ENSAE MP-2000

Première partie

I.1. On se place d'abord dans E_n, qui est de dimension finie.

S_n y est compact (car fermé et borné), et $S_n \subset \bigcup_{z \in S_n} B(z, \delta)$.

D'après la propriété de Borel-Lebesgue, on trouve $z_1, \ldots, z_M$ tels que $S_n \subset \bigcup_{k=1}^{M} B(z_k, \delta)$.

Cette inclusion utilise les boules de E_n, mais est toujours valide dans les boules de E.

Remarque : le résultat admis dans l'énoncé est le théorème de Hahn-Banach.

I.2. Moutons ce résultat par l'absurde :

On suppose que $\bigcap_{k=1}^{M} \operatorname{Ker} \varphi_k = \{0\}$, c'est à dire que $\forall k \in [1, M]$, $\varphi_k(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Soit $\Phi \ : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_M(x)) \in \mathbb{R}^M$. Par hypothèse Φ est injective donc $\dim E \leqslant \dim \operatorname{Im} \Phi \leqslant M$ qui est contradictoire avec le fait que E est de dimension infinie.

Conclusion : $\bigcap_{k=1}^{M} \operatorname{Ker} \varphi_k \neq \{0\}$ donc, quitte à normer, on peut choisir un vecteur unitaire x_{n+1} dans cet espace.

I.3. **a.** En calculant $\varphi_{j_0}(z_{j_0}+\alpha_{n+1}x_{n+1}) = 1$, on obtient $\|z_{j_0}+\alpha_{n+1}x_{n+1}\| \geq 1$, car $\|\varphi_{j_0}\| = 1$.

Soit $x'_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in E_n$ de norme 1. Grâce au 1, on sait qu'il existe $j_0 \leqslant M$ tel que $\|x'_n - z_{j_0}\| \leqslant \delta$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \right\| &= \|x'_n - z_{j_0} + z_{j_0} + \alpha_{n+1}x_{n+1}\| \\
&\geq \|z_{j_0} + \alpha_{n+1}x_{n+1}\| - \|x'_n - z_{j_0}\| \\
&\geq 1 - \delta = \frac{1}{1+\varepsilon}
\end{aligned}$$

b. • Lorsque $q \leqslant n$, l'inégalité proposée est déjà vraie par hypothèse.

• Lorsque $q = n+1$, posons $\beta = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|$.

Si $\beta \neq 0$, alors $\frac{1}{\beta} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| = 1$, et, d'après le a. $(1+\varepsilon) \left\| \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \right\| \geq 1$, d'où :

$$(1+\varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \right\| \geq \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| \geq \frac{1}{C} \left\| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \right\|$$

Si $\beta = 0$ cette inégalité est aussi vérifiée.

• Ainsi, dans tous les cas :

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \right\| \leqslant C(1+\varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \right\|.$$

I.4. Par récurrence immédiate, on a, en choisissant $\varepsilon(k) = 1/k^2$ pour tout $k \geq 1$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k\right\| \leqslant C \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k x_k\right\|$$

De plus, $\Pi_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ est croissant et convergent car $(\ln \Pi_n)$ est une série convergente. (Son terme général positif est $\ln(1+1/k^2) \sim 1/k^2$). On peut alors poser $C\,K = \lim_n \Pi_n > 0$, ce qui permet d'écrire, comme voulu :

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k\right\| \leqslant K \left\|\sum_{k=1}^{q} a_k x_k\right\|$$

Deuxième partie

Question préliminaire :

Si $x \in E_1$ on sait qu'il existe $(\xi_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n$. La suite $(T(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ($\|T(\xi_{n+p}) - T(\xi_n)\| \leqslant \|T\|.\|\xi_{n+p} - \xi_n\|$) donc elle converge dans E_2. On définit alors $\widetilde{T}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(\xi_n)$. On montre ensuite que cette définition de $\widetilde{T}(x)$ ne dépend pas de la suite (ξ_n) choisie. En effet :

