

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES X B MP 2013

Exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue

Première partie : définition de l'exposant de Hölder ponctuel

Note importante : dans tout ce corrigé, on utilisera la notation suivante pour $x_0 \in [0, 1]$, $s \in [0, 1[$ et $f \in \Gamma^s(x_0)$:

$$M_{s,x_0}(f) = \sup_{x \in [0,1] \setminus \{x_0\}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s}.$$

Lorsque s et x_0 seront fixés par le contexte et qu'aucune ambiguïté ne sera possible, on notera simplement

$$M(f) = M_{s,x_0}(f).$$

1a. Soient $x_0 \in [0, 1]$ et $s \in [0, 1[$.

* Par définition, $\Gamma^s(x_0) \subset \mathcal{C}$. La fonction nulle sur $[0, 1]$ est dans $\Gamma^s(x_0)$, qui est donc non-vide. En outre, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, tout $(f, g) \in \Gamma^s(x_0)$, et tout $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$, on a par inégalité triangulaire

$$|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(x_0)| = |\lambda(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \leq |\lambda| |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

si bien que

$$\frac{|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq |\lambda| \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} + \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq |\lambda| M(f) + M(g).$$

L'ensemble $\left\{ \frac{|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(x_0)|}{|x - x_0|^s} \mid x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\} \subset \mathbf{R}$ est donc majoré (et évidemment non-vide) et possède donc une borne supérieure. Ceci montre que $\lambda f + g \in \Gamma^s(x_0)$ et donc que $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

* Soient maintenant deux réels s_1 et s_2 vérifiant $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, et soit $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$. Pour tout $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$, on a $|x - x_0| \leq 1$ d'où $|x - x_0|^{s_2} \leq |x - x_0|^{s_1}$ et donc

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_2}} \leq M_{s_2,x_0}(f).$$

On en déduit que l'ensemble $\left\{ \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} \mid x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et donc que $f \in \Gamma^{s_1}(x_0)$, si bien que $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$.

* Montrons enfin que $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$. On a bien sûr l'inclusion $\Gamma^0(x_0) \subset \mathcal{C}$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{C}$. f étant continue sur le compact $[0, 1]$ est bornée : soit $K > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq K$. On a alors pour $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^0} = |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x)| + |f(x_0)| \leq 2K.$$

On en conclut que l'ensemble $\left\{ \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^0} \mid x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré si bien que $f \in \Gamma^0(x_0)$, et donc finalement $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$.

1b. Soit $f \in \mathcal{C}$ dérivable en x_0 , et φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|$ si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. φ est continue sur $[0, 1] \setminus \{x_0\}$ comme quotient de composées de fonctions continues

dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est en outre continue en x_0 d'après l'hypothèse de dérivabilité de f . Elle est donc bornée puisque $[0, 1]$ est compact. Soit K un majorant de φ .

Pour tout $s \in [0, 1[$ et tout $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| \leq 1$ d'où $|x - x_0| \leq |x - x_0|^s$ et

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \varphi(x) \leq K$$

et $f \in \Gamma^s(x_0)$.

1c. Soient $x_0 \in]0, 1[$ et f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = (x - x_0) \ln |x - x_0|$ si $x \neq x_0$ et $f(x_0) = 0$. f est continue sur $[0, 1] \setminus \{x_0\}$ comme produit de composées de fonctions continues et en x_0 par croissances comparées. Pour tout $s \in [0, 1[$, on a de plus

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} = |x - x_0|^{1-s} \left| \ln |x - x_0| \right|.$$

De même que f , $x \mapsto |x - x_0|^{1-s} \left| \ln |x - x_0| \right|$ prolongée par 0 en x_0 est continue sur $[0, 1]$ donc majorée, ce qui montre que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

f est en outre dérivable sur $[0, x_0[$ et sur $]x_0, 1]$ et pour tout x dans l'un de ces intervalles

$$f'(x) = 1 + \ln |x - x_0|.$$

$f'(x)$ a donc pour limite $-\infty$ en x_0 à gauche ou à droite si bien que f n'est pas dérivable en x_0 d'après le corollaire du théorème des accroissements finis sur les limites de dérivées. Cette fonction constitue bien l'exemple recherché.

2. Soit $s \in [0, 1[$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $x \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{|p(x) - p(\frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2}|^s} = \frac{2^s \sqrt{|(1-2x)(1+2x)|}}{|1-2x|^s} = 2^s |1+2x|^{1/2} |1-2x|^{1/2-s}.$$

Cette quantité est bornée si et seulement si $s \leq \frac{1}{2}$. On en déduit que $p \in \Gamma^s(\frac{1}{2})$ si et seulement si $s \leq \frac{1}{2}$, si bien que $\alpha_p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

3a. Soit $(h, h') \in [0, 1]^2$ vérifiant $h \leq h'$. On a l'inclusion évidente

$$\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h\} \subset \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h'\}$$

si bien que

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h\} \leq \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h'\} = \omega_f(h')$$

et ω_f est croissante sur $[0, 1]$.

