ENS MP 2022, Maths C

Séries entières formelles

Walter Appel & Marc Rezzouk

A Premières propriétés

(1) La série f, évaluée en z, est de terme général $(f)_n\, z^n$, dont le module est $\left|(f)_n\, z^n\right| = (\hat{f})_n\, |z|^n$. La condition « $\hat{f}\big(\,|z|\,\big)$ » se lisant également « la série $\sum (\hat{f})_n\, |z|^n$ converge », et par comparaison de séries positives, la série $\sum (f)_n\, z^n$ converge absolument, donc converge, et

$$\left|f(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} (f)_n\, z^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{f})_n\, |z|^n = \hat{f}\big(\,|z|\,\big).$$

$$\boxed{\text{Si } \hat{f}\big(\,|z|\,\big) \text{ alors la série } f \text{ converge en } z \text{ et } \left|f(x)\right| \leqslant \hat{f}\big(\,|z|\,\big).}$$

Si l'on choisit par exemple $f = \dfrac{1}{1+z} = \sum (-1)^n\, z^n$, alors $\hat{z} = \sum z^n = \dfrac{1}{1-z}$ et

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{2}{3} < \hat{f}\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

(2) On suppose $f \prec g$.
Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant \rho(g)$, choisissons $R \in \left]|z|\,, \rho(g)\right[$, alors $\sum (g)_n\, R^n$ converge, et notamment, la suite $\big((g)_n\, R^n\big)_n$ est bornée ; en particulier,

$$\left|(f)_n\, z^n\right| \leqslant \left|(g)_n\right|\, \left|z^n\right| \leqslant \left|(g)_n\, R^n\right| \cdot |z|\, R^n = \mathrm{O}\left(\frac{z}{R}\right)^n$$

donc, $\sum (f)_n\, z^n$ converge et $|z| \leqslant \rho(f)$.
Cela prouve que $]0, \rho(g)[\subset [0, \rho(f)]$, et donc

$$\boxed{\rho(f) \geqslant \rho(g).}$$

Remarque : Note : question de cours fort étrange, à cause de la « définition » vraiment maladroite du rayon de convergence selon l'énoncé, caractérisé par une convergence même pas absolue.

(3) Soit $r > 0$. Soit f une série entière telle que $r < \rho(f)$. La suite de terme général $(f)_n\, r^n$ est bornée, on note $M > 0$ un majorant du module de cette suite. On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \left|(f)_n\right| \leqslant \frac{M}{r^n} = \frac{a}{r^{n+1}}$$

en posant $a = rM > 0$. Puisque

$$\frac{a}{r-z} = \frac{a}{r}\,\frac{1}{1-z/r} = \sum \left(\frac{a}{r^{n+1}}\right) z^n$$

on a donc bien montré que $f \prec \dfrac{a}{r-z}$.

Supposons maintenant que $f \prec \dfrac{a}{r-z}$, c'est-à-dire $\left|(f)_k\right| \leqslant a/r^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
Alors, pour tout $|z| < r$, la série $\left|(f)_k\right| z^k$ converge absolument donc converge, et donc $|z| \leqslant \rho(\hat{f})$.
Ainsi $[0, r[\subset [0, \rho(\hat{f})]$, et donc $r \leqslant \rho(\hat{f})$.

$$\boxed{r < \rho(f) \implies \exists a > 0 \quad f \prec \frac{a}{r-z} \implies r \leqslant \rho(\hat{f}).}$$

Notamment, en libérant r, on a montré que $[0, \rho(f)[\subset [0, \rho(\hat{f})]$, et donc $\rho(f) \leqslant \rho(\hat{f})$.
Or $f \prec \hat{f}$ donc la question **(2)** montre que $\rho(\hat{f}) \leqslant \rho(f)$.

$$\boxed{\rho(\hat{f}) = \rho(f).}$$

Remarque : Là encore, avec la définition usuelle du rayon d'une série entière, la propriété $\rho(f) = \rho(\hat{f})$ est une trivialité qui ne nécessite pas ces acrobaties amusantes mais sans doute destabilisantes pour les élèves.

