

Epreuve : Mathématiques II

Corrigé

Partie I

IA1) * $N_\infty(A) = 0 \implies \forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$. D'où $\forall i \in [1, n], \forall j \in [1, n] : |a_{i,j}| = 0$ et donc $A = 0$.

* $\forall \lambda \in \mathbf{C} \ \forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| \leq |\lambda| N_\infty(A)$, donc $N_\infty(\lambda A) \leq |\lambda| N_\infty(A)$

Si $\lambda \neq 0$, $N_\infty(A) = N_\infty\left(\frac{1}{\lambda} \lambda A\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| N_\infty(\lambda A)$, donc $|\lambda| N_\infty(A) \leq N_\infty(\lambda A)$, d'où l'égalité : $|\lambda| N_\infty(A) = N_\infty(\lambda A)$

Si $\lambda = 0$, l'égalité est triviale.

* $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$, donc $N_\infty(A + B) \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$.

Conclusion: N_∞ est une norme sur $M_n(\mathbf{C})$

$$\text{IA2a)} \quad A(z) = \left(\sum_{j=1}^n |a_{1,j} z_j|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{n,j} z_j| \right)$$

Donc pour tout $i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |a_{i,j} z_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \|z\|_\infty \leq N_\infty(A) \|z\|_\infty$.

D'où $\|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A) \|z\|_\infty$.

IA2b) $\forall z \in \mathbf{C}^n - \{0\}, \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A)$ donc $N_\infty(A)$ majore l'ensemble des réels $\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$. Soit $i_0 \in [1, n]$ tel

que $N_\infty(A) = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ et soit $z_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ tel que $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $\varepsilon_j = \frac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}}$ sinon. On a alors

$$N_\infty(A) = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \varepsilon_j, \quad A(z_0) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} \varepsilon_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{n,j} \varepsilon_j \right) \text{ et donc } \|A(z_0)\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|.$$

Comme $\|z_0\|_\infty = \max(1, \dots, 1) = 1$, on a donc : $\frac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = N_\infty(A)$

Conclusion: $N_\infty(A) = \max \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$

IA2c) Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre tel que $A(z_0) = \lambda_0 z_0$, on a alors

$$\frac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = \frac{\|\lambda_0 z_0\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = |\lambda_0| = \rho(A) \leq N_\infty(A).$$

Conclusion: $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.

IA3) N_∞ est une norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{C}^n , c'est donc une norme d'algèbre et vérifie donc :

$$N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B).$$

Remarque: On peut aussi redémontrer ceci : pour tout z non nul, $\frac{\|AB(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq \frac{N_\infty(A) \|B(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A) N_\infty(B)$ et on retrouve $N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B)$.

IA4a) * $N_Q(A) = 0$ implique $Q^{-1}AQ = 0$ ce qui implique que $A = Q0Q^{-1} = 0$

$$* N_Q(\lambda A) = N_\infty(Q^{-1} \lambda A Q) = |\lambda| N_Q(A)$$

$$* N_Q(A+B) = N_\infty(Q^{-1}(A+B)Q) = N_\infty(Q^{-1}AQ + Q^{-1}BQ) \leq N_\infty(Q^{-1}AQ) + N_\infty(Q^{-1}BQ) = N_Q(A) + N_Q(B).$$

On en déduit que N_Q est une norme.

$$\text{Enfin } N_Q(AB) = N_\infty(Q^{-1}(AB)Q) = N_\infty(Q^{-1}AQ Q^{-1}BQ) \leq N_\infty(Q^{-1}AQ) N_\infty(Q^{-1}BQ) = N_Q(A) N_Q(B)$$

Conclusion: N_Q est une norme matricielle.

IA4b) Toutes les normes sur $M_n(\mathbf{C})$ sont équivalentes donc il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $N_\infty \leq \alpha N_Q$ et $N_Q \leq \beta N_\infty$, donc pour tout A , $\frac{1}{\alpha} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A)$.