On a immédiatement $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq 0\} = \{0\}$ si bien que $\omega_f(0) = 0$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le compact $[0, 1]$ est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si $h \in [0, 1]$ vérifie $h \leq \eta$, ε est donc un majorant de $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h\}$ si bien que $\omega_f(h) \leq \varepsilon$.

On en déduit que ω_f est bien continue en 0.

3b. Soit $(h, h') \in [0, 1]^2$ vérifiant $h \leq h'$, et soit $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $|x - y| \leq h'$. Pour fixer les idées, supposons $x \leq y$.

* Si $|x - y| \leq h$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$.

* Si $h < |x - y| = y - x \leq h'$, alors $0 \leq y - (x + h) \leq h' - h$ si bien que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x+h) + f(x+h) - f(y)| \leq |f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h).$$

On a donc $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$ dans tous les cas d'où $\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$.

3c. Soit $(h, h') \in [0, 1]^2$ avec $h \leq h'$. D'après les deux questions précédentes

$$\omega_f(h) \leq \omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h).$$

Comme ω_f est continue en 0, on a $\lim_{h' \rightarrow h} \omega_f(h' - h) = 0$, et par le théorème d'encadrement, il vient

$$\lim_{h' \rightarrow h} \omega_f(h') = \omega_f(h)$$

ce qui prouve que ω_f est continue en h pour tout $h \in [0, 1]$, c'est-à-dire continue sur $[0, 1]$.

4a. Notons K un majorant de $h \mapsto \frac{\omega_f(h)}{h^s}$ sur $]0, 1]$. Soient $x_0 \in [0, 1]$ et $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$. Alors

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \frac{\omega_f(|x - x_0|)}{|x - x_0|^s} \leq K$$

si bien que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

4b. Notons d'abord que q est continue sur $]0, 1]$ par les théorèmes usuels et en 0 grâce à l'inégalité immédiate $|q(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in [0, 1]$. De même, q est dérivable sur $]0, 1]$ d'où $q \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout $x_0 \in]0, 1[$ et tout $s \in [0, 1[$. Le même argument peut s'étendre facilement en 1, si bien que $q \in \Gamma^s(1)$ pour tout $s \in [0, 1[$.

Enfin, on a pour tout $x \in]0, 1]$ et tout $s \in [0, 1[$

$$\frac{|q(x) - q(0)|}{|x|^s} = |x|^{1-s} \left| \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq 1$$

si bien que $q \in \Gamma^s(0)$. Ceci prouve que $\alpha_q(x_0) = 1$ pour tout $x_0 \in [0, 1]$.

Soit maintenant $h \in]0, 1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $2^{-n} \leq h$. Alors $2^{-n} - 2^{-(n+1)} = 2^{-(n+1)} \leq h$ d'où

$$\omega_q(h) \geq |q(2^{-n}) - q(2^{-(n+1)})| = |2^{-n} \cos(2^n \pi) - 2^{-(n+1)} \cos(2^{n+1} \pi)| = 2^{-(n+1)}.$$

Il vient

$$\frac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{h}} \geq \frac{1}{2^{n+1} 2^{-n/2}} = 2^{\frac{n}{2}-1} \geq \frac{1}{2}$$

ce qui montre que $\frac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne converge pas vers 0 quand h tend vers 0.

Remarque : ce raisonnement reste valable pour toute puissance $s \in [0, 1[$. Notons que comme on peut prendre $n = E\left(\log_2 \frac{1}{h}\right) + 1$ qui tend vers l'infini quand h tend vers 0, on a en fait prouvé que $\frac{\omega_q(h)}{h^s}$ n'est borné pour aucun $s \in [0, 1[$ et donc que la réciproque du résultat de la question 4a est fausse en général.

Deuxième partie : le système de Schauder

5a. Soient $j \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathcal{T}_{j+1}$. Si k est pair, on pose $k' = \frac{k}{2}$. On a alors

$$k' < \frac{2^{j+1}}{2} = 2^j$$

d'où $k' \in \mathcal{T}_j$ et

$$k2^{-j-1} = k'2^{-j} \text{ et } (k+1)2^{-j-1} = \left(k' + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \leq (k+1)2^{-j}$$

d'où $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$.

Si k est impair, on a de même

$$k' = \frac{k-1}{2} < \frac{2^{j+1}-1}{2} < 2^j$$

d'où $k' \in \mathcal{T}_j$ et

$$k2^{-j-1} = \left(k' + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \geq k'2^{-j} \text{ et } (k+1)2^{-j-1} = (k'+1)2^{-j}$$

d'où $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$ de même. On peut donc choisir en toute généralité $k' = E\left(\frac{k}{2}\right)$ où E désigne la fonction partie entière, ce qui montre l'existence de k' .

