CORRECTION DE L'ÉPREUVE ENSAE 2003

Première partie

I.1. Si x ou y est nul, la réponse est immédiate.
On suppose donc $x > 0$ et $y > 0$ et on écrit $x = e^a$, $y = e^b$. $xy = e^{a+b}$, on pose $\alpha = pa$, $\beta = pb$ d'où

$$xy = \exp\left(\frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta\right) \leq \frac{1}{p}e^\alpha + \frac{1}{q}e^\beta$$

grâce à la convexité de l'exponentielle. On conclut en remarquant que $e^\alpha = x^p$, $e^\beta = y^q$.
Remarque : on a égalité dans cette inégalité ssi $x^p = y^q$.

I.2. Inégalité de Hölder. On note $A = \left(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^p\right)^{1/p}$. On suppose dans un premier temps que $A = B = 1$.
Comme $|a_n b_n| \leq \frac{1}{p}|a_n|^p + \frac{1}{q}|b_n|^q$ alors, en sommant sur n on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n b_n| &\leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité dans ce cas.
Dans le cas général on applique le résultat précédent à $a'_n = \dfrac{a_n}{A}$ et $b'_n = \dfrac{b_n}{B}$.

I.3. Si $B = 1$ (on conserve les notations de la question précédente) alors, en appliquant l'inégalité de la question **I.2** on obtient

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p} \tag{1}$$

Cas d'égalité :

- on suppose, comme à la question précédente, que $A = 1$. On a dit dans le **I.1** qu'il y avait égalité lorsque $x^p = y^q$ d'où l'idée de poser $b_n = \varepsilon_n |a_n|^{p/q}$ où ε_n est du signe de a_n. On obtient alors $a_n b_n = |a_n|^{1+p/q} = |a_n|^p$ ce qui donne égalité dans (1).
- Cas général : on pose $a'_n = \dfrac{a_n}{A}$ et on utilise ce que l'on vient de faire (on pose $b_n = \varepsilon_n |a'_n|^{p/q}$) d'où $\sum\limits_{n=1}^{N} a'_n b_n = 1$ ce qui donne

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p}$$

d'où $\sup\left\{\left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n\right|, \sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1\right\} = \left(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p}$.

I.4. Inégalité de Minkowski. Ici on pose $\|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p}$.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|.\underbrace{|a_n+b_n|^{p-1}}_{=b'_n} \leq \|a\|_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$\leq \|a\|_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{p}\right)^{1/q}.$$

On procède de même avec l'autre membre d'où, en additionnant

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^p \leq [\|a\|_p + \|b\|_q] \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{p}\right)^{1/q}.$$

On divise alors les deux membres par $\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^p\right)^{1/q}$ (que l'on suppose non nul, le cas de nullité étant trivial) pour obtenir l'inégalité de Minkowski : $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$.

I.5. **a.** On a vu à la question précédente l'inégalité triangulaire. On vérifie facilement que $\|a\|_p = 0 \Leftrightarrow a = 0$ puis $\|\lambda a\|_p = |\lambda|.\|a\|_p$.
Montrons maintenant que $\theta\ : b \in \ell^q_N \mapsto \theta(b) \in (\ell^p_N)^*$ est une isométrie.
En renversant les rôles de p et q au **I.3** on a

$$\|\theta(b)\| = \sup_{\|a\|_p=1} |\theta(b)(a)| = \|b\|_q$$

ce qui signifie bien que θ est une isométrie.

b. On prend toujours θ et $b \in \ell^\infty_N$. Avec $b_n = \varepsilon_n$ où ε_n est du signe de a_n on a $\theta(b)(a) = \|a\|_1$, on en déduit que

$$\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right|, \|b\|_\infty = 1\right\} = \|a\|_1$$

et par conséquent que θ est une isométrie de ℓ^∞_N sur $(\ell^1_N)^*$.
On prend ensuite θ et $b \in \ell^1_N$. Avec $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq i \\ \varepsilon_i & \text{si } n = i \end{cases}$ où i est l'indice tel que $|a_i| = \max |a_j|$ et ε_i est le signe de a_i. On a $\theta(b)(a) = \|a\|_\infty$, on en déduit que

$$\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right|, \|b\|_1 = 1\right\} = \|a\|_\infty$$

et par conséquent que θ est une isométrie de ℓ^1_N sur $(\ell^\infty_N)^*$.