Si $\beta \leq \alpha$, on a $\frac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A) \leq \alpha N_\infty(A)$ et $C_Q = \alpha$ convient.

Sinon on a $\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\alpha}$ et donc $\frac{1}{\beta}N_\infty(A) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A)$ et $C_Q = \beta$ convient.

$$\text{IB) On a facilement } D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & t_{1,3}s^2 & \cdots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n}s^2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

D'où $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \max_i(|t_{i,i}| + P_i(|s|))$ où $P_i = \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}|s^{j-i}$ est un polynôme de degré au plus

$n-1$ qui vérifie $P_i(0) = 0$. On en déduit qu'il existe s_0 tel que pour tout $i \in [1, n]$, $|P_i(s_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout $i \in [1, n]$, $|t_{i,i}| + P_i(|s_0|) \leq \rho(T) + \frac{\varepsilon}{2}$, car les valeurs propres de T sont les $t_{i,i}$ d'où on conclut :

$$\text{Conclusion: } N_{D_S}(T) \leq \rho(T) + \frac{\varepsilon}{2} < \rho(T) + \varepsilon$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est trigonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé) donc il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible Q tel que $A = QTQ^{-1}$. D'autre part il existe $s \in \mathbb{C}^n$ tel que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$. Or $\rho(T) = \rho(A)$ et $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = N_\infty(D_S^{-1}Q^{-1}AQD_S) = N_{QD_S}(A)$. Posons donc $N_\varepsilon = N_{QD_S}$, on a alors $N_\varepsilon(A) = N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$

$$\text{Conclusion: } N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon$$

IC) \implies Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre tel que $A(z_0) = \lambda_0 z_0$, on a alors pour tout entier k : $\|A^k(z_0)\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. D'où $\|\lambda_0^k z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$ et donc $|\lambda_0|^k \|z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. On en déduit alors $0 \leq |\lambda_0|^k \leq N_\infty(A^k)$. Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} N_\infty(A^k) = 0$ et par théorème d'encadrement on obtient : $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_0|^k = 0$ ce qui n'est possible que Si $|\lambda_0| < 1$, donc que $\rho(A) < 1$.

\iff Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1 - \rho(A)}{2}$). Posons enfin $q = \rho(A) + \varepsilon$, on a donc $0 < q < 1$. D'après le IB), on a $0 \leq N_\varepsilon(A^k) \leq N_\varepsilon(A)^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k = q^k$. On conclut alors par théorème d'encadrement que $\lim_{k \rightarrow \infty} N_\varepsilon(A^k) = 0$

$$\text{Conclusion: } \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$$

Partie II

IIA1) On a $G_L(A) = D(4 + 3i, 4) \cup D(-1 + i, 1) \cup D(5 + 6i, \sqrt{2} + 3) \cup D(-5 - 5i, 5)$ et

$$G_C(A) = D(4 + 3i, 2 + \sqrt{2}) \cup D(-1 + i, 4) \cup D(5 + 6i, 4) \cup D(-5 - 5i, 3)$$

IIA2a) $Z = (z_1, \dots, z_n)$ et on a les relations pour tout $i \in [1, n] : \sum_{j=1}^n m_{i,j}z_j = 0$, donc $m_{i,i}z_i = -\sum_{j=1, j \neq i}^n m_{i,j}z_j$,

d'où : $|m_{i,i}|z_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{i,j}| \|Z\|_\infty = L_i \|Z\|_\infty$.

