

# Epreuve : Mathématiques II

## Corrigé

### Partie I

IA1)  $* N_\infty(A) = 0 \implies \forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ . D'où  $\forall i \in [1, n], \forall j \in [1, n] : |a_{i,j}| = 0$  et donc  $A = 0$ .

$* \forall \lambda \in \mathbf{C} \forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| \leq |\lambda| N_\infty(A)$ , donc  $N_\infty(\lambda A) \leq |\lambda| N_\infty(A)$

Si  $\lambda \neq 0$ ,  $N_\infty(A) = N_\infty(\frac{1}{\lambda} \lambda A) \leq \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda A)$ , donc  $|\lambda| N_\infty(A) \leq N_\infty(\lambda A)$ , d'où l'égalité :  $|\lambda| N_\infty(A) = N_\infty(\lambda A)$

Si  $\lambda = 0$ , l'égalité est triviale.

$* \forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$ , donc  $N_\infty(A + B) \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$ .

Conclusion:  $N_\infty$  est une norme sur  $M_n(\mathbf{C})$

$$\text{IA2a) } A(z) = \left( \sum_{j=1}^n |a_{1,j} z_j|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{n,j} z_j| \right)$$

Donc pour tout  $i \in [1, n], \sum_{j=1}^n |a_{i,j} z_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \|z\|_\infty \leq N_\infty(A) \|z\|_\infty$ .

D'où  $\|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A) \|z\|_\infty$ .

IA2b)  $\forall z \in \mathbf{C}^n - \{0\}, \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A)$  donc  $N_\infty(A)$  majore l'ensemble des réels  $\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$ . Soit  $i_0 \in [1, n]$  tel

que  $N_\infty(A) = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$  et soit  $z_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  tel que  $\varepsilon_j = 1$  si  $a_{i_0,j} \neq 0$  et  $\varepsilon_j = \frac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}}$  sinon. On a alors

$$N_\infty(A) = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \varepsilon_j, A(z_0) = \left( \sum_{j=1}^n a_{1,j} \varepsilon_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{n,j} \varepsilon_j \right) \text{ et donc } \|A(z_0)\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|.$$

Comme  $\|z_0\|_\infty = \max(1, \dots, 1) = 1$ , on a donc :  $\frac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = N_\infty(A)$

Conclusion:  $N_\infty(A) = \max \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$

IA2c) Soit  $\lambda_0 \in \sigma_A$  tel que  $\rho(A) = |\lambda_0|$  et  $z_0$  un vecteur propre tel que  $A(z_0) = \lambda_0 z_0$ , on a alors

$$\frac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = \frac{\|\lambda_0 z_0\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = |\lambda_0| = \rho(A) \leq N_\infty(A).$$

Conclusion:  $\rho(A) \leq N_\infty(A)$ .

IA3)  $N_\infty$  est une norme subordonnée à la norme  $\|_\infty$  sur  $\mathbf{C}^n$ , c'est donc une norme d'algèbre et vérifie donc :

$$N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B).$$

Remarque : On peut aussi redémontrer ceci : pour tout  $z$  non nul,  $\frac{\|AB(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq \frac{N_\infty(A) \|B(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A) N_\infty(B)$

et on retrouve  $N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B)$ .

IA4a)  $* N_Q(A) = 0$  implique  $Q^{-1} A Q = 0$  ce qui implique que  $A = Q 0 Q^{-1} = 0$

$* N_Q(\lambda A) = N_\infty(Q^{-1} \lambda A Q) = |\lambda| N_Q(A)$

$* N_Q(A + B) = N_\infty(Q^{-1} (A + B) Q) = N_\infty(Q^{-1} A Q + Q^{-1} B Q) \leq N_\infty(Q^{-1} A Q) + N_\infty(Q^{-1} B Q) = N_Q(A) + N_Q(B)$ .

On en déduit que  $N_Q$  est une norme.

Enfin  $N_Q(AB) = N_\infty(Q^{-1} (AB) Q) = N_\infty(Q^{-1} A Q Q^{-1} B Q) \leq N_\infty(Q^{-1} A Q) N_\infty(Q^{-1} B Q) = N_Q(A) N_Q(B)$

Conclusion:  $N_Q$  est une norme matricielle.