(4) Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\left(\widehat{f \cdot g}\right)_k = \left|(f \cdot g)_k\right| = \left|\sum_{i=0}^{k} (f)_i\,(g)_{k-i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \left|(f)_i\right| \left|(g)_{k-i}\right| = \sum_{i=0}^{k} (\hat{f})_i\,(\hat{g})_{k-1} = (\hat{f} \cdot \hat{g})_k.$$

ce qui montre que

$$\boxed{\widehat{f \cdot g} \prec \hat{f} \cdot \hat{g}.}$$

Notamment, par les questions **(2)** et **(3)**,

$$\rho(f \cdot g) = \rho\big(\widehat{f \cdot g}\big) \leqslant \rho(\hat{f} \cdot \hat{g}).$$

Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant \min\big(\rho(\hat{f}), \rho(\hat{g})\big)$, les séries $\sum (\hat{f})_n\, z^n$ et $\sum (\hat{g})_n\, z^n$ convergent absolument, donc leur produit de Cauchy $\sum (\hat{f} \cdot \hat{g})_n\, z^n$ converge absolument, donc converge.
On en déduit que $\rho(\hat{f} \cdot \hat{g}) \geqslant \min\big(\rho(\hat{f}), \rho(\hat{g})\big)$ et donc, en réutilisant la question **(3)**,

$$\boxed{\rho(f \cdot g) \geqslant \min\big(\rho(f), \rho(g)\big).}$$

Remarque : Encore une fois, les propriétés habituelles du cours permettent de démontrer en une ligne la deuxième propriété sans passer par la première. En clair, un étudiant risque de perdre plus de temps à essayer de comprendre ce que pense le concepteur du sujet que de (re)démontrer les choses de manière élémentaire.

B Composition

Remarquons avant de commencer que, si $g \in O_1$, alors $g^k \in O_k$ (ce sera prouvé dans la question qui suit, mais c'est assez immédiat), et donc

$$(f \circ g)_m = \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k\, (g^k)_m, \tag{$*$}$$

la somme étant en réalité finie.

(5) On commence par vérifier un petit lemme très simple :

Lemme 1 *Si $\phi \in O_k$ et $\psi \in O_\ell$, alors $\phi \cdot \psi \in O_{k+\ell}$.*

En effet, pour tout $i \leqslant k+\ell$, on peut calculer $(\phi \cdot \psi)_i = \sum_{j=0}^{i} (\phi)_i\,(\psi)_{i-j} = 0$ car dans cette somme, si $j < k$ alors $(\phi)_i = 0$, tandis que, si $j > k$ alors $i - j < \ell$ et $(\psi)_{i-j} = 0$.
Par récurrence, on en déduit que

$$\boxed{h^r \in O_{r\ell}.}$$

Soit $m < n\ell$; alors

$$(f \circ h)_m = \sum_{k=0}^{m} (f)_k\, (h^k)_m.$$

Dans cette somme, si $k < n$ alors $(f)_k = 0$, et si $k > n$, alors $h^k \in O_{k\ell} \subset O_{n\ell}$, donc $(h^k)_m = 0$. Ainsi $(f \circ h)_m = 0$.

$$\boxed{f \circ h \in O_{n\ell}.}$$

De manière générale, on remarquera aussi ce résultat, extrêmement utile pour la suite :

Lemme 2 *Si $\phi \in O_k$ et $\psi \in O_\ell$, alors $(\phi \cdot \psi)_m$ ne dépend que des coefficients $(\phi)_k, \ldots, (\phi)_{m-k}$ et $(\psi)_k, \ldots, (\psi)_{m-\ell}$. Notamment, si $\psi \in O_\ell$, alors $(\psi^k)_m$ ne dépend que des $(\psi)_i$ pour $\ell \leqslant i \leqslant m - k\ell$.*