On choisit i , un indice pour lequel $\|Z\|_\infty = |z_p| \neq 0$, on a donc :

$$|m_{p,p}| \|Z\|_\infty \leq L_p \|Z\|_\infty. \text{ D'où : } |m_{p,p}| \leq L_p$$

IIA2b) Soit $\lambda \in \sigma_A$, $M = A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc le système $(A - \lambda I_n)Z = 0$ admet une solution non nulle d'où il existe $p \in [1, n]$ tel que $|m_{p,p}| \leq L_p(M)$ (avec $L_p(M)$: la somme définie au début de II avec une matrice M). Comme $m_{p,p} = a_{p,p} - \lambda$ et que $L_p(M) = \sum_{j=1, j \neq p}^n |m_{i,j}| = \sum_{j=1, j \neq p}^n (|a_{i,j} - 0|) = L_p(A) = L_p$, on a donc

$$|a_{p,p} - \lambda| \leq L_p \text{ ce qui veut dire } \lambda \in D_p(A) \subset G_L(A)$$

$$\text{Conclusion: } \sigma_A \subset G_L(A)$$

IIA2c) λ est valeur propre de A SSI λ est valeur propre de ${}^t A$, donc $\sigma_A = \sigma_{{}^t A}$. D'autre part les sommes L_i de A correspondent exactement aux sommes C_i de ${}^t A$ et les sommes C_i de A correspondent exactement aux sommes L_i de ${}^t A$. On en déduit $\sigma_A = \sigma_{{}^t A} \subset G_L({}^t A) = G_C(A)$, on conclut avec le IIA2b) :

$$\text{Conclusion: } \sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)$$

IIA3a) On a montré au IIA2a) et b) que si μ est valeur propre de A , x un vecteur propre associé et si $|x_k| = \|x\|_\infty$ alors $|a_{k,k} - \mu| \leq L_k$, comme μ est sur le bord de $G_L(A)$, on a pour tout i et donc pour k : $|a_{k,k} - \mu| \geq L_k$. On en déduit que $|a_{k,k} - \mu| = L_k$ ce qui veut dire que : $\mu \in C_k(A)$.

IIA3b) De $Ax = \mu x$ on égalise les k -ièmes coordonnées (avec les notations du IIA3a)) : $\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = \mu x_k$, donc

$$(\mu - a_{k,k})x_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} x_j, \text{ donc } |\mu - a_{k,k}| |x_k| = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} |x_j|, \text{ or } |\mu - a_{k,k}| = L_k \text{ (d'après le IIA3a)), donc}$$

$$L_k |x_k| = \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| |x_k| \leq \left| \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| |x_j|, \text{ on en déduit donc que}$$

$\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| (|x_j| - |x_k|) \leq 0$. Or pour tout i, j , on a $a_{i,j} \neq 0$, donc $|a_{i,j}| > 0$ et d'autre part, $|x_j| - |x_k| \leq 0$ pour tout j . On doit donc avoir $|x_j| - |x_k| = 0$ pour tout j . Donc $|x_j| = \|x\|_\infty$ et grâce au IIA3a), on obtient $\mu \in C_j(A)$ pour tout j .

$$\text{Conclusion: } \mu \in \bigcap_{j=1}^n C_j(A)$$

IIA4) Comme le précise l'énoncé, on notera $D = D_p$ (la matrice).

$$\text{On trouve alors } D^{-1}AD = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{p_2}{p_1}a_{1,2} & \frac{p_3}{p_1}a_{1,3} & \cdots & \frac{p_n}{p_1}a_{1,n} \\ \frac{p_1}{p_2}a_{2,1} & a_{2,2} & \frac{p_3}{p_2}a_{2,3} & \cdots & \frac{p_n}{p_2}a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{p_1}{p_n}a_{n,1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n,2} & \cdots & \frac{p_{n-1}}{p_n}a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $i \in [1, n]$, $L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i}$ et donc

$$D_i(D^{-1}AD) = \left\{ z \in \mathbf{C} , |z - a_{i,i}| \leq L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i} \right\} \text{ et } G_L(D^{-1}AD) = \bigcup_{i=1}^n D_i(D^{-1}AD).$$