Inversement, si $k'' \in \mathcal{T}_j$ vérifie $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k''2^{-j}, (k''+1)2^{-j}]$, on doit avoir

$$k2^{-j-1} \geq k''2^{-j} \iff \frac{k}{2} \geq k''$$

et

$$(k+1)2^{-j-1} \leq (k''+1)2^{-j} \iff \frac{k}{2} \leq k'' + \frac{1}{2} < k'' + 1$$

ce qui montre que $k'' = E\left(\frac{k}{2}\right)$ et l'unicité voulue.

5b. Soient $j \in \mathbf{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$, $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$. On a $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) \neq 0$ seulement si

$$k2^{-j} \leq \ell 2^{-j-1} \leq (k+1)2^{-j} \iff 2k \leq \ell \leq 2k+2.$$

Or on a d'une part

$$\theta_{j,k}(2k2^{-j-1}) = 1 - |2^{j+1}2k2^{-j-1} - 2k - 1| = 0$$

d'autre part

$$\theta_{j,k}((2k+2)2^{-j-1}) = 1 - |2^{j+1}(2k+2)2^{-j-1} - 2k - 1| = 0$$

et enfin

$$\theta_{j,k}((2k+1)2^{-j-1}) = 1 - |2^{j+1}(2k+1)2^{-j-1} - 2k - 1| = 1.$$

On en conclut que $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) = 1$ si $\ell = 2k+1$ et $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) = 0$ sinon.

5c. Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$.

* Par définition, $\theta_{j,k}$ est continue sur $]k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ et sur $[0, 1] \setminus [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. De plus, il est clair que

$$\lim_{x \rightarrow k2^{-j}, x < k2^{-j}} \theta_{j,k}(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow k2^{-j}, x > k2^{-j}} \theta_{j,k}(x)$$

et de même en $(k+1)2^{-j}$ (pour les cas $k=0$ et $k=2^j-1$, on ne regardera qu'un seul des deux points). On en déduit que $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0, 1]$.

* En itérant le raisonnement de la question précédente, on constate que tout intervalle $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$ où $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$ est inclus, soit dans $\left[k2^{-j}, \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right]$, soit dans $\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}, (k+1)2^{-j}\right]$. La restriction de $\theta_{j,k}$ à ces deux intervalles étant affine d'après sa définition, on en déduit *a fortiori* qu'elle l'est sur $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$.

5d. Soient $(j, k) \in \mathcal{I}$ et $(x, y) \in [0, 1]^2$.

* Si $(x, y) \in ([0, 1] \setminus [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^2$, on a

$$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| = 0 \leq 2^{j+1}|x - y|.$$

* Si $(x, y) \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]^2$, on a par la seconde inégalité triangulaire

$$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| = |2^{j+1}y - 2k - 1| - |2^{j+1}x - 2k - 1| \leq |2^{j+1}y - 2k - 1 - (2^{j+1}x - 2k - 1)| = 2^{j+1}|x - y|.$$

* Si $x \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ et $y \in [0, 1] \setminus [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, on a soit $y < k2^{-j}$, soit $y > (k+1)2^{-j}$. Dans le premier cas, il vient avec l'étude du cas précédent

$$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| = \theta_{j,k}(x) = |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(k2^{-j})| \leq 2^{j+1}|x - k2^{-j}| \leq 2^{j+1}|x - y|.$$

Le second cas se traite de même.

On a prouvé l'inégalité voulue dans tous les cas.

6. Soit $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le compact $[0, 1]$ est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit alors $j_0 \in \mathbf{N}$ tel que $j \geq j_0 \Rightarrow 2^{-j} < \eta$. Alors pour $j \geq j_0$

$$\begin{aligned} |c_{j,k}(f)| &= \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - \frac{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(k2^{-j}) \right| + \frac{1}{2} \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f((k+1)2^{-j}) \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$j \geq j_0 \Rightarrow \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien $\lim_{j \rightarrow +\infty} \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

7a. Soient $(j, k) \in \mathcal{I}$, $(i, \ell) \in \mathcal{I}$. On a

$$\begin{aligned} c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) &= \theta_{i,\ell} \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \right) - \frac{\theta_{i,\ell}(k2^{-j}) + \theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})}{2} \\ &= \theta_{i,\ell}((2k+1)2^{-j-1}) - \frac{\theta_{i,\ell}(k2^{-j}) + \theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})}{2}. \end{aligned}$$

* Supposons $i > j$. On a

$$\ell 2^{-i} \leq k 2^{-j} \leq (\ell + 1) 2^{-i} \iff \ell \leq k 2^{i-j} \leq \ell + 1$$

ce qui impose $\ell = k 2^{i-j}$ ou $\ell + 1 = k 2^{i-j}$. Dans le premier cas, on a $\ell 2^{-i} = k 2^{-j}$ et $(\ell + 1) 2^{-i} = k 2^{-j} + 2^{-i} \leq k 2^{-j} + 2^{-j-1} = \left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{-j}$ si bien que

$$\theta_{i,\ell}(k 2^{-j}) = \theta_{i,\ell} \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{-j} \right) = \theta_{i,\ell}((k+1) 2^{-j}) = 0.$$

On obtient de même $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$ si $\ell + 1 = k 2^{i-j}$.