Deuxième partie

II.1. **a.** Soient u et v deux vecteurs de F alors

$$f(u) + f(v) = f(u+v) \leq |||f|||.\|u+v\| \leq |||f|||(\|u - x_0\| + \|x_0 + v\|)$$

d'où

$$\underbrace{f(u) - |||f|||.\|u - x_0\|}_{\text{minorant sur } v} \leq \underbrace{|||f|||.\|v + x_0\| - f(v)}_{\text{majorant sur } u}$$

d'où l'inégalité en prenant la borne supérieure à gauche, la borne inférieure à droite.

b. On prend alors α dans l'intervalle (non vide) entre le sup et l'inf d'où, pour tout vecteur v de F :

$$f(v) - |||f|||.\|v - x_0\| \leq \alpha \leq |||f|||.\|v + x_0\| - f(v).$$

c. $\tilde{f}$ est bien une forme linéaire (continue car on est en dimension finie).
Soit $x = v + tx_0$, on suppose $t \neq 0$ en appliquant l'inégalité précédente on a

$$f(v/t + x_0) = f(v/t) + \alpha \leq |||f|||.\|v/t + x_0\|$$
$$f(-v/t - x_0) = f(-v/t) - \alpha \leq |||f|||.\| - v/t - x_0\|$$

d'où, en combinant ces 2 inégalités : $|f(v/t + x_0)| \leq |||f|||.\|v/t + x_0\|$ et finalement

$$|f(v + tx_0)| = |t|.|f(v/t + x_0)| \leq |t|.|||f|||.\|v/t + x_0\| = |||f|||.\|v + tx_0\|$$

relation encore valable si $t = 0$.
On obtient dans un premier temps $|||\tilde{f}||| \leq |||f|||$ puis, comme $\tilde{f}_{|F} = f$ on en déduit finalement que $|||\tilde{f}||| = |||f|||$.

II.2. Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de vecteurs telle que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(x_0, x_1, \ldots, x_p)$.
On pose $F_i = F \oplus \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_i)$.
Par récurrence on construit des formes linéaires f_i définies sur F_i telles que $f_{i|F} = f$ et $|||f_i||| = |||f|||$. On pose alors $g = f_p$ qui répond à la question.

II.3. Si $|||f||| = 1$ alors $|f(x)| \leq |||f|||.\|x\| \leq \|x\|$ donc

$$\sup\{|f(x)|,\ |||f||| = 1\} \leq \|x\|.$$

- Si $x = 0$ l'égalité dans l'inégalité ci-dessus est évidente.
- Si $x \neq 0$ on définit f sur $F = \mathrm{Vect}(x)$ par $f(x) = \|x\|$ et on prolonge f à E grâce à la question **II.2**. On obtient $g \in E^*$ telle que $|||g||| = 1$ avec $g(x) = \|x\|$ ce qui donne l'égalité là aussi.

Troisième partie

On pose dans toute cette partie $\rho(E,F) = \inf\{|||u|||.|||u^{-1}|||,\ u \in \mathrm{GL}(E,F)\}$ et, grâce à la continuité du logarithme, on remarque que $\mathrm{d}(E,F) = \ln(\rho(E,F))$.