IIA5a) Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$, λ_0 est valeur propre de A donc λ_0 est aussi valeur propre de $D_p^{-1}AD_p$ (même polynôme caractéristique) et donc d'après IIA2) il existe i tel que $|\lambda_0 - a_{i,i}| \leq L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i}$, donc

$$|\lambda_0| \leq |a_{i,i}| + L_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i} = \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}|, \text{ donc } \rho(A) = |\lambda_0| \leq \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}| \leq \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}| \text{ et ceci pour}$$

tout $p > 0$, donc $\rho(A)$ est un minorant des $\max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}|$, $p > 0$. Par définition de la borne inf on conclut :

$$\text{Conclusion: } \rho(A) \leq \inf_{p>0} \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}|$$

IIA5bi) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ de la question précédente est supérieur ou égal à 83/3 revient à montrer que pour tout $p > 0$, $\max_{i=1,\dots,3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}|$ est supérieur ou égal à 83/3.

Supposons le contraire alors pour $i = 1, 2, 3$, on aurait $\frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| < \frac{83}{3}$ d'où en sommant les 3 :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| < 3 \frac{83}{3} = 83.$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^3 \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| = 19 + 16 \frac{p_1}{p_2} + 16 \frac{p_2}{p_1} + 8 \frac{p_1}{p_3} + 8 \frac{p_3}{p_1} + 8 \frac{p_2}{p_2} + 8 \frac{p_3}{p_2}.$$

D'autre part l'étude des variations de $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ donne pour tout $t > 0$, $t + \frac{1}{t} \geq 2$, on en déduit que pour tout $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$: $\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \geq 2$, de même pour les 2 autres. D'où

$$19 + 16 \frac{p_1}{p_2} + 16 \frac{p_2}{p_1} + 8 \frac{p_1}{p_3} + 8 \frac{p_3}{p_1} + 8 \frac{p_2}{p_2} + 8 \frac{p_3}{p_2} \geq 19 + 16 \times 2 + 8 \times 2 + 8 \times 2 = 83 \text{ ce qui donne } \sum_{i=1}^3 \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| \geq 83 :$$

Absurde.

Conclusion: Le majorant du IIA4a) est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$

$$\begin{aligned} \text{IIA5bii) } P_A(x) &= \begin{vmatrix} 7-x & -16 & 8 \\ -16 & 7-x & -8 \\ 8 & -8 & -5-x \end{vmatrix} =_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} -9-x & -16 & 8 \\ -9-x & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x) \begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 1 & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} \\ &=_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (-9-x) \begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 0 & 23-x & -16 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x)(x^2 - 18x - 243) = -(x+9)^2(x-27) \end{aligned}$$

On en déduit une valeur approchée (sic !) de $\rho(A)$: $\rho(A) = 27,000000$

IIB1a) Si A n'était pas inversible, 0 serait valeur propre de A et donc il existerait un indice i tel que $|a_{i,i} - 0| = |a_{i,i}| \leq L_i$ ce qui est absurde et A est inversible.

IIB1b) Si les $a_{i,i}$ sont strictement négatifs alors les disques $D_i(A)$ ont leurs centres sur la demi-droite ouverte \mathbf{R}_- et s'il existe $z = a + ib \in D_i(A)$ avec $a \geq 0$, alors $|z - a_{i,i}| = |a - a_{i,i} + ib| \geq |a - a_{i,i}| = a - a_{i,i} \geq -a_{i,i} = |a_{i,i}| > L_i$: absurde car on a supposé que $z \in D_i(A)$ donc que $|a - a_{i,i}| \leq L_i$. On a donc tous les disques $D_i(A)$ qui sont inclus dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z) < 0$, comme les valeurs propres sont toutes dans un de ces disques, on conclut :

Conclusion: Pour tout $\lambda \in \sigma_A$, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$

IIB1c) Une matrice A , symétrique est définie positive SSI ses valeurs propres sont toutes strictement positives. En changeant A en $-A$ à la question précédente, ce qui ne change pas les L_i et les conditions $|a_{i,i}| > L_i$, on a : Si A est SDD et si $\forall i, a_{i,i} > 0$ alors les valeurs propres ont toutes une partie réelle strictement positive. Comme A est de surcroit symétrique, les valeurs propres sont toutes réelles et donc strictement positives, ce qui prouve que A est définie positive.