Par un raisonnement analogue, on constate dans tous les cas où $i > j$ que les valeurs de $k 2^{-j}$, $\left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{-j}$ et $(k+1) 2^{-j}$ sont soit à l'extérieur, soit à l'une des extrémités de l'intervalle $[\ell 2^{-i}, (\ell + 1) 2^{-i}]$ et donc que $\theta_{i,\ell}$ s'annule en ces trois points, si bien que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$.

* Supposons maintenant $i < j$. On sait alors d'après la question 5c que $\theta_{i,\ell}$ est affine sur $[k 2^{-j}, (k+1) 2^{-j}]$. On en déduit directement que la valeur de $\theta_{i,\ell}$ au milieu de cet intervalle est égale à la moyenne de ses valeurs aux extrémités, c'est-à-dire que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$.

* On suppose enfin que $i = j$. On a alors d'après la question 5b

$$c_{j,k}(\theta_{j,\ell}) = \theta_{j,\ell}((2k+1)2^{-j-1}) - \frac{\theta_{j,\ell}(2k 2^{-j-1}) + \theta_{j,\ell}((2k+2)2^{-j-1})}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = 2k+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en conclut finalement que

$$c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{i,j} \delta_{k,\ell}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

7b. * Notons que $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$. Soit $x \in [0,1]$ et $j \in \mathbf{N}$. On a alors par définition $x \in [\tilde{k}_j(x)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x)+1)2^{-j}]$, si bien que

$$f_j^a(x) = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} a_{j,k} \theta_{j,k}(x) = a_{j,\tilde{k}_j(x)} \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)$$

les autres termes de la somme étant nuls. Il vient

$$|f_j^a(x)| = |a_{j,\tilde{k}_j(x)} \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)| \leq b_j.$$

La série $\sum b_j$ étant convergente, cette majoration uniforme en x montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_j^a$ sur $[0,1]$, donc sa convergence uniforme. On note $f^a = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j^a$.

* Pour tout $j \in \mathbf{N}$, $f_j^a \in \mathcal{C}$ puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire de fonctions continues. La convergence uniforme sur $[0,1]$ montre alors que $f^a \in \mathcal{C}$.

* Pour tout $j \in \mathbf{N}$, $f_j^a(0) = f_j^a(1) = 0$ par définition des $\theta_{j,k}$. La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a donc $f^a(0) = f^a(1) = 0$ et $f \in \mathcal{C}_0$.

* Il est clair que $f \mapsto c_{j,k}(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$. En outre, on a pour tout $f \in \mathcal{C}$ la majoration

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2\|f\|_\infty$$

ce qui montre qu'elle est continue sur $\mathcal{C}$. On a donc

$$c_{j,k}(f^a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n c_{j,k}(f_i^a).$$

Or, la question précédente fournit pour tout $i \in \mathbf{N}$

$$c_{j,k}(f_i^a) = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} a_{i,k} c_{j,k}(\theta_{i,k}) = \delta_{i,j} a_{j,k}$$

d'où finalement

$$c_{j,k}(f^a) = a_{j,k}$$

ce qu'on voulait.

8a. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, f' est continue donc bornée sur le compact $[0,1]$ et l'inégalité des accroissements finis montre alors que f est lipschitzienne de constante de Lipschitz $M = \|f'\|_\infty$. Il vient

$$\begin{aligned} |c_{j,k}(f)| &\leq \frac{1}{2} \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(k2^{-j}) \right| + \frac{1}{2} \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f((k+1)2^{-j}) \right| \\ &\leq \frac{M}{2} \left| \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} - k2^{-j} \right| + \frac{M}{2} \left| \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} - (k+1)2^{-j} \right| = M2^{-j-1} \leq M2^{-j} \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

On en déduit que pour tout $j \in \mathbf{N}$, $b_j = \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq M2^{-j}$. On a donc la convergence de $\sum b_j$ d'où la convergence normale donc uniforme de $S_n f$ sur $[0,1]$ par la question précédente.

8b. De même que dans la question précédente, on note $M' = \|f''\|_\infty$. f' est alors M' -lipschitzienne sur $[0,1]$. Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $d_{j,k} \in \left] k2^{-j}, \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \right[$ tel que

$$f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(k2^{-j}) = 2^{-j-1} f'(d_{j,k})$$

et $d'_{j,k} \in \left] \left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{-j}, (k+1)2^{-j} \right[$ tel que

$$f((k+1)2^{-j}) - f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{-j}\right) = 2^{-j-1} f'(d'_{j,k}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} |c_{j,k}(f)| &= \frac{1}{2} \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{-j}\right) - f(k2^{-j}) + f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{-j}\right) - f((k+1)2^{-j}) \right| \\ &= \frac{1}{2} |2^{-j-1} f'(d_{j,k}) - 2^{-j-1} f'(d'_{j,k})| \\ &\leq \frac{M' 2^{-j-1}}{2} |d_{j,k} - d'_{j,k}| \leq \frac{M' 2^{-j-1}}{2} 2^{-j} \leq M' 4^{-j} \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

9a. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$. D'après la question 5c, la restriction de $S_n f$ à $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ est une combinaison linéaire de fonctions affines sur cet intervalle et est donc également affine.