En notant $\begin{cases} \widetilde{T}_1(x) = \lim T(\xi_n^1) \\ \widetilde{T}_2(x) = \lim T(\xi_n^2) \end{cases}$ où $\begin{cases} x = \lim \xi_n^1 \\ x = \lim \xi_n^2 \end{cases}$ on a : $\|T(\xi_n^1) - T(\xi_n^1)\| \leqslant \|T\|\|\xi_n^1 - \xi_n^1\|$

Et donc, en passant à la limite et grâce à la continuité de la norme, on a : $\widetilde{T}_1(x) = \widetilde{T}_2(x)$

Grâce à la linéarité de la limite on en déduit que $\widetilde{T}$ est linéaire. De plus, grâce à la continuité de la norme, on a

$$\begin{array}{ccc} \|T(x_n)\| & \leqslant & \|T\|.\|x_n\| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \|\widetilde{T}(x)\| & \leqslant & \|T\|.\|x\| \end{array}$$

donc $\widetilde{T}$ est continue et $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$. Pour montrer l'autre égalité on peut remarquer que

$$\forall x \in F, \quad T(x) = \widetilde{T}(x)$$

d'où $\forall x \in F$, $\|T(x)\| \leqslant \|\widetilde{T}\|\|x\|$ et finalement $\|T\| \leqslant \|\widetilde{T}\|$.

En conclusion : $\boxed{\begin{array}{c} T \text{ se prolonge de manière unique sur } E_1 \\ \text{en une application linéaire continue de même norme.} \end{array}}$

II.1. Supposons que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n$. On veut démontrer que ces développements sont égaux. Ceci revient à prouver, en posant $a_n = b_n - c_n$, que

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n\right) = 0 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0.)$$

On utilise $(*)$: $\|a_1 x_1\| \leqslant K \left\|\sum\limits_{k=1}^{q} a_k x_k\right\|$ et, en prenant la limite $q \to +\infty$ alors $\|a_1 x_1\| \leqslant 0$ soit $a_1 = 0$ car $x_1 \neq 0$. On prouve alors par une récurrence immédiate que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

II.2. Comme $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \leqslant K \left\|\sum_{k=1}^{n+p} a_k x_k\right\|$ pour tout p. Alors, lorsque $p \to +\infty$, grâce à la continuité de la norme, on en déduit que $\|P_n(x)\| \leqslant K\|x\|$. L'application linéaire P_n est donc continue, et $\|P_n\| \leqslant K$. Enfin P_n est un projecteur sur $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k) \subset H$.

II.3. L'inclusion $F \subset H$ est évidente car F est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de (x_n).

Pour l'inclusion $H \subset G$: si $x \in H$ alors $x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$ et $x \in G$.

Or $H \subset G$ et G est fermé, donc $\overline{H} \subset G$ puis, comme $F \subset H$ alors $G = \overline{F} \subset \overline{H}$ donc $\overline{H} = G$ par conséquent, grâce au préliminaire, P_n se prolonge en une application linéaire continue $\widetilde{P}_n$ définie sur G.

Soit $x \in G$ alors $\exists (u_p) \in F$ telle que $u_p \to x$ et $\widetilde{P}_n(u_p) = P_n(u_p) = u_p$ pour n assez grand d'où

$$\begin{aligned}\|\widetilde{P}_n(x) - x\| &\leqslant \|\widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_n(u_p)\| + \|u_p - x\| \\ &\leqslant \|\widetilde{P}_n\|\|u_p - x\| + \|u_p - x\| \\ &\leqslant (K+1)\|u_p - x\|\end{aligned}$$

On choisit alors $p \geq p_0$ pour que $\|u_p - x\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{K+1}$ et $n \geq n_0$ pour que $P_n(u_p) = u_p$ d'où

$$\|\widetilde{P}_n(x) - x\| \leqslant \varepsilon \text{ soit } \lim_{n\to+\infty} \widetilde{P}_n(x) = x.$$

II.4. • Soit $u_N = \widetilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{N} (\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x)) = \widetilde{P}_{N+1}(x)$. On a : $\lim_N u_N = x$.