IA4b) Toutes les normes sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  sont équivalentes donc il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que  $N_\infty \leq \alpha N_Q$  et  $N_Q \leq \beta N_\infty$ , donc pour tout  $A$ ,  $\frac{1}{\alpha} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A)$ .

Si  $\beta \leq \alpha$ , on a  $\frac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A) \leq \alpha N_\infty(A)$  et  $C_Q = \alpha$  convient.

Sinon on a  $\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\alpha}$  et donc  $\frac{1}{\beta}N_\infty(A) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A)$  et  $C_Q = \beta$  convient.

$$\text{IB) On a facilement } D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & t_{1,3}s^2 & \cdots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n}s^2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

D'où  $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \max_i(|t_{i,i}| + P_i(|s|))$  où  $P_i = \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}|s^{j-i}$  est un polynôme de degré au plus

$n-1$  qui vérifie  $P_i(0) = 0$ . On en déduit qu'il existe  $s_0$  tel que pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $|P_i(s_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Donc pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $|t_{i,i}| + P_i(|s_0|) \leq \rho(T) + \frac{\varepsilon}{2}$ , car les valeurs propres de  $T$  sont les  $t_{i,i}$  d'où on conclut :

$$\text{Conclusion: } N_{D_S}(T) \leq \rho(T) + \frac{\varepsilon}{2} < \rho(T) + \varepsilon$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  alors  $A$  est trigonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé) donc il existe une matrice triangulaire supérieure  $T$  et une matrice inversible  $Q$  tel que  $A = QTQ^{-1}$ . D'autre part il existe  $s \in \mathbf{C}^n$  tel que  $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$ . Or  $\rho(T) = \rho(A)$  et  $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = N_\infty(D_S^{-1}Q^{-1}AQD_S) = N_{QD_S}(A)$ . Posons donc  $N_\varepsilon = N_{QD_S}$ , on a alors  $N_\varepsilon(A) = N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$

$$\text{Conclusion: } N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon$$

IC)  $\Rightarrow$ ] Soit  $\lambda_0 \in \sigma_A$  tel que  $\rho(A) = |\lambda_0|$  et  $z_0$  un vecteur propre tel que  $A(z_0) = \lambda_0 z_0$ , on a alors pour tout entier  $k : \|A^k(z_0)\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$ . D'où  $\|\lambda_0^k z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$  et donc  $|\lambda_0|^k \|z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$ . On en déduit alors  $0 \leq |\lambda_0|^k \leq N_\infty(A^k)$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} N_\infty(A^k) = 0$  et par théorème d'encadrement on obtient :  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_0|^k = 0$  ce qui n'est possible que si  $|\lambda_0| < 1$ , donc que  $\rho(A) < 1$ .

$\Leftarrow$ ] Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\rho(A) + \varepsilon < 1$  (par exemple  $\varepsilon = \frac{1 - \rho(A)}{2}$ ). Posons enfin  $q = \rho(A) + \varepsilon$ , on a donc  $0 < q < 1$ . D'après le IB), on a  $0 \leq N_\varepsilon(A^k) \leq N_\varepsilon(A)^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k = q^k$ . On conclut alors par théorème d'encadrement que  $\lim_{k \rightarrow \infty} N_\varepsilon(A^k) = 0$

$$\text{Conclusion: } \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$$

## Partie II

IIA1) On a  $G_L(A) = D(4 + 3i, 4) \cup D(-1 + i, 1) \cup D(5 + 6i, \sqrt{2} + 3) \cup D(-5 - 5i, 5)$  et

$$G_C(A) = D(4 + 3i, 2 + \sqrt{2}) \cup D(-1 + i, 4) \cup D(5 + 6i, 4) \cup D(-5 - 5i, 3)$$

IIA2a)  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  et on a les relations pour tout  $i \in [1, n] : \sum_{j=1}^n m_{i,j}z_j = 0$ , donc  $m_{i,i}z_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{i,j}z_j$ ,

$$\text{d'où : } |m_{i,i}||z_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{i,j}||z_j| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{i,j}|\|Z\|_\infty = L_i\|Z\|_\infty.$$

On choisit  $i = p$ , un indice pour lequel  $\|Z\|_\infty = |z_p| \neq 0$ , on a donc :

$$|m_{p,p}||Z|_\infty \leq L_p \|Z\|_\infty. \text{ D'où : } \boxed{|m_{p,p}| \leq L_p}$$