9b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$, $(S_{n-1}f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$.

* D'après la question précédente, $S_{n-1}f$ est affine sur $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$ pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} S_{n-1}f\left(\frac{2\ell+1}{2} 2^{-n}\right) &= S_{n-1}f\left(\frac{\ell 2^{-n} + (\ell+1)2^{-n}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} [S_{n-1}f(\ell 2^{-n}) + S_{n-1}f((\ell+1)2^{-n})] \\ &= \frac{1}{2} [f(\ell 2^{-n}) + f((\ell+1)2^{-n})]. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$.

* On suppose que ℓ est pair et l'on pose $\ell' = \frac{\ell}{2}$. On a alors $\ell' \in \mathcal{T}_n$. De plus, d'après la question 5b, $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = 0$ pour tout $k \in \mathcal{T}_n$ puisque ℓ étant pair est différent de $2k+1$. D'après notre hypothèse concernant les valeurs de $S_n f$ sur $\mathcal{T}_n 2^{-n}$, il vient alors

$$\begin{aligned} (S_n f)(\ell 2^{-n-1}) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(\ell 2^{-n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(\ell' 2^{-n}) + \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f) \theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) \\ &= S_{n-1}f(\ell' 2^{-n}) \\ &= f(\ell' 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n-1}) \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

* On suppose maintenant que ℓ est impair et l'on pose $\ell' = \frac{\ell-1}{2}$, si bien que $\ell' \in \mathcal{T}_n$. D'après la question 5b, $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = \delta_{\ell, 2k+1} = \delta_{\ell', k}$ pour tout $k \in \mathcal{T}_n$. Il vient de même que ci-dessus en utilisant le calcul effectué en début de question

$$\begin{aligned} (S_n f)(\ell 2^{-n-1}) &= S_{n-1}f\left(\frac{2\ell'+1}{2} 2^{-n}\right) + c_{n,\ell'}(f) \\ &= \frac{1}{2} [f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell'+1)2^{-n})] + f\left(\frac{2\ell'+1}{2} 2^{-n}\right) - \frac{1}{2} [f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell'+1)2^{-n})] \\ &= f\left(\frac{2\ell'+1}{2} 2^{-n}\right) = f(\ell 2^{-n-1}) \end{aligned}$$

ce qui montre dans ce cas également l'égalité attendue.

9c. Par définition, on a pour tout $\ell \in \mathcal{T}_1 = \{0, 1\}$ compte tenu de $f(0) = f(1) = 0$

$$S_0 f\left(\frac{\ell}{2}\right) = c_{0,0}(f)\theta_{0,0}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(f(0) + f(1))\right]\theta_{0,0}\left(\frac{\ell}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)\theta_{0,0}\left(\frac{\ell}{2}\right).$$

Si $\ell = 0$, il vient

$$S_0 f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)\theta_{0,0}(0) = 0 = f(0)$$

et si $\ell = 1$

$$S_0 f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)\theta_{0,0}\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par « pour tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$ » est donc initialisée pour $n = 0$ et héréditaire d'après la question précédente. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

10a. Soit $f \in \mathcal{C}_0$ et soit $\varepsilon > 0$. f étant continue sur $[0, 1]$ est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit alors $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow 2^{-n-1} \leq \eta$. Soit $x \in [0, 1]$, on pose dans la suite $\ell = \tilde{k}_{n+1}(x)$. Alors pour $n \geq n_0$, on a par définition $\ell 2^{-n-1} \leq x < (\ell + 1)2^{-n-1}$ d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n f(x)| &\leq |f(x) - f(\ell 2^{-n-1})| + |f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(\ell 2^{-n-1})| + |S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(x)| \\ &\leq \varepsilon + |S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(x)|. \end{aligned}$$

Comme $S_n f$ est affine sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell + 1)2^{-n-1}]$, elle est en particulier monotone sur cet intervalle si bien que

$$|S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(x)| \leq |S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f((\ell + 1)2^{-n-1})| = |f(\ell 2^{-n-1}) - f((\ell + 1)2^{-n-1})| \leq \varepsilon.$$

On en conclut que si $n \geq n_0$, on a

$$|f(x) - S_n f(x)| \leq 2\varepsilon$$

pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $\|f - S_n f\|_\infty \leq 2\varepsilon$. On en déduit bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$.

10b. On utilise les trois faits suivants pour toute fonction continue affine par morceaux h sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles, avec σ subdivision de $[a, b]$ subordonnée à h .

