^{n-kd} + \dots$

Par l'absurde on suppose que tous les α_z sont nuls, alors $\chi_A = X^n$ Absurde avec **V.A.5**

Prenons alors k tel que $\alpha_k \neq 0$, on a d'après **VI.C)** kd divise p

ainsi d est un diviseur de p On conclut que $p = d$

• • • FIN • • •