IIA2b) Soit  $\lambda \in \sigma_A$ ,  $M = A - \lambda I_n$  n'est pas inversible donc le système  $(A - \lambda I_n)Z = 0$  admet une solution non nulle d'où il existe  $p \in [1, n]$  tel que  $|m_{p,p}| \leq L_p(M)$  (avec  $L_p(M)$  : la somme définie au début de II avec une matrice  $M$ ). Comme  $m_{p,p} = a_{p,p} - \lambda$  et que  $L_p(M) = \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{i,j}| = \sum_{j=1, j \neq i}^n (|a_{i,j} - 0|) = L_p(A) = L_p$ , on a donc  $|a_{p,p} - \lambda| \leq L_p$  ce qui veut dire  $\lambda \in D_p(A) \subset G_L(A)$

Conclusion:  $\boxed{\sigma_A \subset G_L(A)}$

IIA2c)  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  SSI  $\lambda$  est valeur propre de  ${}^tA$ , donc  $\sigma_A = \sigma_{{}^tA}$ . D'autre part les sommes  $L_i$  de  $A$  correspondent exactement aux sommes  $C_i$  de  ${}^tA$  et les sommes  $C_i$  de  $A$  correspondent exactement aux sommes  $L_i$  de  ${}^tA$ . On en déduit  $\sigma_A = \sigma_{{}^tA} \subset G_L({}^tA) = G_C(A)$ , on conclut avec le IIA2b) :

Conclusion:  $\boxed{\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)}$

IIA3a) On a montré au IIA2a) et b) que si  $\mu$  est valeur propre de  $A$ ,  $x$  un vecteur propre associé et si  $|x_k| = \|x\|_\infty$  alors  $|a_{k,k} - \mu| \leq L_k$ , comme  $\mu$  est sur le bord de  $G_L(A)$ , on a pour tout  $i$  et donc pour  $k$  :  $|a_{k,k} - \mu| \geq L_k$ . On en déduit que  $|a_{k,k} - \mu| = L_k$  ce qui veut dire que :  $\boxed{\mu \in C_k(A)}$ .

IIA3b) De  $Ax = \mu x$  on égalise les  $k$ -ièmes coordonnées (avec les notations du IIA3a)) :  $\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j = \mu x_k$ , donc

$$(\mu - a_{k,k})x_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j}x_j, \text{ donc } |\mu - a_{k,k}||x_k| = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j}|x_j|, \text{ or } |\mu - a_{k,k}| = L_k \text{ (d'après le IIA3a)), donc}$$

$$L_k|x_k| = \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}||x_j| \leq \left| \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j}x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}||x_j|, \text{ on en déduit donc que}$$

$\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|(|x_j| - |x_k|) \leq 0$ . Or pour tout  $i, j$ , on a  $a_{i,j} \neq 0$ , donc  $|a_{i,j}| > 0$  et d'autre part,  $|x_j| - |x_k| \leq 0$  pour tout  $j$ . On doit donc avoir  $|x_j| - |x_k| = 0$  pour tout  $j$ . Donc  $|x_j| = \|x\|_\infty$  et grâce au IIA3a), on obtient  $\mu \in C_j(A)$  pour tout  $j$ .

Conclusion:  $\boxed{\mu \in \bigcap_{j=1}^n C_j(A)}$

IIA4) Comme le précise l'énoncé, on notera  $D = D_p$  (la matrice).

$$\text{On trouve alors } D^{-1}AD = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{p_2}{p_1}a_{1,2} & \frac{p_3}{p_1}a_{1,3} & \dots & \frac{p_n}{p_1}a_{1,n} \\ \frac{p_1}{p_2}a_{2,1} & a_{2,2} & \frac{p_3}{p_2}a_{2,3} & \dots & \frac{p_n}{p_2}a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{p_1}{p_n}a_{n,1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n,2} & \dots & \frac{p_{n-1}}{p_n}a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i}$  et donc

$$D_i(D^{-1}AD) = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i} \right\} \text{ et } G_L(D^{-1}AD) = \bigcup_{i=1}^n D_i(D^{-1}AD).$$