* Si H est une autre fonction continue affine par morceaux, à laquelle σ est également subordonnée et qui coïncide avec h sur les points de σ , alors $h = H$. Ceci est dû au fait qu'une application affine sur un intervalle est entièrement déterminée par ses valeurs en deux points distincts de cet intervalle.

* $|h|$ est également continue affine par morceaux sur $[a, b]$, et on obtient une subdivision σ_1 de $[a, b]$ subordonnée à $|h|$ en adjoignant éventuellement à σ les points où h s'annule. En effet, $|h|$ est toujours continue comme composée d'applications continues. Si h ne change pas de signe (ou reste nulle) à l'intérieur d'un des segments de σ , alors la restriction de $|h|$ à ce segment coïncide avec celle de $\pm h$ et est donc également affine. Si h change strictement de signe à l'intérieur d'un des segments de σ , alors c'est par monotonie le seul point d'annulation de h sur ce segment, et la restriction de $|h|$ coïncide avec $\pm h$ à gauche et à droite de ce point et est donc affine sur les deux nouveaux intervalles ainsi créés.

* Si $\sigma_1 = (a_0, \dots, a_n)$ ($n \geq 1$) est une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à $|h|$, alors $\sup_{[a,b]} |h| = \max_{[a,b]} |h|$ est atteint en l'un des a_i , $i \in \{0, \dots, n\}$. En effet, on a aussitôt

$$\max_{[a,b]} |h| = \max\left\{\max_{[a_{i-1}, a_i]} |h|, 1 \leq i \leq n\right\}$$

et chacun des $\max_{[a_{i-1}, a_i]} |h|$, $i \in \{1, \dots, n\}$ est atteint en une extrémité de a_{i-1} ou en a_i puisque la restriction de h à $[a_{i-1}, a_i]$ est affine donc monotone.

On en vient maintenant aux questions posées.

* Comme $S_n f \in \mathcal{C}_0$, on sait par la question 9c que $S_n(S_n f)$ et $S_n f$ coïncident sur tous les $\ell 2^{-n-1}$ pour $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$. Comme ce sont deux fonctions continues et affines sur chaque intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ pour $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ par la question 9a, elles coïncident en fait sur $[0, 1]$ entier. Il en résulte que $S_n \circ S_n = S_n$ et que S_n est bien un projecteur de $\mathcal{C}$. La formulation « projecteur sur $\mathcal{C}_0$ » doit être lue comme « projecteur d'image incluse dans $\mathcal{C}_0$ » puisqu'il est évident que $\text{Im } S_n \neq \mathcal{C}_0$ car $\text{Im } S_n$ ne contient que des fonctions affines par morceaux.

* Par définition des $(\theta_{j,k})_{(j,k) \in \mathcal{I}}$, une subdivision subordonnée à $|S_n f|$ est constituée des points $(\ell 2^{-n-1})_{\ell \in \mathcal{T}_{n+1}}$ auxquels on ajoute les éventuels points d'annulation de $S_n f$. Le maximum de $|S_n f|$ est donc atteint en l'un de ces points, donc en l'un des $(\ell 2^{-n-1})_{\ell \in \mathcal{T}_{n+1}}$ puisque $|S_n f|$ s'annule sur les autres points. On déduit de 9c que

$$\|S_n f\|_\infty = \max\{|S_n f(\ell 2^{-n-1})|, \ell \in \mathcal{T}_{n+1}\} = \max\{|f(\ell 2^{-n-1})|, \ell \in \mathcal{T}_{n+1}\} \leq \|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que la norme subordonnée $\|S_n f\|$ vérifie $\|S_n f\| \leq 1$. Cependant, le raisonnement ci-dessus montre que pour l'application f constante égale à 1, on a $\|S_n f\|_\infty = 1 = \|f\|_\infty$. Finalement, on a bien

$$\|S_n\| = 1$$

ce qu'on voulait.

11a. Pour $s \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto x^s$ est concave sur $\mathbf{R}_+$. On a donc en particulier pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+^2$

$$\frac{a^s + b^s}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^s$$

ce qui donne bien $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$.

11b. Soit $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$. Pour tout $(j, k) \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} |c_{j,k}(f)| &= \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(x_0) + \frac{f(x_0) - f(k2^{-j}) + f(x_0) - f((k+1)2^{-j})}{2} \right| \\ &\leq \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(x_0) \right| + \frac{1}{2}|f(x_0) - f(k2^{-j})| + \frac{1}{2}|f(x_0) - f((k+1)2^{-j})| \\ &\leq M_{s,x_0}(f) \left[\left| x_0 - \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \right|^s + \frac{1}{2}|x_0 - k2^{-j}|^s + \frac{1}{2}|x_0 - (k+1)2^{-j}|^s \right]. \end{aligned}$$

On note dans la suite $M = M_{s,x_0}(f)$. On distingue alors les cas suivants.