Invoquons maintenant la structure d'algèbre commutative de $\mathbf{C}[[z]]$ pour utiliser une formule type « binôme de Newton » :

$$(g+h)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g^i \cdot h^{k-i}.$$

On peut maintenant calculer, pour un entier $m \leqslant n+\ell-1$,

$$\begin{aligned}
\big(f\circ(g+h)\big)_m &= \sum_{k=0}^{m}(f)_k\,\big((g+h)^k\big)_m = \sum_{k=0}^{m}(f)_k\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}g^i\cdot h^{k-i}\right)_m\\
(f\circ g)_m &= \sum_{k=0}^{m}(f)_k\,(g^k)_m\\
\big(f\circ(g+h)-f\circ g\big)_m &= \sum_{k=0}^{m}(f)_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\underbrace{g^i\cdot h^{k-i}}_{\in O_{i+(k-i)\ell}}\right)_m
\end{aligned}$$

Or, dans cette dernière somme :
— Si $k<n$, alors $(f)_k=0$.
— Si $k\geqslant n$, puisque la fonction affine $\phi : i\mapsto i+(k-i)\ell$ est décroissante et vérifie donc pour $i=0,\dots,k-1$

$$\phi(i)\geqslant\phi(k-1)=k-1+\ell\geqslant n-1+\ell\geqslant m$$

ce qui montre que $(g^i\cdot h^{k-i})_m=0$; ainsi, le second facteur est nul.
Au final, on a bien $\big(f\circ(g+h)-f\circ g\big)_m=0$.

$$\boxed{f\circ(g+h)-f\circ g\in O_{n+\ell-1}.}$$

(6) Pour tout m entier, on a

$$\begin{aligned}
\big|(f\circ g)_m\big| &\leqslant \sum_{k=0}^{m}\big|(f)_k\big|\,\big|(g^k)_m\big| = \sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\widehat{g^k})_m\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\hat g^k)_m = (\hat f\circ\hat g)_m. && \textit{car par (4), } \widehat{g^k}\prec\hat g^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{f\circ g}\prec\hat f\circ\hat g.}$$

Choisissons x tel que $0\leqslant\hat g(x)<\rho(f)$; c'est possible car $\hat g$ est continue au voisinage de 0 et $\hat g(0)=0$. On effectue alors, dans $\mathbf{R}^+\cup\{+\infty\}$, des calculs qui, on le rappelle, sont notamment justifiés dès qu'on a prouvé qu'une des sommes est finie :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}(\hat f\circ\hat g)_m\,x^m &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\widehat{g^k})_m\,x^m\\
&\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\hat g^k)_m\,x^m\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(\hat f)_k\,(\hat g^k)_m\,x^m && \textit{si } k>m,\ \textit{alors } (g^k)_m=0\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\hat f)_k\sum_{m=0}^{\infty}(\hat g^k)_m\,x^m && \textit{Fubini positif}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\hat f)_k\,\big(\hat g(x)\big)^k < +\infty.
\end{aligned}$$

Notamment, la série entier $\hat f\circ\hat g$ converge en $x>0$, donc $\rho(\hat f\circ\hat g)>0$. On en déduit que

$$\rho(f\circ g)\underset{\textbf{(3)}}{=}\rho\big(\widehat{f\circ g}\big)\underset{\textbf{(2)}}{\geqslant}\rho(\hat f\circ\hat g)>0.$$

$$\boxed{\text{Si } \rho(f)>0 \text{ et } \rho(g)>0, \text{ alors } \rho(f\circ g)>0.}$$

(7) On suppose $h\prec g$, c'est-à-dire $\big|(h)_k\big|\leqslant g_k$ pour tout $k\in\mathbf{N}$. Remarquons d'abord que la question **(4)** montre que $\widehat{h^k}\prec\hat h^k$ et que, pour des fonctions à coefficients positifs, une récurrence immédiate montre que

$$\phi\prec\phi \implies \phi^k\prec\psi^k$$

donc

$$\widehat{h^k}\prec\hat h^k\leqslant g^k.$$

Alors pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$\left|(f \circ h)_m\right| = \left|\sum_{k=0}^{m} (f)_k \, (h^k)_m\right| \leqslant \sum_{k=0}^{m} (f)_k \, (g^k)_m = (f \circ g)_m.$$

$$\boxed{\text{Si } h \prec g \text{ et } f, g \text{ à coefficients positifs, alors } f \circ h \prec f \circ g.}$$