IIA5a) Soit  $\lambda_0 \in \sigma_A$  tel que  $\rho(A) = |\lambda_0|$ ,  $\lambda_0$  est valeur propre de  $A$  donc  $\lambda_0$  est aussi valeur propre de  $D_p^{-1}AD_p$  (même polynôme caractéristique) et donc d'après IIA2) il existe  $i$  tel que  $|\lambda_0 - a_{i,i}| \leq L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i}$ , donc

$$|\lambda_0| \leq |a_{i,i}| + L_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i} = \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}|, \text{ donc } \rho(A) = |\lambda_0| \leq \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}| \leq \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}| \text{ et ceci pour}$$

tout  $p > 0$ , donc  $\rho(A)$  est un minorant des  $\max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}|$ ,  $p > 0$ . Par définition de la borne inf on conclut :

Conclusion:  $\boxed{\rho(A) \leq \inf_{p>0} \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}|}$

IIA5bi) Montrer que le majorant de  $\rho(A)$  de la question précédente est supérieur ou égal à  $83/3$  revient à montrer que pour tout  $p > 0$ ,  $\max_{i=1,\dots,3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}|$  est supérieur ou égal à  $83/3$ .

Supposons le contraire alors pour  $i = 1, 2, 3$ , on aurait  $\frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| < \frac{83}{3}$  d'où en sommant les 3 :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| < 3 \frac{83}{3} = 83.$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^3 \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| = 19 + 16 \frac{p_1}{p_2} + 16 \frac{p_2}{p_1} + 8 \frac{p_1}{p_3} + 8 \frac{p_3}{p_1} + 8 \frac{p_2}{p_3} + 8 \frac{p_3}{p_2}.$$

D'autre part l'étude des variations de  $t \mapsto t + \frac{1}{t}$  donne pour tout  $t > 0$ ,  $t + \frac{1}{t} \geq 2$ , on en déduit que pour tout  $p_1 > 0$  et  $p_2 > 0$  :  $\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \geq 2$ , de même pour les 2 autres. D'où

$$19 + 16 \frac{p_1}{p_2} + 16 \frac{p_2}{p_1} + 8 \frac{p_1}{p_3} + 8 \frac{p_3}{p_1} + 8 \frac{p_2}{p_3} + 8 \frac{p_3}{p_2} \geq 19 + 16 \times 2 + 8 \times 2 + 8 \times 2 = 83 \text{ ce qui donne } \sum_{i=1}^3 \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^3 p_j |a_{i,j}| \geq 83 :$$

Absurde.

Conclusion: Le majorant du IIA4a) est supérieur ou égal à  $\frac{83}{3}$

$$\begin{aligned} \text{IIA5bii) } P_A(x) &= \begin{vmatrix} 7-x & -16 & 8 \\ -16 & 7-x & -8 \\ 8 & -8 & -5-x \end{vmatrix} =_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} -9-x & -16 & 8 \\ -9-x & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x) \begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 1 & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} \\ &=_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (-9-x) \begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 0 & 23-x & -16 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x)(x^2 - 18x - 243) = -(x+9)^2(x-27) \end{aligned}$$

On en déduit une valeur approchée (sic !) de  $\rho(A)$  :  $\rho(A) = 27,000000$

IIB1a) Si  $A$  n'était pas inversible, 0 serait valeur propre de  $A$  et donc il existerait un indice  $i$  tel que  $|a_{i,i} - 0| = |a_{i,i}| \leq L_i$  ce qui est absurde et  $A$  est inversible.

IIB1b) Si les  $a_{i,i}$  sont strictement négatifs alors les disques  $D_i(A)$  ont leurs centres sur la demi-droite ouverte  $\mathbf{R}_-$  et s'il existe  $z = a + ib \in D_i(A)$  avec  $a \geq 0$ , alors  $|z - a_{i,i}| = |a - a_{i,i} + ib| \geq |a - a_{i,i}| = a - a_{i,i} \geq -a_{i,i} = |a_{i,i}| > L_i$  : absurde car on a supposé que  $z \in D_i(A)$  donc que  $|a - a_{i,i}| \leq L_i$ . On a donc tous les disques  $D_i(A)$  qui sont inclus dans le demi-plan  $\text{Re}(z) < 0$ , comme les valeurs propres sont toutes dans un de ces disques, on conclut :

Conclusion: Pour tout  $\lambda \in \sigma_A$ ,  $\text{Re}(\lambda) < 0$

IIB1c) Une matrice  $A$ , symétrique est définie positive SSI ses valeurs propres sont toutes strictement positives. En changeant  $A$  en  $-A$  à la question précédente, ce qui ne change pas les  $L_i$  et les conditions  $|a_{i,i}| > L_i$ , on a : Si  $A$  est SDD et si  $\forall i, a_{i,i} > 0$  alors les valeurs propres ont toutes une partie réelle strictement positive. Comme  $A$  est de surcroît symétrique, les valeurs propres sont toutes réelles et donc strictement positives, ce qui prouve que  $A$  est définie positive.