* Si $x_0 > (k+1)2^{-j}$, alors

$$|x_0 - (k+1)2^{-j}| \leq \left| x_0 - \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \right| \leq |x_0 - k2^{-j}|.$$

d'où

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M|x_0 - k2^{-j}|^s \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s.$$

* Si $x_0 < k2^{-j}$, il vient de même

$$|x_0 - k2^{-j}| \leq \left| x_0 - \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \right| \leq |x_0 - (k+1)2^{-j}|.$$

d'où

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M|x_0 - (k+1)2^{-j}|^s \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s.$$

* Si $x_0 \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, alors $\left| x_0 - \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \right|$, $|x_0 - k2^{-j}|$ et $|x_0 - (k+1)2^{-j}|$ sont tous les trois majorés par 2^{-j} . Il vient

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M2^{-sj} \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s.$$

On a donc dans tous les cas

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s$$

ce qu'on voulait en posant $c_1 = 2M$.

Remarque : on n'a pas utilisé la question 11a... Mais on s'en servira plus tard !

Troisième partie : minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

12. On a $0 < |x - x_0| \leq 1$, d'où $\log_2 |x - x_0| \leq 0$. On pose alors $n_0 = E(-\log_2 |x - x_0|) \in \mathbf{N}$, si bien que par croissance de $x \mapsto 2^x$

$$n_0 \leq -\log_2 |x - x_0| < n_0 + 1 \iff 2^{-n_0} \geq |x - x_0| > 2^{-n_0-1}.$$

Réciproquement, l'inégalité $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}$ impose $n_0 \leq -\log_2 |x - x_0| < n_0 + 1$ et donc $n_0 = E(-\log_2 |x - x_0|)$, d'où l'unicité.

13. On a par définition $\theta_{j,k}(x) = 0$ dès que $x \notin [\tilde{k}_j(x)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x) + 1)2^{-j}]$ et de même pour x_0 . On en déduit que

$$W_j = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| = |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)|.$$

En utilisant le résultat de 5d, il vient bien

$$W_j \leq \left(|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \right) 2^{j+1} |x - x_0|.$$

14a. À l'aide de $(\mathcal{P}_1)$ et de la question précédente, on a

$$W_j \leq c_1 \left((2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|)^s + (2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s \right) 2^{j+1} |x - x_0|$$

puis en utilisant 11a

$$\begin{aligned} W_j &\leq c_1 2^{1-s} \left(2^{-j+1} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \right)^s 2^{j+1} |x - x_0| \\ &\leq c_1 2^{1-s+s(1-j)+j+1} \left(1 + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| 2^{j-1} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| 2^{j-1} \right)^s |x - x_0| \\ &\leq 4c_1 2^{j(1-s)} 3^s |x - x_0| \end{aligned}$$

puisque par définition $|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|$ et $|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|$ sont inférieurs à 2^{-j} . Ceci est bien l'inégalité voulue.

14b. Rappelons que $|x - x_0| \leq 2^{-n_0}$ d'où

$$2^{(n_0+1)(1-s)} |x - x_0|^{1-s} \leq 2^{1-s}.$$

Avec ceci et la question précédente, il vient en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $2^{1-s} \neq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| &\leq 4c_1 3^s |x - x_0| \sum_{j=0}^{n_0} 2^{j(1-s)} = 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{2^{(n_0+1)(1-s)} - 1}{2^{1-s} - 1} \\ &\leq \frac{4c_1 3^s [2^{(n_0+1)(1-s)} |x - x_0|^{1-s}]}{2^{1-s} - 1} |x - x_0|^s \\ &\leq 8c_1 \left(\frac{3}{2} \right)^s (2^{1-s} - 1)^{-1} |x - x_0|^s \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

15. On sait d'après $(\mathcal{P}_1)$ que $|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s$. Or, par définition, $|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j}$ si bien que

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + 2^{-j})^s = 2^{s(1-j)}c_1.$$

En se rappelant que $\theta_{j,k}(x_0) = 0$ dès lors que $x_0 \notin [\tilde{k}_j(x_0)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x_0) + 1)2^{-j}]$, et que $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$ pour tout $(j, k) \in \mathcal{I}$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x_0)| &= \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \left| \theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0) \right| \\ &\leq c_1 2^s \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} 2^{-sj} \\ &\leq c_1 2^s \frac{2^{-s(n_0+1)}}{1 - 2^{-s}} \leq c_3 |x - x_0|^s \end{aligned}$$

puisque $2^{-s(n_0+1)} \leq |x - x_0|^s$ par définition de n_0 .

16. Soit

$$A = \{n \in \mathbf{N}, 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})\}.$$

Comme $\|f\|_\infty = 1$ et que $[0, 1]$ est compact, il existe $y \in [0, 1]$ tel que $|f(y)| = 1$. On a donc $\omega_f(1) \geq |f(y) - f(0)| = 1 \geq 2^{-n_0 s}$ si bien que $A \neq \emptyset$. On sait de plus que ω_f est croissante et continue sur $[0, 1]$ et que $\omega_f(0) = 0$. On en déduit que A est majorée.