III.1. **a.** Pour tout x de F on a

$$\|x\| = \|u \circ u^{-1}x)\| \leq |||u|||.|||u^{-1}|||.\|x\|$$

d'où, en simplifiant par $\|x\| \neq 0$, $1 \leq |||u|||.|||u^{-1}|||$ et par conséquent $\rho(E,F) \geq 1$ soit $\mathrm{d}(E,F) \geq 0$.

b. On a l'équivalence $u \in \mathrm{GL}(E,F) \Leftrightarrow u^{-1} \in \mathrm{GL}(F,E)$ donc $\mathrm{d}(E,F) = \mathrm{d}(F,E)$.

III.2. **a.** Si $u \in \mathrm{GL}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $v = \lambda u \in \mathrm{GL}(E,F)$ et $v^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}u^{-1}$ par conséquent $|||u|||.|||u^{-1}||| = |||v|||.|||v^{-1}|||$ on peut ainsi redéfinir $\mathrm{d}(E,F)$ par

$$\mathrm{d}(E,F) = \inf\{\ln(|||u^{-1}|||,\ u \in \mathrm{GL}(E,F),\ |||u||| = 1\}.$$

Par caractérisation de la borne inférieure on sait qu'il existe une suite (u_n) d'applications de $\mathrm{GL}(E,F)$, de norme 1, telle que $|||u_n^{-1}||| \to \rho(E,F)$. Comme la sphère unité $S(0,1)$ en dimension finie est compacte on peut en extraire une suite convergente dans $S(0,1)$ que l'on note encore (u_n). Soit u la limite de cette suite.
De même la suite $(|||u_n^{-1}|||)$ de $\mathbb{R}_+^*$ ayant une limite non nulle se situe dans un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ donc la suite (u_n^{-1}) est dans un compact (fermé borné), là encore on peut extraire de la suite (u_n^{-1}) une suite convergeant vers v. Par continuité de la loi de composition on a $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, on a bien $u \in \mathrm{GL}(E,F)$, $|||u||| = 1$ et $|||u^{-1}||| = \rho(E,F)$, la borne inférieure est bien atteinte.

b.
- Si E et F sont isométriques alors il existe $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que, pour tout x de E, $\|u(x)\| = \|x\|$ donc, pour tout y de F, $\|u^{-1}(y)\| = \|y\|$ ce qui se traduit par $|||u||| = |||u^{-1}||| = 1$ puis $\mathrm{d}(E,F) \leq 0$ soit finalement $\mathrm{d}(E,F) = 0$.
- Si $\mathrm{d}(E,F) = 0$ alors il existe u dans $\mathrm{GL}(E,F)$ tel que $|||u||| = |||u^{-1}||| = 1$ (en appliquant le résultat du a). On a alors

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|x\| \text{ et } \forall y \in F,\ \|u^{-1}(y)\| \leq \|y\|$$

et, pour $y = u(x)$ on obtient $\|x\| \leq \|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x soit $\|u(x)\| = \|x\|$ et par conséquent u est une isométrie.

III.3. Si $u \in \mathrm{GL}(E,F)$, $v \in \mathrm{GL}(F,G)$ alors $w = v \circ u \in \mathrm{GL}(E,G)$ et comme $|||w||| \leq |||v|||.|||u|||$ et $|||w^{-1}||| \leq |||v^{-1}|||.|||u^{-1}|||$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(E,G) &\leq \ln(|||w|||.|||w^{-1}|||)\\ &\leq \ln(|||u|||.|||u^{-1}|||) + \ln(|||v|||.|||v^{-1}|||)\end{aligned}$$

et ceci pour tout $u \in \mathrm{GL}(E,F)$, pour tout $v \in \mathrm{GL}(F,G)$. Par un passage aux bornes inférieures on arrive à

$$\mathrm{d}(E,G) \leq \mathrm{d}(E,F) + \mathrm{d}(F,G).$$

III.4. a.
- $u^* \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$ par composition des applications linéaires.
- Pour tout y de F on a $|u^*(\zeta)(y)| \leq |||\zeta|||.|||u|||.\|x\|$ donc $|||u^*(\zeta)||| \leq |||\zeta|||.|||u|||$ pour tout ζ et par conséquent $|||u^*||| \leq |||u|||$.
- Grâce au **II.3** on a