Conclusion: Une condition suffisante est  $\forall i, a_{i,i} > 0$

IIB2)  $B$  étant diagonalisable, il existe une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  et une matrice inversible  $P$

tels que  $B = PDP^{-1}$ .  $\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , posons  $E_1 = P^{-1}EP$  de sorte que  $E = PE_1P^{-1}$ .

$\forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E} = \sigma_{D+E_1}$ , il existe  $i \in [1, n]$  tel que  $|\hat{\lambda} - (\lambda_i + a'_{i,i})| \leq L_i(D + E_1) = L_i(E_1)$  avec  $E_1 = (a'_{i,j})$ .

Donc  $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq |a'_{i,i}| + L_i(E_1) = \sum_{j=1}^n |a'_{i,j}| \leq N_\infty(E_1)$ .

Or  $N_\infty(E_1) = N_\infty(P^{-1}EP) = N_P(E)$  et grâce au IA4b), on a  $N_P(E) \leq C_P N_\infty(E)$ .

Comme  $\lambda_i \in \sigma_B$ , en posant  $K_\infty(B) = C_P$ , on conclut :

Conclusion:  $\boxed{\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E}, \exists \lambda_i \in \sigma_B \mid \hat{\lambda} - \lambda_i \leq K_\infty(B)N_\infty(E)}$

## Partie III

III A1) Soit  $z \in Z_t$ ,  $z^n = -\sum_{j=1}^n c_j(t)z^{n-j}$ . Si  $z \neq 0$  alors en divisant par  $z^{n-1}$ , on obtient :  $z = -\sum_{j=1}^n \frac{c_j(t)}{z^{j-1}}$  d'où  $|z| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|c_j(t)|}{|z^{j-1}|}$ . Si  $|z| > 1$  alors  $|z| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|c_j(t)|}{1}$ . Or l'application  $t \mapsto \sum_{j=1}^n |c_j(t)|$  étant continue sur  $[0, 1]$  elle y est bornée : il existe un nombre  $M$  tel que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n |c_j(t)| \leq M$ . On a donc pour tout  $z \in Z_t$ ,  $|z| \leq 1$  ou  $|z| > 1$  et alors  $|z| \leq M$ . En posant  $R_0 = \max(1, M)$  on conclut :

Conclusion:  $\boxed{\forall t \in [0, 1] \ Z_t \subset D(0, R)}$

IIIA2) Raisonons par l'absurde : supposons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall \eta > 0 \ \exists t$  tel que  $|t - t_0| < \eta$  et  $\forall X_t \in Z_t$  :  $|X_t - X_0| \geq \varepsilon$ .

Pour tout  $k > 1$  en jouant avec  $\eta = \frac{1}{2^k}$  :  $\exists t_k$  tel que  $|t_k - t_0| < \frac{1}{2^k}$  et  $\forall X_{t_k} \in Z_{t_k}$  :  $|X_{t_k} - X_0| \geq \varepsilon$ .

Notons  $Z_{t_k} = \{X_{i,t_k}, i \in [1, n]\}$  (en répétant les racines autant que leur multiplicité) de tel sorte que

$$|X_{1,t_k} - X_0| \geq |X_{2,t_k} - X_0| \geq \dots \geq |X_{n,t_k} - X_0| \geq \varepsilon.$$

La suite  $(X_{1,t_k}, X_{2,t_k}, \dots, X_{n,t_k})$  est une suite de  $\mathbf{C}^n$  et cette suite est bornée (par  $R$ ) grâce au IIIA1). Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe  $\varphi$  de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$  strictement croissante tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_{1,t_{\varphi(k)}}, X_{2,t_{\varphi(k)}}, \dots, X_{n,t_{\varphi(k)}}) = (y_1, \dots, y_n)$ .