(8) On peut reprendre exactement tout le calcul de la question **(6)**, en manipulant des sommes de réels positifs ou infinis :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} (f \circ g)_m \, r^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (f)_k \, (g^k)_m \, r^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, (g^k)_m \, r^m && \textit{si } k > m, \textit{ alors } (g^k)_m = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \sum_{m=0}^{\infty} (g^k)_m \, r^m && \textit{Fubini positif} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, \big(g(z)\big)^k = f\big(g(r)\big).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ à coefficients positifs et si } r \in [0, +\infty], \text{ alors } f \circ g(r) = f\big(g(r)\big).}$$

(9) Si $|z| < \rho(\hat{f} \circ \hat{g})$, alors ce qui précède montre que la famille

$$\big((f)_k \, (g^k)_m \, z^m\big)_{(m,k) \in \mathbf{N}^2}$$

est sommable, on peut donc effectuer le même calcul, toutes les sommes « intermédiaires » étant bien définies (c'est une des conséquences du théorème de sommation par paquets)

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} (f \circ g)_m \, z^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, (g^k)_m \, z^m && \textit{si } k > m, \textit{ alors } (g^k)_m = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \sum_{m=0}^{\infty} (g^k)_m \, z^m && \textit{Fubini} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, \big(g(z)\big)^k = f\big(g(z)\big).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } |z| < \rho(\hat{f} \circ \hat{g}), \text{ alors } f \circ g(z) = f\big(g(z)\big).}$$

(10) Soient f, g, h des séries entières, avec $g, h \in O_1$.
Tout d'abord, énonçons un petit lemme, équivalent pour les séries formelles de la formule évidente pour des produits et compositions de fonctions « $(\phi\psi) \circ h = (\phi \circ h) \cdot (\psi \circ h)$ ».

Lemme 3 *Si $h \in O_1$, alors $(\phi \cdot \psi) \circ h = (\phi \circ h) \cdot (\psi \circ h)$.*

Munis de ce lemme, nous pouvons nous lancer dans le calcul formel, en utilisant la forme $(*)$ du produit de composition. Toutes les sommes que nous manipulons sont en réalité *finies*.
Soit $m \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\big((f \circ g) \circ h\big)_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \, (g^\ell)_k\right) (h^k)_m \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (g^\ell)_k \, (h^k)_m}_{(g^\ell \circ h)_m} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \, (g^\ell \circ h)_m \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \, \big((g \circ h)^\ell\big)_m && \textit{grâce au lemme 3, } g^\ell \circ h = (g \circ h)^\ell \\
&= \big(f \circ (g \circ h)\big)_m.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).}$$

Montrons maintenant le lemme 3. Toujours en utilisant la forme $(*)$ du produit de composition, on a pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
\big((\phi\psi) \circ h\big)_m &= \sum_{k=0}^{\infty} (\phi\psi)_k \, (h^k)_m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} (\phi)_i \, (\psi)_j \, (h^{i+j})_m \\
&= \sum_{i,j \in \mathbf{N}} (\phi)_i \, (\psi)_j \, (h^{i+j})_m && \textit{dépaquetage} \\
&= \sum_{i,j \in \mathbf{N}} (\phi)_i \, (\psi)_j \sum_{k+\ell=m} (h^i)_k \, (h^j)_\ell && \textit{produit de Cauchy} \\
&= \sum_{k+\ell=m} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\phi)_i \, (h^i)_k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\psi)_j \, (h^j)_\ell \right) \\
&= \sum_{k+\ell=m} (\phi \circ h)_k \, (\psi \circ h)_\ell = \big((\phi \circ h) \cdot (\psi \circ h)\big)_m,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme, et de la question.