$$\|u(x)\| = \sup\{|(\zeta \circ u)(x)|,\ |||\zeta||| = 1\}$$

et comme $\{\zeta \in F^*,\ |||\zeta||| = 1\}$ est compact, on sait que cette borne supérieure est atteinte donc il existe $\zeta_0 \in F^*$ tel que $|||\zeta_0||| = 1$ et

$$\|u(x)\| = |(\zeta_0 \circ u)(x)| = |u^*(\zeta_0)(x)| \leq |||u^*|||.|||\zeta_0|||.\|x\|$$

i.e. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq |||u^*|||.\|x\|$ donc $|||u||| \leq |||u^*|||$.

Conclusion : on a l'égalité $|||u||| = |||u^*|||$.

b. Vu la **2.a** il existe u dans $\mathrm{GL}(E,F)$ tel que $|||u||| = 1$ et $|||u^{-1}||| = \rho(E,F)$. Or $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

En effet $(u^{-1})^*(\xi) = \xi \circ u^{-1}$ et $u^*[(u^*)^{-1}(\xi)] = \xi = (u^*)^{-1}(\xi) \circ u$ donc

$$(u^*)^{-1}(\xi) = \xi \circ u^{-1} = (u^{-1})^*(\xi).$$

On a ainsi $\mathrm{d}(F^*,E^*) \leq \ln(|||u^*|||.|||(u^*)^{-1}|||) \leq \mathrm{d}(E,F)$.

De même il existe u^* dans $\mathrm{GL}(F^*,E^*)$ tel que $|||u^*||| = 1$ et

$$\mathrm{d}(F^*,E^*) = |||(u^*)^{-1}||| = |||(u^{-1})^*||| = |||u^{-1}||| \geq \mathrm{d}(E,F).$$

Conclusion : $\mathrm{d}(E^*,F^*) = \mathrm{d}(F^*,E^*) = \mathrm{d}(E,F)$.

Quatrième partie

IV.1. On procède par récurrence sur m :
- $m = 1$: $\dfrac{1}{2}\left(\|x_1\|^2 + \|-x_1\|^2\right) = \|x_1\|^2$.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre m. On remarque que que, si $\varphi \in \omega_{m+1}$ alors $\psi = \varphi_{|[\![1,m]\!]} \in \omega_m$ et que, si on connaît $\psi \in \omega_m$ alors $\varphi(m+1)$ ne peut prendre que

les 2 valeurs ± 1.
On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\varphi\in\omega_{m+1}}\left\|\sum_{i=1}^{m+1}\varphi(i)x_i\right\|_2^2 &= \sum_{\psi\in\omega_m}\left(\left\|\sum_{i=1}^{m}\psi(i)x_i + x_{m+1}\right\|_2^2 + \left\|\sum_{i=1}^{m}\psi(i)x_i - x_{m+1}\right\|_2^2\right)\\ &= 2\sum_{\psi\in\omega_m}\left(\left\|\sum_{i=1}^{m}\psi(i)x_i\right\|_2^2 + \|x_{m+1}\|_2^2\right)\end{aligned}$$

d'où la propriété en divisant par 2^{m+1} et en utilisant l'hypothèse de récurrence.

IV.2. **a.** Grâce au 1 on a

$$A(u) = 2^n\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|_2^2 \le n2^n|||u|||^2$$

car $\|u(e_i)\|_2 \le |||u|||$.

b. On a $\displaystyle\sum_{\varphi\in\omega_m}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)e_i\right\|_p^2 = 2^n n^{2/p}$ car $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)e_i\right\|_p = n^{1/p}$. Or

$$\left\|u^{-1}\left(u\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)e_i\right)\right)\right\|_p^2 \le |||u^{-1}|||.\left\|u\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)e_i\right)\right\|_2^2$$

d'où

$$2^n n^{2/p} = \sum_{\varphi\in\omega_m}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)e_i\right\|_p^2 \le |||u^{-1}|||^2 A(u)$$

ce qui donne l'inégalité demandée en divisant par $|||u^{-1}|||^2$.