Conclusion: Une condition suffisante est $\forall i, a_{i,i} > 0$

IIB2) B étant diagonalisable, il existe une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et une matrice inversible P tels que $B = PDP^{-1}$. $\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons $E_1 = P^{-1}EP$ de sorte que $E = PE_1P^{-1}$.

$\hat{\lambda} \in \sigma_{B+E} = \sigma_{D+E_1}$, il existe $i \in [1, n]$ tel que $|\hat{\lambda} - (\lambda_i + a'_{i,i})| \leq L_i(D+E_1) = L_i(E_1)$ avec $E_1 = (a'_{i,j})$.

Donc $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq |a'_{i,i}| + L_i(E_1) = \sum_{j=1}^n |a'_{i,j}| \leq N_\infty(E_1)$.

Or $N_\infty(E_1) = N_\infty(P^{-1}EP) = N_P(E)$ et grâce au IA4b), on a $N_P(E) \leq C_P N_\infty(E)$.

Comme $\lambda_i \in \sigma_B$, en posant $K_\infty(B) = C_P$, on conclut :

Conclusion: $\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E}, \exists \lambda_i \in \sigma_B \ |\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq K_\infty(B)N_\infty(E)$

Partie III

III A1) Soit $z \in Z_t$, $z^n = -\sum_{j=1}^n c_j(t)z^{n-j}$. Si $z \neq 0$ alors en divisant par z^{n-1} , on obtient : $z = -\sum_{j=1}^n \frac{c_j(t)}{z^{j-1}}$ d'où $|z| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|c_j(t)|}{|z^{j-1}|}$. Si $|z| > 1$ alors $|z| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|c_j(t)|}{1}$. Or l'application $t \mapsto \sum_{j=1}^n |c_j(t)|$ étant continue sur $[0, 1]$ elle y est bornée : il existe un nombre M tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^n |c_j(t)| \leq M$. On a donc pour tout $z \in Z_t$, $|z| \leq 1$ ou $|z| > 1$ et alors $|z| \leq M$. En posant $R_0 = \max(1, M)$ on conclut :

Conclusion: $\forall t \in [0, 1] \ Z_t \subset D(0, R)$

IIIA2) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0 \ \exists t$ tel que $|t - t_0| < \eta$ et $\forall X_t \in Z_t : |X_t - X_0| \geq \varepsilon$.

Pour tout $k > 1$ en jouant avec $\eta = \frac{1}{2^k} : \exists t_k$ tel que $|t_k - t_0| < \frac{1}{2^k}$ et $\forall X_t \in Z_{t_k} : |X_t - X_0| \geq \varepsilon$.

Notons $Z_{t_k} = \{X_{i,t_k} , i \in [1, n]\}$ (en répétant les racines autant que leur multiplicité) de tel sorte que

$$|X_{1,t_k} - X_0| \geq |X_{2,t_k} - X_0| \geq \dots \geq |X_{n,t_k} - X_0| \geq \varepsilon.$$

La suite $(X_{1,t_k}, X_{2,t_k}, \dots, X_{n,t_k})$ est une suite de \mathbf{C}^n et cette suite est bornée (par R) grâce au IIIA1). Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe φ de \mathbf{N} dans \mathbf{N} strictement croissante tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_{1,\varphi(k)}, X_{2,\varphi(k)}, \dots, X_{n,\varphi(k)}) = (y_1, \dots, y_n)$.