Ainsi, par définition de la somme de la série, $\widetilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x)) = x$

• Montrons que $\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x) = a_{n+1}x_{n+1}$:

Soit $p \geq n+1$ alors $\widetilde{P}_p(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k(p) x_k$ (en effet $\widetilde{P}_p$ est une application de G dans $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$). On écrit alors

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{n+1}(\widetilde{P}_p(x)) - \widetilde{P}_n(\widetilde{P}_p(x)) &= P_{n+1}(\widetilde{P}_p(x)) - P_n(\widetilde{P}_p(x)) = a_{n+1}(p)x_{n+1} \\ &= (\widetilde{P}_{n+1} - \widetilde{P}_n)(\widetilde{P}_p(x)).\end{aligned}$$

Or $\widetilde{P}_p(x) \to x$ et $\widetilde{P}_{n+1} - \widetilde{P}_n$ est continue donc $(\widetilde{P}_{n+1} - \widetilde{P}_n)(\widetilde{P}_p(x)) \to \widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x)$ et $a_{n+1}(p)x_{n+1}$ a une limite qui s'écrit $a_{n+1}x_{n+1}$ ($x_{n+1} \neq 0$) d'où $\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x) = a_{n+1}x_{n+1}$.

• On a donc $u_N = \underbrace{\widetilde{P}_1(x)}_{=a_1x_1} + \sum_{n=1}^{N} a_{n+1}x_{n+1}$, soit $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \in H$.

Ceci établit en définitive que : $G \subset H$, soit, finalement : $\boxed{H = G}$.

• Conclusion : l'adhérence de $\mathrm{Vect}(x_n)$ est l'ensemble des séries convergentes de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ et, $\boxed{\text{toute suite vérifiant } (*) \text{ est une suite basique}}$.

Troisième partie

III.1. **a.** On a

$$\bigcap_{n=1}^{N+1} U_n \subset \bigcap_{n=1}^{N} U_{n+1} \subset \bigcap_{n=1}^{N} V_n \subset \bigcap_{n=1}^{N} U_n$$

et ceci pour tout n donc

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$$

ce qui donne l'égalité. Attention ! Ici il n'est pas question de limite d'ensemble mais cette double inclusion s'obtient en considérant les éléments :

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in U_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, x \in V_n$ et $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$.

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in V_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, x \in U_{n+1}$ et $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_{n+1} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$.

b. On suppose ici que E est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (F_n). Soit (V_n) une suite d'ouverts non-vides. Posons $U_{n+1} = V_n \backslash F_n$, ce qui est loisible, car $V_n \backslash F_n$ est lui aussi un ouvert, non vide (sinon F_n ne serait pas d'intérieur vide). Alors, montrons par l'absurde que $U = \emptyset$. En effet, si $x \in U$, pour tout n, $x \in V_n \backslash F_n$, d'où, pour tout n, $x \notin F_n$, ce qui est absurde.

c. On suppose ici que E est un espace de Banach.
Soit (U_n) une suite d'ouverts non-vides. Définissons alors par récurrence une suite (V_n) d'ouverts non-vides, et une suite décroissante $B(x_n, r_n)$ telle que $B(x_n, r_n) \subset V_n$, $\lim_n r_n = 0$ et $U_{n+1} \subset V_n \subset U_n$:

- <u>n=1</u> : $V_1 = U_2 \cup B(x_1, r_1/2)$, où on a choisi $B(x_1, r_1) \subset U_1$, ce qui est possible.
- <u>n¿1</u> : Il existe $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n/2) \cap U_n$. Il est toujours possible de choisir $r_{n+1} \leqslant r_n/2$. Posons alors $V_{n+1} = U_n \cap (B(x_{n+1}, r_{n+1}) \cup U_{n+1})$, qui est non vide, et qui vérifie les conditions voulues, car $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_n$.