IV.3.
- Si $p < 2$ on utilise la question **2** :
$|||u|||.|||u^{-1}||| \ge n^{1/p-1/2}$ d'où $\ln(|||u|||.|||u^{-1}|||) \ge \left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right)\ln n$ par conséquent

$$\mathrm{d}(\ell_n^2,\ell_n^p) \ge \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\ln n.$$

- Si $p > 2$ on sait que ℓ_n^2 et $(\ell_n^2)^*$ sont isométriques (**I.5.a**) et si $p > 2$ alors $q < 2$ ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{d}((\ell_n^2)^*,(\ell_n^p)^*) &= \mathrm{d}(\ell_n^2,\ell_n^p)\\ &= \mathrm{d}(\ell_n^2,\ell_n^q) \ge \underbrace{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)\ln n}_{=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\ln n}\end{aligned}$$

IV.4. **a.** On se ramène par homothétie au cas où $\|x\|_p = 1$ (le cas $\|x\|_p = 0$ étant immédiat).
On a $|x_i| \le 1$ d'où $|x_i|^{p'} \le |x_i|^p$ soit

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{p'} \le \sum_{i=1}^{n}|x_i|^p = 1$$
$$\|x\|_{p'} \le 1 = \|x\|_p$$

b. • Si $p < 2$ on a $\|x\|_2 \leq \|x\|_p$ vu le a. On applique alors l'inégalité de Jensen avec $f(t) = t^{2/p}$ et $t_i = |x_i|^p$ d'où

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{2/p} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

ce qui donne $\|x\|_p \leq \|x\|_2 n^{1/p-1/2}$.
Soit Id l'identité de ℓ_n^p sur ℓ_n^2 alors l'inégalité $\|x\|_2 \leq \|x\|_p$ donne $|||\,\mathrm{Id}\,||| \leq 1$, de même $\|x\|_p \leq \|x\|_2 n^{1/p-1/2}$ donne $|||\,\mathrm{Id}^{-1}\,||| \leq n^{1/p-1/2}$.
On arrive à $\rho(\ell_n^2, \ell_n^p) \leq n^{1/p-1/2}$ soit $\mathrm{d}(\ell_n^2, \ell_n^p) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\ln n$.
Finalement, avec la question **3** on peut conclure $\mathrm{d}(\ell_n^2, \ell_n^p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\ln n$.

• Si $p > 2$ alors $q < 2$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\ell_n^2, \ell_n^p) &= \mathrm{d}((\ell_n^2)^*, (\ell_n^p)^*) = \mathrm{d}(\ell_n^2, \ell_n^q)\\ &= \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\ln n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\ln n\end{aligned}$$

En conclusion on a le résultat final : $\mathrm{d}(\ell_n^2, \ell_n^p) = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|\ln n$.

c. Comme $(\ell_n^\infty)^*$ est isométrique à ℓ_n^1 alors

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\ell_n^\infty, \ell_n^2) &= \mathrm{d}((\ell_n^\infty)^*, (\ell_n^2)^*)\\ &= \mathrm{d}(\ell_n^1, \ell_n^2)\\ &= \frac{1}{2}\ln n\end{aligned}$$

Cinquième partie

V.1. S_E^n est un compact de E^n donc Λ est bornée sur S_E^n et atteint sa borne supérieure. Soit $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ un point de S_E^n où Λ est maximale, ce maximum est nécessairement non nul et > 0. C'est aussi le maximum en valeur absolue (à cause de la symétrie de S_E^n et des propriétés du déterminant).
Si $x \in S_E$ alors $|\Lambda(b_1, \ldots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \ldots, b_n)| \leq \Lambda(b_1, \ldots, b_n)$. On pose alors

$$\varphi_i(x) = \frac{\Lambda(b_1, \ldots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \ldots, b_n)}{\Lambda(b_1, \ldots, b_n)}$$

Pour $\|x\| = 1$ on a par construction $|\varphi_i(x)| \leq 1$ donc $|||\varphi_i||| \leq 1$ et comme $\varphi_i(b_i) = 1$ on en déduit que $|||\varphi_i||| = 1$.