D'autre part on a $P_{t_{\varphi(k)}}(X) = \prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$, de la continuité des c_j , on en déduit que pour tout X fixé dans

$\mathbf{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} P_{t_{\varphi(k)}}(X) = P_{t_0}(X)$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}}) = \prod_{i=1}^n (X - y_i)$. Donc $P_{t_0}(X) = \prod_{i=1}^n (X - y_i)$ et donc il existe un i tel que $y_i = X_0$ or ceci est absurde car en passant à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ pour $|X_{i,t_k} - X_0| \geq \varepsilon$, on obtient $|y_i - X_0| = 0 \geq \varepsilon$.

Conclusion: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t |t - t_0| < \eta, \exists X_t \in Z_t, |X_t - X_0| < \varepsilon$

IIIB1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On essaye $a = 0$ et $b = 1$ de sorte que $D_1(A) = D(0, 1)$ puis on détermine facilement c et d pour que les valeurs propres soient 2 et 3 : $d = 5$ et $c = -6$. Conclusion: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ convient

IIIB2a) $A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ta_{i,j} \\ \ddots & a_{n,n} \\ ta_{i,j} & \end{pmatrix}$ d'où $L_i(A(t)) = tL_i(A) \leq L_i(A)$ (car $t \in [0, 1]$) et donc $D_i(A(t)) \subset D_i(A)$

Conclusion: $G_L(A(t)) \subset G_L(A)$

IIIB2bi) $t = 0 \in E$ car $A(0) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ \ddots & a_{n,n} \\ 0 & \end{pmatrix}$ et $a_{1,1} \in \sigma_{A(0)} \cap D_1(A)$ d'où $E \neq \emptyset$

IIIB2bii) Soit $t_0 \in E, \exists \lambda_{t_0} \in \sigma_{A(t_0)} \cap D_1(A)$. λ_{t_0} est donc racine de $P_{A(t_0)}(X)$ (polynôme caractéristique). On pose alors pour tout t de $[0, 1]$, $P_t(X) = (-1)^n P_{A(t)}(X) = X^n + \sum_{j=1}^n c_j(t)z^{n-j}$ avec les c_j qui sont continues sur $[0, 1]$ car polynomiales en t et $a_{i,j}$. On a $\sigma_{A(t)} = Z_t$. On va utiliser le IIIA2) :

Pour cela posons $X_0 = \lambda_{t_0} \in D_1(A)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $j \in [2, n]$, $D(X_0, \varepsilon) \cap D_j(A) = \emptyset$ (un tel ε existe car X_0 appartient à $\mathbf{C} - \bigcup_{j=2}^n D_j(A)$ qui est ouvert (comme complémentaire d'un fermé)).

Grâce au IIIA2) il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\cap [0, 1] : \text{il existe } X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)} \text{ tel que } |X_t - X_0| < \varepsilon$. Or $X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)} \subset G_L(A(t)) \subset G_L(A)$, comme $X_t \in D(X_0, \varepsilon)$, on a $X_t \in D_1(A)$ (car il ne peut appartenir aux autres $D_j(A)$). On obtient donc $X_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)$ ce qui veut dire que $t \in E$.

Conclusion: E est un ouvert relatif de $[0, 1]$

IIIB2biii) Pour tout $k \geq 1$, il existe $\lambda_{t_k} \in \sigma_{A(t_k)} \cap D_1(A)$. Comme $D_1(A)$ est compact, il existe une suite extraite de $(\lambda_{t_k})_k$ qui converge vers un élément μ de $D_1(A) : \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{t_{\varphi(k)}} = \mu$.

D'autre part pour tout k (avec les polynômes $P_t(X)$ définis au ii)) : $P_{t_{\varphi(k)}}(\lambda_{t_{\varphi(k)}}) = 0$ d'où lorsque k tend vers l'infini : on a, par théorèmes généraux : $P_a(\mu) = 0$ ce qui donne $\mu \in \sigma_{A(a)} \cap D_1(A)$

Conclusion: $a \in E$ et E est un fermé relatif de $[0, 1]$

IIIB2biv) Avec leur admission, le ii) et le iii) on obtient immédiatement $E = [0, 1]$. On en déduit que $1 \in E$, comme $A(1) = A$, on a donc

Conclusion: $\sigma_A \cap D_1(A) \neq \emptyset$

Remarque : On pouvait le démontrer directement sans leur admission en considérant la borne supérieure de E (comme pour les accroissements finis vectorielles).