On a, par récurrence immédiate, $r_n \leqslant 2^{-n} r_0$ donc $\lim_n r_n = 0$. L'intersection des V_n est non-vide : en effet, pour tout n, $\overline{B}(x_n, r_n/2) \subset V_n$, et, d'après le théorème rappelé dans l'énoncé, l'intersection des $\overline{B}(x_n, r_n/2)$ est non-vide. En résumé :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n \supset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{B}(x_n, r_n/2)}_{\neq \emptyset}$$

d.
- Si E est un Banach alors Paul a une stratégie gagnante.
- Si $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ alors Pierre a une stratégie gagnante.

Conclusion : E Banach et $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ sont incompatibles.

(C'est le théorème de Baire).

III.2. **a.** On peut remarquer, ce qui servira pour toute la suite, que :

$$n\overline{T(B(0,1))} = \overline{T(nB(0,1))}$$

On a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} nB(0,1) = E$, et donc, par surjectivité de T, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} T(nB(0,1)) = F$.

Ainsi, en prenant l'adhérence, et en posant $X_n = n\overline{T(B(0,1))}$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = F$$

b. Vu le 1.d. on sait que F ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{X_n} \neq \emptyset$ et comme $X_n = nX_1$, X_1 est aussi d'intérieur non vide et par conséquent il existe $c > 0$ et $y \in F$ tels que $B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

c. Évident avec un dessin.
$\overline{T(B(0,1))}$ est un ensemble convexe symétrique par rapport à 0 donc il contient la boule $B(-y_0, 2c)$ et tous les segments de droite reliant un point de la boule $B(y_0, 2c)$ à un point de la boule $B(-y_0, 2c)$.
Soit $y \in F$ tel que $\|y\| < 2c$ alors $y = \dfrac{1}{2}[(y_0 + y) + (-y_0 + y)] \in \overline{T(B(0,1))}$ ce qui signifie que $B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

d. Comme $B(0, c) \subset \overline{T(B(0,1/2))}$ alors il existe $z_1 \in B(0, 1/2)$ tel que $\|y - T(z_1)\| \leqslant \dfrac{c}{2}$ ($T(B(0,1/2))$ est dense dans $\overline{T(B(0,1/2))}$).
On procède alors par récurrence, supposons construits $z_1, \ldots, z_n$.
Vu que $B(0, \frac{c}{2^n}) \subset \overline{T(B(0, \frac{1}{2^{n+1}})}$ alors, comme ci-dessus, il existe $z_{n+1} \in B(0, \frac{1}{2^{n+1}})$ tel que $\|y - T(z_1 + \cdots + z_n) - T(z_{n+1})\| \leqslant \dfrac{c}{2^{n+1}}$ toujours grâce à la densité.

e. La suite $x_n = z_1 + \cdots + z_n$ est la somme partielle d'une série absolument convergente donc elle converge dans E vers un élément que l'on note x. Grâce à l'inégalité prouvée en d., on sait que $y = T(x)$ donc $x = T^{-1}(y)$.

f. On a $\|x_n\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|z_k\| \leqslant 1$ donc $\|x\| \leqslant 1$. Ceci se traduit encore par $T^{-1}(B(0,c)) \subset B(0,1)$ i.e. T^{-1} est continue.
On a donc démontré le théorème suivant :

> Toute application linéaire continue et bijective d'un espace de Banach dans un autre est inversible, d'inverse linéaire et **continu**.

Quatrième partie

IV.1. Montrons que A est un espace de Banach.
$(A, \|.\|_A)$ est un e.v.n.