D'autre part on a  $P_{t_{\varphi(k)}}(X) = \prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$ , de la continuité des  $c_j$ , on en déduit que pour tout  $X$  fixé dans  $\mathbf{C}$  :  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{t_{\varphi(k)}}(X) = P_{t_0}(X)$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}}) = \prod_{i=1}^n (X - y_i)$ . Donc  $P_{t_0}(X) = \prod_{i=1}^n (X - y_i)$  et donc il existe un  $i$  tel que  $y_i = X_0$  or ceci est absurde car en passant à la limite lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  pour  $|X_{i,t_k} - X_0| \geq \varepsilon$ , on obtient  $|y_i - X_0| = 0 \geq \varepsilon$ .

Conclusion:  $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \mid |t - t_0| < \eta, \exists X_t \in Z_t, |X_t - X_0| < \varepsilon}$

IIIB1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On essaye  $a = 0$  et  $b = 1$  de sorte que  $D_1(A) = D(0, 1)$  puis on détermine facilement  $c$  et

$d$  pour que les valeurs propres soient 2 et 3 :  $d = 5$  et  $c = -6$ . Conclusion:  $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \text{ convient}}$

IIIB2a)  $A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ta_{i,j} \\ & \ddots \\ ta_{i,j} & a_{n,n} \end{pmatrix}$  d'où  $L_i(A(t)) = tL_i(A) \leq L_i(A)$  (car  $t \in [0, 1]$ ) et donc  $D_i(A(t)) \subset D_i(A)$

Conclusion:  $\boxed{G_L(A(t)) \subset G_L(A)}$

IIIB2bi)  $t = 0 \in E$  car  $A(0) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$  et  $a_{1,1} \in \sigma_{A(0)} \cap D_1(A)$  d'où  $\boxed{E \neq \emptyset}$

IIIB2bii) Soit  $t_0 \in E$ ,  $\exists \lambda_{t_0} \in \sigma_{A(t_0)} \cap D_1(A)$ .  $\lambda_{t_0}$  est donc racine de  $P_{A(t_0)}(X)$  (polynôme caractéristique). On pose alors pour tout  $t$  de  $[0, 1]$ ,  $P_t(X) = (-1)^n P_{A(t)}(X) = X^n + \sum_{j=1}^n c_j(t)z^{n-j}$  avec les  $c_j$  qui sont continues sur  $[0, 1]$  car polynômes en  $t$  et  $a_{i,j}$ . On a  $\sigma_{A(t)} = Z_t$ . On va utiliser le IIIA2) :

Pour cela posons  $X_0 = \lambda_{t_0} \in D_1(A)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $j \in [2, n]$ ,  $D(X_0, \varepsilon) \cap D_j(A) = \emptyset$  (un tel  $\varepsilon$  existe car  $X_0$  appartient à  $\mathbf{C} - \bigcup_{j=2}^n D_j(A)$  qui est ouvert (comme complémentaire d'un fermé)).

Grâce au IIIA2) il existe  $\eta > 0$  tel que  $\forall t \in ]t_0 - \eta, t_0 + \eta[ \cap [0, 1]$  : il existe  $X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)}$  tel que  $|X_t - X_0| < \varepsilon$ . Or  $X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)} \subset G_L(A(t)) \subset G_L(A)$ , comme  $X_t \in D(X_0, \varepsilon)$ , on a  $X_t \in D_1(A)$  (car il ne peut appartenir aux autres  $D_j(A)$ ). On obtient donc  $X_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)$  ce qui veut dire que  $t \in E$ .

Conclusion:  $E$  est un ouvert relatif de  $[0, 1]$

IIIB2biii) Pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $\lambda_{t_k} \in \sigma_{A(t_k)} \cap D_1(A)$ . Comme  $D_1(A)$  est compact, il existe une suite extraite de  $(\lambda_{t_k})_k$  qui converge vers un élément  $\mu$  de  $D_1(A)$  :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{t_{\varphi(k)}} = \mu$ .