C Série majorante

(11) Procédons par analyse. Soit h une fonction développable en série entière vérifiant la relation

$$\forall x \in \left]-r, r\right[\qquad h(x) = a \left(x + \frac{h(x)^2}{b - h(x)} \right).$$

Fixons momentanément x dans $\left]-r, r\right[$; alors le réel $h(x)$ est solution de l'équation du second degré

$$(a+1)\, h(x)^2 - (ax+b)\, h(x) + abx = 0,$$

donc vaut

$$h(x) = \frac{ax + b \pm \sqrt{\Delta(x)}}{2(a+1)} \qquad \Delta(x) = b^2\big(1 + \phi(x)\big) \qquad \phi(x) = a^2 b^{-2}\, x^2 - 2ab^{-1}(2a+1)x.$$

Le choix de signe négatif s'impose pour avoir d'une part la condition $h(0) = 0$, et d'autre part la continuité de la fonction.

On *pose* donc, après avoir fixé un voisinage $\left]-r, r\right[$ sur lequel la fonction ϕ prend des valeurs incluses dans $\left]-1, 1\right[$,

$$\forall x \in \left]-r, r\right[\qquad h(x) := \frac{ax + b - \sqrt{\Delta(x)}}{2(a+1)} \qquad \Delta(x) = b^2\big(1 + \phi(x)\big) \qquad \phi(x) = a^2 b^{-2}\, x^2 - 2ab^{-1}(2a+1)x.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{\Delta(x)}$ est la composée de $x \mapsto b\sqrt{1+x}$ et de la fonction $\phi \in O_1$, toutes deux développable en série entière, donc est développable en série entière d'après la question **(9)**, ce qui montre que h est développable en série entière.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe } r > 0 \text{ et } h : \left]-r, r\right[\to \mathbf{R} \text{ développable en série entière telle que } h(0) = 0 \\ \text{et} \\ \qquad \forall x \in \left]-r, r\right[\qquad h(x) = a \left(x + \dfrac{h(x)^2}{b - h(x)} \right). \end{array}}$$

(12) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $(g)_k \leqslant (h)_k$. On rappelle que l'on a $g, h \in O_1$,

$$g \prec a(I + f \circ g) \qquad h = a(I + f \circ h)$$

et que f est à coefficients strictement positifs.

- **Au rang 0**, on a bien $h_0 = g_0 = 0$.

- **Soit k un entier** tel que $0 \leqslant (g)_i \leqslant (h)_i$ pour $i = 0, \dots, k$. Alors, les coefficients de $f \circ g$ étant tous positifs

$$(g)_{k+1} \leqslant a\big[\delta_{1,i} + (f \circ g)_{k+1}\big].$$

Or

$$(f \circ g)_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} (f)_{k+1}\,(g^j)_{k+1}$$

et d'après le lemme 2, $(g^j)_{k+1}$ ne dépend que $g_1, \dots, g_k$, sous forme de somme de produits. D'après l'hypothèse de récurrence, on a notamment

$$(g^j)_{k+1} \leqslant (h^j)_{k+1}$$

pour tous les termes concernés ; les f_i étant tous positifs, on a donc

$$(f \circ g)_{k+1} \leqslant \sum_{j=1}^{k+1} (f)_{k+1}\,(h^j)_{k+1} = (f \circ h)_{k+1}$$

puis

$$(g)_{k+1} \leqslant a\big[\delta_{1,i} + (f \circ g)_{k+1}\big] \leqslant \big[\delta_{1,i} + (f \circ h)_{k+1}\big] = (h)_{k+1}.$$

Par récurrence, on a donc montré que

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant (g)_k \leqslant (h)_k.}$$

Cela montre que $g \prec h$ et donc d'après **(2)**, $\rho(g) \geqslant \rho(h) > 0$.

$$\boxed{\rho(g) > 0.}$$

D Série réciproque

(13) Procédons par analyse-synthèse.