- $\|(a_n)\|_A = 0 \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum\limits_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| = 0$
  $\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{n=1}^{N} a_n x_n = 0$
  $\Leftrightarrow$ (par récurrence sur N) $\forall N \in \mathbb{N}^*, a_N = 0$.
- $\|\lambda(a_n)\| = |\lambda|.\|(a_n)\|_A$ (propriété des bornes supérieures)
- $\|(a_n) + (b_n)\|_A \leqslant \|(a_n)\|_A + \|(b_n)\|_A$ (de même)

Soit $(a_n^{(p)})$ une suite de Cauchy de A

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M,\ \forall p, q \geq M,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{n=1}^{N} (a_n^{(q)} - a_n^{(p)}) x_n \right\| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

d'où, grâce à l'inégalité triangulaire $|a_N^{(q)} - a_N^{(p)}|.\|x_n\| \leqslant 2\varepsilon$ et comme $\|x_n\| \neq 0$, on en déduit que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $(a_N^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit a_N sa limite, par passage à la limite dans (1) quand $q \to +\infty$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M,\ \forall p, q \geq M,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_n^{(p)}) x_n \right\| \leqslant \varepsilon$$

i.e. $\|(a_n) - (a_n^{(p)})\|_A \leqslant \varepsilon$ donc $\lim\limits_{p} \left(a_n^{(p)}\right) = (a_n)$.

On vérifie aussi que $(a_n) \in A$ c.q.f.d.

IV.2. **a.** Φ est une application linéaire. Par *définition* d'une suite basique, tout élément de G s'écrit de manière unique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$. Donc Φ est bijective. De plus,

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\| = \lim_{N \to +\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| \leqslant \|(a_n)\|_A$$

i.e. $\|\Phi((a_n))\| \leqslant \|(a_n)\|_A$, donc Φ est continue.

b. Vu le III on sait que Φ^{-1} est continue i.e. si $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ alors

$$\|\Phi^{-1}(x)\| \leqslant K\|x\|$$

soit encore

$$\sup_{p \geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{p} a_n x_n \right\| \leqslant K \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\|$$
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{n=1}^{p} a_n x_n \right\| \leqslant K \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\|.$$

Comme K est indépendant de x, on peut prendre $x = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x_n$ pour $q \geq p$ et obtenir ainsi la condition $(*)$.

Cinquième partie

V.1. **a.** Soit $l \in [p, q]$ tel que $|a_l| = \max\limits_{p \leqslant k \leqslant q} |a_k|$ alors $a_l x_l = \sum\limits_{k=p}^{l} a_k x_k - \sum\limits_{k=p}^{l-1} a_k x_k$ (pour $l \geq p+1$) d'où :

$$|a_l|.\|x_l\| \leqslant \left\| \sum_{k=p}^{l} a_k x_k \right\| + \left\| \sum_{k=p}^{l-1} a_k x_k \right\|$$
$$|a_l| \leqslant 2K \left\| \sum_{k=l}^{q} a_k x_k \right\|$$

car $\|x_l\| = 1$ et où on a appliqué la propriété $(*)$ en prenant $a_k = 0$ pour $k < p$.

Si $l = p$ alors on obtient directement $|a_l| \leqslant K \left\| \sum\limits_{k=l}^{q} a_k x_k \right\|$ ce qui règle aussi ce cas.

b. Comme E est un banach, on peut utiliser le critère de Cauchy :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=p}^{q} a_k y_k\right\| &\leqslant \left\|\sum_{k=p}^{q} a_k(y_k - x_k)\right\| + \left\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\right\| \\ &\leqslant \max_{p\leqslant k\leqslant q} |a_k| \underbrace{\sum_{k=p}^{q} \|y_k - x_k\|}_{\leqslant \frac{1}{2K}} + \left\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\right\| \\ &\leqslant 2\left\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\right\| \qquad (2)\end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la question précédente. Comme la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy, il en est donc de même de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$.

Conclusion : la convergence de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ entraîne celle de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$.