IIIB3) Propriétés du spectre ? $D_1(A)$ rencontre $D_3(A)$. Maple donne les 4 valeurs propres :

$$-4.749157034 - 5.250443310i, -0.7893550582 + 0.7832578378i, 2.851938082 + 3.581681160i, 5.686574010 + 5.885504312i$$

Partie IV

IVA1) N_2 est la norme hermitienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ identifié à \mathbf{C}^{n^2} . Montrons qu'elle est une matricielle :

Soit $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, posons $AB = (a_{i,j})$, on a alors $N_2(AB)^2 = \sum_{i=1, j=1}^{n,n} |c_{i,j}|^2 = \sum_{i=1, j=1}^{n,n} \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|^2$. Or

l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathbf{C}^n donne $\left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right)$.

Donc $N_2(AB)^2 \leq \sum_{i=1, j=1}^{n,n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) = N_2(A)^2 N_2(B)^2$. D'où l'inégalité demandée.

Conclusion: N_2 est une norme matricielle

IVA2a) Si on pose $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})$, alors

$DA = (d_i a_{i,j})$ et $A\Delta = (\delta_j a_{i,j})$. On en déduit que $D(A \times_H B)\Delta = (d_i \delta_j a_{i,j} b_{i,j}) = (DA) \times_H (B\Delta)$ et

$D(A \times_H B)\Delta = (d_i \delta_j a_{i,j} b_{i,j}) = ((d_i \delta_j a_{i,j}) b_{i,j}) = (DA\Delta) \times_H B$.

On a de même $[D(A \times_H B)\Delta = A \times_H (DB\Delta) \text{ et } D(A \times_H B)\Delta = (A\Delta) \times_H (DB)]$.

IVA2b) $[(A \times_H B)x]_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} x_j$ et $AD_x^t B = (x_j a_{i,j})(b_{i,j}) = \left(\sum_{k=1}^n x_k a_{i,k} b_{j,k} \right)$, donc

$(AD_x^t B)_{i,i} = \sum_{k=1}^n x_k a_{i,k} b_{i,k} = [(A \times_H B)x]_i$

IVA2c) $y^*(A \times_H B)x = e^* D_y^*(A \times_H B)x = {}^t e D_y^* A \times_H Bx$ grâce à la définition de e , puis

$y^*(A \times_H B)x = {}^t e D_y^*(A \times_H B)x = {}^t e D_y^*(A \times_H B)I_n x = {}^t e ((D_y^* A) \times_H (B)) x$ grâce au a), puis avec la définition de e , on a : $y^*(A \times_H B)x = \sum_{i=1}^n [(D^* A) \times_H B]_i$ et grâce au b), on obtient

$y^*(A \times_H B)x = \sum_{i=1}^n (D_y^* AD_x^t B)_{i,i} = \text{Tr}((D_y^* AD_x^t B))$

IVA2d) On présume que l'on prend a et B carrés. On utilise le c) avec $y = x$ et la définition de la norme avec la trace.

IVB1) Si S est symétrique positive alors elle est diagonalisable dans une base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont positives : c'est-à-dire que $S = PD\lambda^tP$ avec $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et pour tout i , $\lambda_i \geq 0$, donc il existe μ_i réel tel que $\lambda_i = \mu_i^2$. On a alors $D_\lambda = D_\mu^2$ et donc $S = PD_u^2{}^tP = {}^tTT$ avec $T = D_u{}^tP$

Si $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, on peut dire que T est inversible (car $\det S = \det(T)^2$).