Analyse

Soit $h \in O_1$ vérifiant $h \circ f = I$. Alors bien sûr $(h)_0 = 0$, puis $1 = (h \circ f)_1 = (h)_1(f)_1$, donc $(h)_1 = 1/\lambda$.
De plus, pour tout $m \geqslant 2$,

$$0 = (h \circ f)_m = \sum_{k=1}^{m} (h)_k\,(f^k)_m$$

donc notamment

$$(h)_m\,(f^m)_m = -\sum_{k=1}^{m-1} (h)_k\,(f^k)_m$$

avec $(f^m)_m = \lambda^m \neq 0$.
Ainsi, la suite de terme général $(h)_m$ vérifie une relation de récurrence, et est donc entièrement déterminée.

Synthèse

Si l'on pose $(h)_0 := 0$, $(h)_1 := 1/\lambda$ et

$$(h)_m := -\frac{1}{\lambda^m} \sum_{k=1}^{m-1} (h)_k\,(f^k)_m$$

pour tout $m \geqslant 2$, alors la série h vérifie bien les conditions voulues.

$$\boxed{\text{Il existe une unique série } h \in O_1 \text{ telle que } h \circ f = I \text{ ; de plus, } (h)_1 = 1\lambda.}$$

(14) Le travail est à peu près le même, puisqu'une série adéquate vérifie $(g)_0 = 0$, $(g)_1 = 1/\lambda$ et pour tout $m \geqslant 2$,

$$0 = (f \circ g)_m = \sum_{k=1}^{m} (f)_k\,(g^k)_m.$$

Or, d'après le lemme 2, pour tout $k \geqslant 2$, le terme $(g^k)_m$ ne dépend que de $(g)_1, \dots, (g)_{m-1}$; dans la somme, le seul terme faisant intervenir $(g)_m$ est donc $(f)_1\,(g)_m = \lambda\,(g)_m$. Ainsi la suite g vérifie de même une relation de récurrence, et est donc définie de manière unique.

$$\boxed{\text{Il existe une unique série } g \in O_1 \text{ telle que } f \circ g = I.}$$

(15) Puisque $h \circ f = f \circ g = I$, on peut écrire

$$\begin{aligned} h &= h \circ (f \circ g) \\ &= (h \circ f) \circ g && \textit{d'après } \textbf{\textit{(10)}} \\ &= g. \end{aligned}$$

$$\boxed{g = h.}$$

(16) Puisque $I = f \circ g = (\lambda I + F) \circ g$, on a

$$I = \lambda I \circ g + F \circ g = \lambda g + F \circ g$$

puisque $I \circ g = g$. On peut donc écrire

$$g = \frac{1}{\lambda}(I - F \circ g)$$

puis par inégalité triangulaire

$$\hat{g} \prec \frac{1}{\lambda}(I + \widehat{F \circ g}) \prec \frac{1}{\lambda}(I + \hat{F} \circ \hat{g}). \qquad \textit{question } \textbf{\textit{(6)}}$$

$$\boxed{\hat{g} \prec \tfrac{1}{\lambda}(I + \hat{F} \circ \hat{G}).}$$

Puisque $\rho(F) > 0$, choisissons un réel r tel que $0 < r < \rho(F)$.
Puisque $F \in O_2$, on peut noter $G = F/z^2$ la série de terme général $(G)_k = (F)_{k-2}$. On bien évidemment $\rho(G) = \rho(F)$. D'après la question **(3)** [1], il existe donc $a > 0$ telle que $\hat{G} \prec \frac{a}{r-z}$, et donc

$$\hat{F} \prec \phi := a\,\frac{z^2}{r - z}.$$

On a donc grâce à la question **(7)**

$$\hat{g} \prec \frac{1}{\lambda}(I + \hat{F} \circ \hat{g}) \prec \frac{1}{\lambda}(I + \phi \circ \hat{g}) = \frac{1}{\lambda}\left(I + a\frac{\hat{g}^2}{r - \hat{g}}\right) \prec \alpha\left(I + \frac{\hat{g}^2}{r - \hat{g}}\right)$$

en posant $\alpha := \frac{1}{|\lambda|}\max(a, 1)$.
On peut alors appliquer le résultat de la partie C pour obtenir