Réciproque : on pose $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|x_n - y_n\| = \dfrac{1}{2L} < \dfrac{1}{2K}$ (hypothèse de l'énoncé). On remarque alors que $L > K$. On reprend alors l'inégalité (2) en échangeant les rôles de x et y :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\right\| &\leqslant \left\|\sum_{k=p}^{q} a_k(x_k - y_k)\right\| + \left\|\sum_{k=p}^{q} a_k y_k\right\| \\ &\leqslant \max_{p\leqslant k\leqslant q} |a_k| \underbrace{\sum_{k=p}^{q} \|x_k - y_k\|}_{\leqslant \frac{1}{2L}} + \left\|\sum_{k=p}^{q} a_k y_k\right\| \\ &\leqslant \frac{K}{L}\left\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\right\| + \left\|\sum_{k=p}^{q} a_k y_k\right\|\end{aligned}$$

d'où, puisque $L - K > 0$:

$$\left\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\right\| \leqslant \frac{L}{L-K}\left\|\sum_{k=p}^{q} a_k y_k\right\| \qquad (3)$$

ce qui permet de conclure comme dans le premier cas.

<u>Conclusion</u> : pour toute suite réelle (a_k), la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ converge dans E si et seulement si la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$ converge dans E.

c. On reprend ensuite la démonstration du b. La première partie de cette preuve nous donne (en remplaçant p par 1 et q par p dans l'inégalité (2)) :

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k y_k\right\| \leqslant 2\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k\right\| \leqslant 2K\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k x_k\right\|.$$

Puis, en utilisant l'inégalité (3) avec $p = 1$

$$\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k x_k\right\| \leqslant \frac{L}{L-K}\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k y_k\right\| \tag{4}$$

d'où finalement

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k y_k\right\| \leqslant \frac{2KL}{L-K}\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k y_k\right\|$$

et en conclusion la suite (y_k) vérifie la condition $(*)$.

d. T est une application linéaire. De plus, on a vu au b. que $\left\|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k\right\| \leqslant 2\left\|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k\right\|$ (par passage à la limite dans (2) avec $p = 1$) donc T est continue.

Montrons que l'écriture $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$ est unique i.e. si $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k = 0$ alors $(a_k) = 0$. On utilise pour cela l'inégalité (4) et, en passant à la limite quand q tend vers $+\infty$ on obtient

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k\right\| \leqslant \frac{L}{L-K}\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k\right\| \tag{5}$$

donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k = 0$ soit $(a_k) = 0$ car la suite (x_k) est basique. La suite (y_k) est donc elle aussi basique et on peut définir

$$T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k.$$

Grâce à l'inégalité (5) on peut affirmer directement que T^{-1} est continue.

V.2. **a.** $u = \mathrm{Id} - T$ est linéaire. De plus, $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x_k - y_k)$ d'où

$$\|u(x)\| \leqslant \underbrace{\max_{k\geq 1}|a_k|}_{\leqslant 2K\left\|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k\right\|} . \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\|x_k - y_k\|}_{\leqslant \frac{1}{2L}} \leqslant \frac{K}{L}\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k\right\| = \frac{K}{L}\|x\|$$

donc $\|u\|$ existe et $\|u\| \leqslant \dfrac{K}{L} < 1$.

b. On a immédiatement $\|u^k(x)\| \leqslant \|u\|^k.\|x\|$. La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u^k(x)$ converge absolument donc converge vu que E est un banach. On note S sa limite, qui est linéaire .En outre $\|S(x)\| \leqslant \dfrac{1}{1-\|u\|}.\|x\|$ donc S est une application continue.

Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u^k$. On a : $S_n \circ T = S_n \circ (1-u) = \mathrm{Id} - u^{n+1}$ De plus, puisque $\|u\| < 1$, $\lim_n \|u^n\| = 0$. Donc la limite de (u_n) existe et est nulle. En raisonnant de même pour $T \circ S_n$, on obtient en définitive : $S \circ T = \mathrm{Id}_E$ et $T \circ S = \mathrm{Id}_E$.

c. $Y \subset E$ par définition. De plus, si $x \in E$ alors $x = T(S(x)) = x \in Y$, ce qui établit l'autre inclusion et permet de conclure : $\boxed{Y = E}$.