D'autre part pour tout  $k$  (avec les polynômes  $P_t(X)$  définis au ii)) :  $P_{t_{\varphi(k)}}(\lambda_{t_{\varphi(k)}}) = 0$  d'où lorsque  $k$  tend vers l'infini : on a, par théorèmes généraux :  $P_a(\mu) = 0$  ce qui donne  $\mu \in \sigma_{A(a)} \cap D_1(A)$

Conclusion:  $a \in E$  et  $E$  est un fermé relatif de  $[0, 1]$

IIIB2biv) Avec leur admission, le ii) et le iii) on obtient immédiatement  $E = [0, 1]$ . On en déduit que  $1 \in E$ , comme  $A(1) = A$ , on a donc

Conclusion:  $\sigma_A \cap D_1(A) \neq \emptyset$

Remarque : On pouvait le démontrer directement sans leur admission en considérant la borne supérieure de  $E$  (comme pour les accroissements finis vectorielles).

IIIB3) Propriétés du spectre ?  $D_1(A)$  rencontre  $D_3(A)$ . Maple donne les 4 valeurs propres :

$$-4.749157034 - 5.250443310i, -0.7893550582 + 0.7832578378i, 2.851938082 + 3.581681160i, 5.686574010 + 5.885504312i$$

## Partie IV

IVA1)  $N_2$  est la norme hermitienne canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  identifié à  $\mathbf{C}^{n^2}$ . Montrons qu'elle est une matricielle :

Soit  $A = (a_{i,j})$ ,  $B = (b_{i,j})$ , posons  $AB = (a_{i,j})$ , on a alors  $N_2(AB)^2 = \sum_{i=1, j=1}^{n,n} |c_{i,j}|^2 = \sum_{i=1, j=1}^{n,n} \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|^2$ . Or

l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $\mathbf{C}^n$  donne  $\left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right)$ .

Donc  $N_2(AB)^2 \leq \sum_{i=1, j=1}^{n,n} \left( \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) = N_2(A)^2 N_2(B)^2$ . D'où

l'inégalité demandée.

Conclusion:  $N_2$  est une norme matricielle

IVA2a) Si on pose  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ ,  $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$  et  $A = (a_{i,j})$ , alors

$DA = (d_i a_{i,j})$  et  $A\Delta = (\delta_j a_{i,j})$ . On en déduit que  $D(A \times_H B)\Delta = (d_i \delta_j a_{i,j} b_{i,j}) = (DA) \times_H (B\Delta)$  et

$D(A \times_H B)\Delta = (d_i \delta_j a_{i,j} b_{i,j}) = ((d_i \delta_j a_{i,j}) b_{i,j}) = (DA\Delta) \times_H B$ .

On a de même  $D(A \times_H B)\Delta = A \times_H (DB\Delta)$  et  $D(A \times_H B)\Delta = (A\Delta) \times_H (DB)$ .

IVA2b)  $[(A \times_H B)x]_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} x_j$  et  $AD_x^t B = (x_j a_{i,j}) (b_{i,j}) = \left( \sum_{k=1}^n x_k a_{i,k} b_{j,k} \right)$ , donc

$(AD_x^t B)_{i,i} = \sum_{k=1}^n x_k a_{i,k} b_{i,k} = [(A \times_H B)x]_i$

IVA2c)  $y^*(A \times_H B)x = e^* D_y^*(A \times_H B)x = {}^t e D_y^* A \times_H Bx$  grâce à la définition de  $e$ , puis

$y^*(A \times_H B)x = {}^t e D_y^*(A \times_H B)x = {}^t e D_y^*(A \times_H B)I_n x = {}^t e ((D_y^* A) \times_H (B))x$  grâce au a), puis avec la définition

de  $e$ , on a :  $y^*(A \times_H B)x = \sum_{i=1}^n [(D^* A) \times_H B]x_i$  et grâce au b), on obtient

$y^*(A \times_H B)x = \sum_{i=1}^n (D_y^* A D_x^t B)_{i,i} = Tr((D_y^* A D_x^t B))$

IVA2d) On présume que l'on prend  $a$  et  $B$  carrés. On utilise le c) avec  $y = x$  et la définition de la norme avec la trace.

IVB1) Si  $S$  est symétrique positive alors elle est diagonalisable dans une base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont positives : c'est-à-dire que  $S = PD_\lambda {}^tP$  avec  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et pour tout  $i$ ,  $\lambda_i \geq 0$ , donc il existe  $\mu_i$  réel tel que  $\lambda_i = \mu_i^2$ . On a alors  $D_\lambda = D_\mu^2$  et donc  $S = PD_\mu^2 {}^tP = {}^tTT$  avec  $T = D_\mu {}^tP$

Si  $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ , on peut dire que  $T$  est inversible (car  $\det S = \det(T)^2$ ).