IVB2) Si a et B sont symétriques alors il est clair que $A \times_H B = (a_{i,j} b_{i,j})$ l'est aussi. Montrons qu'elle est positive. D'après la question précédente il existe 2 matrices T et U telles que $A = {}^tTT$ et $B = {}^tUU$

$x^*(A \times_H B)x = \langle D_x^* A D_x, B \rangle$ (d'après IVA2)), de plus $D_x^* = D_x$ car on est dans \mathbf{R} , donc

$x^*(A \times_H B)x = \text{Tr}(D_x A D_x {}^t B)$ (définition de la norme), donc $x^*(A \times_H B)x = \text{Tr}(D_x A D_x B) = \text{Tr}(D_x {}^t T T D_x {}^t U U) = \text{Tr}(U D_x {}^t T T D_x {}^t U)$ (car $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$), donc $x^*(A \times_H B)x = \text{Tr}((U D_x {}^t T)(T D_x {}^t U)) = \text{Tr}((U D_x {}^t T){}^t(U D_x {}^t T)) = \|U D_x {}^t T\|_2^2 \geq 0$ et donc $A \times_H B$ est positive.

Si A et B sont définies positives alors $x^*(A \times_H B)x = \|U D_x {}^t T\|_2^2 = 0$ implique que $U D_x {}^t T = 0$, comme d'après la question précédente, U et T sont inversibles, on doit avoir $D_x = 0$ d'où $x = 0$ et $A \times_H B$ est définie positive.

Conclusion: $(A, B) \in (S_n^+(\mathbf{R}))^2 \implies A \times_H B \in S_n^+(\mathbf{R})$ et $(A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2 \implies A \times_H B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$

IVB3a) $B - \lambda_{\min}(B)I_n$ est symétrique et ses valeurs propres sont $\lambda - \lambda_{\min}(B)$, avec λ valeur propre de B , donc elles sont toutes positives et $B - \lambda_{\min}(B)I_n \in S_n^+(\mathbf{R})$ et grâce à la question précédente $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n)$ est positive.

IVB3b) ${}^t x(A \times_H B - \lambda(A \times_H B)I_n)x = \lambda(A \times_H B){}^t x x - \lambda(A \times_H B){}^t x x = 0$.

Comme $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n)$ est positive, ${}^t x(A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n))x \geq 0$, or il est facile de vérifier que $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n) = A \times_H B - \lambda_{\min}(B)A \times_H I_n$, donc de ${}^t x(A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n))x \geq 0$, on en déduit : ${}^t x(A \times_H B)x - \lambda_{\min}(B){}^t x(A \times_H I_n)x \geq 0$, donc

$${}^t x(A \times_H B)x = \lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 \geq \lambda_{\min}(B) (\min_i a_{i,i}) \times 1$$

$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) (\min_i a_{i,i})$

IVB3c) La matrice $A - \lambda_{\min}(A)I_n$ est symétrique et positive (c'est le IVB3a)) d'où il existe une matrice T tel que $A - \lambda_{\min}(A)I_n = {}^t TT$ (c'est le IVB1)). Le coefficient (i, i) donne : $a_{i,i} - \lambda_{\min}(A) = \sum_{k=1}^n t_{k,i}^2 \geq 0$ et on conclut :

$$a_{i,i} \geq \lambda_{\min}(A)$$

Puis comme tout est positif, il vient tout de suite : $\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) (\min_i a_{i,i}) \geq \lambda_{\min}(B) \lambda_{\min}(A)$

IVB3d) On fait la même chose avec $\lambda_{\max}(B)I_n - B$ qui est symétrique et positive et on obtient

$$\lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{\max}(B) (\max_i a_{i,i}) \leq \lambda_{\max}(B) \lambda_{\max}(A)$$

Conclusion: $\lambda_{\min}(B) \lambda_{\min}(A) \leq \lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{\max}(B) \lambda_{\max}(A)$