$$\boxed{\rho(g) > 0.}$$

(17) Remarquons que $f^\dagger + F \circ f^\dagger - I = 0$. Notons $f^\dagger = I + [G]_d + H$ avec $H \in O_{d+1}$, on a donc

$$G = -F \circ \big(I + [G]_d + H\big)).$$

On utilise le dernier point de la question **(5)** :

$$F \circ \big(I + [G]_d + H\big) - F \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{2+(d+1)-1} = O_{d+2}$$

avec $n \leftarrow 2$, $\ell \leftarrow d+1$ (et $f = F$, $g = I + [G]_d$, $h = H$).
En conclusion, $G - [G]_{d+1} \in O_{d+2}$ et

$$\underbrace{F \circ \big(I + [G]_d + H\big)}_{=G} - F \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{d+2}$$

donc, en sommant,

$$\boxed{[G]_{d+1} + F \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{d+2}.}$$

(18) Effectuons une récurrence sur $d \geqslant 2$.

- **Pour $d = 1$,** $[G]_2 + F \in O_3$ (puisque $[G]_1 = 0$) donc

$$[\widehat{G}]_2\big((1-\alpha)s\big) = [\widehat{F}]_2\big((1-\alpha)s\big) \leqslant \widehat{F}\big((1-\alpha)s\big) \leqslant \widehat{F}(s) \leqslant \alpha s.$$

1. On rappelle le raisonnement : la suite de terme général $(G)_k\, r^k$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe a telle que $(\hat{G})_k \leqslant a/r^{k+1}$ pour tout $k \geqslant 0$.

- **Soit $d \geqslant 2$** et supposons le résultat vrai pour d.
D'après la question précédente, $[G]_{d+1} = -\left[F \circ \big(I + [G]_d\big)\right]_{d+1}$, or

$$\left[F \circ \big(I + [G]_d\big)\right]_{d+1} = [F]_{d+1} \circ \big(I + [G]_d\big).$$

(En effet, d'après la question **(5)**, $\big(F - [F]_{d+1}\big) \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{d+2}$.)
Ainsi,

$$\begin{aligned}
[\widehat{G}]_{d+1}((1-\alpha)s) &\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}\big((1-\alpha)s + [\widehat{G}]_d\big((1-\alpha)s\big)\big) \\
&\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}\big((1-\alpha)s + [\widehat{G}]_d(s)\big) && \textit{par monotonie} \\
&\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}\big((1-\alpha)s + \alpha s\big) && \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}(s) \leqslant \widehat{F}(s) \leqslant \alpha s.
\end{aligned}$$

E Linéarisation formelle

(19) Procédons encore par analyse-synthèse.

Analyse

On suppose qu'il existe une série $H \in O_2$ telle que $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$. Pour tout $m \geqslant 2$, on a donc

$$\big(H \circ (\lambda I) - \lambda H\big)_m = h_m\,(\lambda^m - \lambda) = \big(F \circ (I + H)\big)_m.$$

Or, $F \in O_2$, donc $\big(F \circ (I + H)\big)_m$, ne faisant intervenir que des puissances $k \geqslant 2$ de $(I + H)$, ne dépend que des coefficients $(h)_1, \dots, (h)_{k-1}$. Puisque $m \geqslant 2$, la quantité $\lambda^m - \lambda = \lambda(\lambda^{m-1} - 1)$ est toujours non nul par hypothèse, on en déduit que la suite H vérifie donc une relation de récurrence et est entièrement déterminée.

Synthèse

On définit $(H)_0 = (H_1) = 0$ et la suite H par la relation de récurrence

$$\forall m \geqslant 2 \qquad h_m = \frac{1}{\lambda(\lambda^{m-1} - 1)}\big(F \circ (I + H)\big)_m.$$

Alors $H \in O_2$ et elle vérifie bien la relation $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$.