IVB2) Si  $A$  et  $B$  sont symétriques alors il est clair que  $A \times_H B = (a_{i,j} b_{i,j})$  l'est aussi. Montrons qu'elle est positive. D'après la question précédente il existe 2 matrices  $T$  et  $U$  telles que  $A = {}^tTT$  et  $B = {}^tUU$

$x^*(A \times_H B)x = \langle D_x^* A D_x, B \rangle$  (d'après IVA2)), de plus  $D_x^* = D_x$  car on est dans  $\mathbf{R}$ , donc

$x^*(A \times_H B)x = \text{Tr}(D_x A D_x {}^tB)$  (définition de la norme), donc  $x^*(A \times_H B)x = \text{Tr}(D_x A D_x B) = \text{Tr}(D_x {}^tT T D_x {}^tU U) = \text{Tr}(U D_x {}^tT T D_x {}^tU)$  (car  $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ ), donc  $x^*(A \times_H B)x = \text{Tr}((U D_x {}^tT)(T D_x {}^tU)) = \text{Tr}((U D_x {}^tT)({}^t(U D_x {}^tT))) = \|U D_x {}^tT\|_2^2 \geq 0$  et donc  $A \times_H B$  est positive.

Si  $A$  et  $B$  sont définies positives alors  $x^*(A \times_H B)x = \|U D_x {}^tT\|_2^2 = 0$  implique que  $U D_x {}^tT = 0$ , comme d'après la question précédente,  $U$  et  $T$  sont inversibles, on doit avoir  $D_x = 0$  d'où  $x = 0$  et  $A \times_H B$  est définie positive.

**Conclusion:**  $(A, B) \in (S_n^+(\mathbf{R}))^2 \implies A \times_H B \in S_n^+(\mathbf{R})$  et  $(A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2 \implies A \times_H B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$

IVB3a)  $B - \lambda_{\min}(B)I_n$  est symétrique et ses valeurs propres sont  $\lambda - \lambda_{\min}(B)$ , avec  $\lambda$  valeur propre de  $B$ , donc elles sont toutes positives et  $B - \lambda_{\min}(B)I_n \in S_n^+(\mathbf{R})$  et grâce à la question précédente  $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n)$  est positive.

IVB3b)  ${}^t x(A \times_H B - \lambda(A \times_H B)I_n)x = \lambda(A \times_H B){}^t x x - \lambda(A \times_H B){}^t x x = 0$ .

Comme  $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n)$  est positive,  ${}^t x(A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n))x \geq 0$ , or il est facile de vérifier que  $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n) = A \times_H B - \lambda_{\min}(B)A \times_H I_n$ , donc de  ${}^t x(A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n))x \geq 0$ , on en déduit :  ${}^t x(A \times_H B)x - \lambda_{\min}(B) {}^t x(A \times_H I_n)x \geq 0$ , donc

$${}^t x(A \times_H B)x = \lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 \geq \lambda_{\min}(B) (\min_i a_{i,i}) \times 1$$

$$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) (\min_i a_{i,i})$$

IVB3c) La matrice  $A - \lambda_{\min}(A)I_n$  est symétrique et positive (c'est le IVB3a)) d'où il existe une matrice  $T$  tel que  $A - \lambda_{\min}(A)I_n = {}^t T T$  (c'est le IVB1)). Le coefficient  $(i, i)$  donne :  $a_{i,i} - \lambda_{\min}(A) = \sum_{k=1}^n t_{k,i}^2 \geq 0$  et on conclut :

$$a_{i,i} \geq \lambda_{\min}(A).$$

Puis comme tout est positif, il vient tout de suite :  $\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) (\min_i a_{i,i}) \geq \lambda_{\min}(B) \lambda_{\min}(A)$

IVB3d) On fait la même chose avec  $\lambda_{\max}(B)I_n - B$  qui est symétrique et positive et on obtient

$$\lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{\max}(B) (\max_i a_{i,i}) \leq \lambda_{\max}(B) \lambda_{\max}(A)$$

**Conclusion:**  $\lambda_{\min}(B) \lambda_{\min}(A) \leq \lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{\max}(B) \lambda_{\max}(A)$