En tant que partie non-vide et majorée de $\mathbf{N}$, A possède un maximum n_1 , qui est par définition l'unique $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$.

17. Soit $y \in [0, 1]$. On a pour tout $n \geq n_1$ de façon analogue à 10a en posant $\ell = \tilde{k}_n(y)$

$$|f(y) - S_n f(y)| \leq |f(y) - f(\ell 2^{-n-1})| + |f(\ell 2^{-n-1}) - f((\ell + 1)2^{-n-1})|.$$

Comme $n \geq n_1$, on a $|y - \ell 2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1} \leq 2^{-n_1-1}$ et de même $|\ell 2^{-n-1} - (\ell + 1)2^{-n-1}| \leq 2^{-n_1-1}$. Il vient

$$|f(y) - S_n f(y)| \leq 2\omega_f(2^{-n_1-1}) \leq 2^{1-n_0 s} = 2^{1+s} 2^{-s(n_0+1)} \leq 2^{s+1} |x - x_0|^s$$

ce qu'on voulait en passant à la borne supérieure en y .

18a. En utilisant l'ineffable propriété $(\mathcal{P}_1)$, le fait subtil que $\theta_{j,k}(x) = 0$ dès lors que $x \notin [\tilde{k}_j(x)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x) + 1)2^{-j}]$, la remarque tout à fait originale que $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$ pour tout $(j, k) \in \mathcal{I}$ et enfin le résultat à la fois simple et judicieux que $2^{-j} \leq |x - x_0|$ pour $j \geq n_0 + 1$, on a comme d'habitude, mais tout particulièrement comme en 14a

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \left| \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) \right| \\ &\leq c_1 \sum_{j=n_0+1}^{n_1} (2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x|)^s \\ &\leq c_1 \sum_{j=n_0+1}^{n_1} 2^{-js} (1 + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x| 2^{-j})^s \\ &\leq c_1 3^s \sum_{j=n_0+1}^{n_1} |x - x_0|^s = c_1 3^s (n_1 - n_0) |x - x_0|^s \end{aligned}$$

et on est super contents.

18b. L'inégalité $n_1 - n_0 \leq n_1 + 1$ est évidente. En outre, par $(\mathcal{P}_2)$

$$\omega_f(2^{-n_1}) \leq c_4(N)(1 + |\log_2(2^{-n_1})|)^{-N} = c_4(N)(n_1 + 1)^{-N}$$

d'où $n_1 + 1 \leq \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \right)^{\frac{1}{N}}$. Avec cette majoration, la question précédente et les définitions de n_0 et n_1 , il vient immédiatement

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| &\leq c_1 3^s (n_1 - n_0) |x - x_0|^s \\ &\leq c_1 3^s \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \right)^{\frac{1}{N}} |x - x_0|^s \\ &\leq c_1 3^s (c_4(N))^{\frac{1}{N}} 2^{\frac{n_0 s}{N}} |x - x_0|^s \\ &\leq c_5(N) |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}. \end{aligned}$$

19. Par la question 17, on a pour $n \geq n_1$ et pour tout $x \in [0, 1]$

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1} |x - x_0|^s$$

d'où

$$|f(x) - f(x_0) - S_n f(x) + S_n f(x_0)| \leq |f(x) - S_n f(x)| + |f(x_0) - S_n f(x_0)| \leq 2^{s+2} |x - x_0|^s$$

si bien que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{s+2} |x - x_0|^s + |S_n f(x) - S_n f(x_0)|. \quad (A)$$

* Si $n_0 \geq n_1$, on prend $n = n_0$ dans la majoration (A). On sait alors par 14b que

$$|S_{n_0} f(x) - S_{n_0} f(x_0)| \leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq c_2 |x - x_0|^s.$$

Il vient dans ce cas

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (2^{s+2} + c_2) |x - x_0|^s$$

si bien que $f \in \Gamma^s(x_0)$ et donc $\alpha_f(x_0) \geq s$.

* Si $n_0 < n_1$, on a

$$\begin{aligned} |S_{n_1} f(x) - S_{n_1} f(x_0)| &\leq \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| \\ &\quad + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x_0)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| \\ &\quad + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x_0)| \end{aligned}$$

En combinant 14b, 15, 18b et la majoration (A) avec $n = n_1$, il vient pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ en tenant compte de $|x - x_0| \leq 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq 2^{s+2}|x - x_0|^s + c_2|x - x_0|^s + c_3|x - x_0|^s + c_5(N)|x - x_0|^{s(1-\frac{1}{N})} \\ &\leq (2^{s+2} + c_2 + c_3 + c_5(N))|x - x_0|^{s(1-\frac{1}{N})}. \end{aligned}$$

On en déduit que $f \in \Gamma^{s(1-\frac{1}{N})}(x_0)$ et donc $\alpha_f(x_0) \geq s \left(1 - \frac{1}{N}\right)$ pour tout $N \in \mathbf{N}^*$. Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient bien $\alpha_f(x_0) \geq s$.

Youpi.