V.2. • $\nu(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$ et comme les $(\varphi_i(x))$ représentent les coordonnées de x dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$ on en déduit que $x = 0$.
• $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$: immédiat.
• $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ est aussi immédiat.

Soit $u\ : x = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)b_i \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in \ell_n^1$ alors $\|u(x)\|_1 = \nu(x)$ donc u est une isométrie et E_1 et ℓ_n^1 sont isométriques.

V.3. Si $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i$ alors

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)|. \underbrace{\|b_i\|}_{=1} \leq \nu(x)$$

et $\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)| \leq n\|x\|$ ce qui donne $|||\,\mathrm{Id}\,|||.|||\,\mathrm{Id}^{-1}\,||| \leq n$ (où Id est l'application identique de E_1 dans E).
Conclusion : $\mathrm{d}(E, E_1) \leq \ln n$ et comme E_1 et ℓ_n^1 sont isométrique alors $\mathrm{d}(E, \ell_n^1) \leq \ln n$.

Sixième partie

VI.1.
- $\mathcal{R}$: réflexive (X est isométrique à X).
- $\mathcal{R}$: symétrique (si u est une isométrie de X sur Y alors u^{-1} est une isométrie de Y sur X).
- $\mathcal{R}$: transitive (si u est une isométrie de X sur Y, v une isométrie de Y sur Z alors $v \circ u$ est une isométrie de X sur Z).

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Cohérence de la notation : si X_1 et X_2 sont dans $\widehat{X}$ et Y dans $\widehat{Y}$ alors

$$\mathrm{d}(X_1, Y) \leq \underbrace{\mathrm{d}(X_1, X_2)}_{=0} + \mathrm{d}(X_2, Y)$$

et par symétrie $\mathrm{d}(X_2, Y) \leq \mathrm{d}(X_1, Y)$ d'où $\mathrm{d}(X_1, Y) = \mathrm{d}(X_2, Y)$.
De même, si Y_1 et Y_2 sont dans $\widehat{Y}$ alors $\mathrm{d}(X_1, Y_1) = \mathrm{d}(X_2, Y_2)$ i.e. $\widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \mathrm{d}(X, Y)$ ne dépend pas des représentants choisis.

VI.2. **a.** Φ_n bornée : $\|x\| \leq \|x\|_1 \leq 1$ sur B_1 donc $\sup\{\|x\|,\ X \in B_1\} \leq 1$.
Φ_n fermée : on sait que la convergence uniforme entraîne la convergence simple.
Si $(\nu_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de $(\Phi_n)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\nu \in \mathcal{C}(B_1)$ alors

$$\forall x \in B_1, \begin{cases} \nu_p(x) \leq \|x\|_1 & \Rightarrow \nu(x) \leq \|x\|_1 \\ \|x\|_1 \leq n\nu_p(x) & \Rightarrow \|x\|_1 \leq n\nu(x) \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$ on pose $N_p(x) = \|x\|_1 \nu_p\left(\dfrac{x}{\|x\|_1}\right)$ et $N(x) = \|x\|_1 \nu\left(\dfrac{x}{\|x\|_1}\right)$ puis on définit $N_p(0) = N(0) = 0$. N_p est la norme associée à ν_p. On vérifie immédiatement que $\forall x \in \ell_n^1,\ \lim\limits_{p\to+\infty} N_p(x) = N(x)$. Montrons que N est une norme :

- Comme $\nu(x) \geq \dfrac{1}{n}\|x\|_1$ on a $N(x) \geq \dfrac{1}{n}\|x\|_1$ pour tout x de ℓ_n^1. Si $N(x) = 0$ alors $x = 0$.
- $N_p(\lambda x) = |\lambda| N_p(x)$ donne, par passage à la limite sur p, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- $N_p(x + y) \leq N_p(x) + N_p(y)$ donne, là aussi par passage à la limite sur p, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Conclusion : ν est bien la restriction à B_1 d'une norme.

b. Comme f est la restriction d'une norme ν alors $|f(x) - f(y)| \leq \nu(x - y) \leq \|x - y\|_1$, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

VI.3. **a.**
- τ est bien définie : $\|.\|$ est déterminée sans ambiguïté par f. En effet si $x \in E$ est un vecteur non nul alors $\|x\| = \|x\|_1 f\left(\dfrac{x}{\|x\|_1}\right)$.

- τ est surjective : si on se donne $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ alors f est la restriction de $\|.\|$ à la boule unité fermée ce qui permet de trouver un antécédent à la classe de $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$.

b. Montrons tout d'abord que :

(i) $\exists a > 0$ tel que $\inf\limits_{y \in B_1} f(y) = a > 0$,

(ii) $\exists b > 0$ tel que $\inf\limits_{j \in \mathbb{N}} \inf\limits_{y \in B_1} f_j(y) = b > 0$.

(i) f est continue sur le compact B_1 donc f atteint sa borne inférieure $a > 0$.

(ii) $f_j \to f$ donc, pour $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, $\exists J \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in B_1$, $|f_j(x) - f(x)| \leq a/2$ donc $f_j(x) \geq a/2$ et $\inf\limits_{x \in B_1} f_j(x) = b_j \geq a/2$ ce qui donne $\inf\limits_{j \geq J} b_j \geq a/2$. Soit $\beta = \inf\limits_{j < J} b_j$ alors $\inf\limits_{j \in \mathbb{N}} (\inf\limits_{x \in B_1} f_j(x)) = b \geq \min(a/2, \beta) > 0$.

On pose ensuite $E = (\mathbb{R}^n, \|.\|)$, $E_j = (\mathbb{R}^n, \nu_j)$ (où ν_j est la norme associée à f_j). On a

$$|||\,\mathrm{Id}_{E,E_j}\,||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\nu_j(x)}{\|x\|} = \sup_{x \in B_1} \frac{f_j(x)}{f(x)} = \frac{f_j(x_j)}{f(x)}$$

car la borne supérieure est atteinte sur le compact B_1. De même $|||\,\mathrm{Id}_{E_j,E}\,||| = \dfrac{f(y_j)}{f_j(y_j)}$.

Traduisons maintenant le fait que $f_j \to f$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J \in \mathbb{N} \mid \forall j \geq J,\ \forall x \in B_1,\ |f_j(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon \min(a, b)}{2}$$

alors

$$\left| \frac{f_j(x_j)}{f(x_j)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon \min(a, b)}{2 f(x_j)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left| \frac{f(y_j)}{f_j(y_j)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon \min(a, b)}{2 f_j(y_j)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On a ainsi $|||\,\mathrm{Id}_{E,E_j}\,||| \leq 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|||\,\mathrm{Id}_{E_j,E}\,||| \leq 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ soit

$$\mathrm{d}(E, E_j) \leq 2 \ln(1 + \varepsilon/2) \leq \varepsilon$$

(car $\ln(1 + x) \leq x$) et comme $\widehat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) = \mathrm{d}(E, E_j)$ on a bien prouvé que $\widehat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) \to 0$.

VI.4. Vu le **3.b** τ est une application continue donc $\widehat{\mathcal{E}_n} = \tau(\Phi_n)$ est un compact (image continue d'un compact). On vérifie finalement que $\widehat{d}$ est une distance.