(20) Posons $h = I + H$. La relation $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$ s'écrit

$$H \circ (\lambda I) = \underbrace{(F + \lambda I)}_{f} \circ h - \lambda \underbrace{I \circ h}_{h} + \lambda H$$

ou encore

$$f \circ h = H \circ (\lambda I) + \lambda I = h \circ (\lambda I).$$

En composant par $h^\dagger$ à gauche, on obtient

$$h^\dagger \circ f \circ h = \lambda I$$

ou encore

$$\boxed{h^\dagger \circ f \circ h = \lambda z.}$$

F Linéarisation, cas hyperbolique

(21) On propose deux méthodes.
1^re^ méthode La seconde inégalité triangulaire montre que, pour tout $m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
|\lambda^m - \lambda| = |\lambda|\,(\lambda^{m-1} - 1) &\geqslant |\lambda| \cdot \big|\,|\lambda|^{m-1} - 1\big| \\
&\geqslant |\lambda| \cdot \big|\,|\lambda| - 1\big| \underbrace{\big(\,|\lambda|^{m-2} + \cdots + |\lambda| + 1\big)}_{\geqslant 1}
\end{aligned}$$

donc, en posant $\omega := |\lambda| \cdot \big|\,|\lambda| - 1\big| > 0$,

$$\boxed{\text{On a trouvé } \omega > 0 \text{ tel que } |\lambda^m - \lambda| \geqslant \omega \text{ pour tout } m \geqslant 2.}$$

2^e^ méthode Dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, la suite $\big(|\lambda^m - \lambda|\big)_m$ ne s'annule pas et admet une limite valant $|\lambda| > 0$ (si $|\lambda| < 1$) ou $+\infty$ (si $|\lambda| > 1$). Il existe un rang m_0 tel que

$$\forall m \geqslant m_0 \qquad |\lambda^m - \lambda| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

Il suffit alors de poser $\omega = \min\big\{\, |\lambda^m - \lambda| \ ; 2 \leqslant m \leqslant m_0 \big\} \cup \{|\lambda|/2\}$.

$$\boxed{\text{Il existe } \omega > 0 \text{ tel que } |\lambda^m - \lambda| \geqslant \omega \text{ pour tout } m \geqslant 2.}$$

(22) Pour tout $m \geqslant 2$,

$$(h)_m \cdot (\lambda^m - \lambda) = \big(H \circ (\lambda I) - \lambda H\big)_m = \big(F \circ (I + H)\big)_m$$

(la relation est encore vraie pour $m = 0$ et $m = 1$, les deux membres étant nuls, mais ne nous intéresse pas ici), donc

$$\big|(h)_m\big| \leqslant \frac{1}{\omega} \big|\big(F \circ (I + H)\big)_m\big|$$

ce qui s'écrit

$$\hat{H} \prec \frac{1}{\omega} \widehat{F \circ (I + H)} \underset{\textbf{(6)}}{\prec} \frac{1}{\omega} \hat{F} \circ (I + \hat{H}).$$

$$\boxed{\hat{H} \prec \tfrac{1}{\omega} \hat{F} \circ (I + \hat{H}).}$$

(23) Notons $G = I + \hat{H}$, de sorte que G est à coefficients positifs et $G \in O_1$. La relation précédente s'écrit

$$G = I + \hat{H} \prec I + \frac{1}{\omega} \hat{F} \circ G \prec \beta\big(I + \hat{F} \circ G\big) \qquad \text{avec} \qquad \beta = \max\left(\frac{1}{\omega}, 1\right)$$

et toutes les conditions sont réunies pour appliquer de nouveau la partie C comme à la question **(16)** : $\hat{F}$ et G sont à coefficients positifs, $G \in O_1$ et $\hat{F} \in O_2$, et $\rho(\hat{F}) = \rho(F) = \rho(f) > 0$. On en déduit que $\rho(G) > 0$, donc, puisque $\rho(G) = \rho(\hat{H}) = \rho(H) = \rho(h)$:

$$\boxed{\rho(h) = \rho(H) > 0.}$$

G Linéarisation, cas elliptique

(24) Écrivons F sous la forme $\widehat{F}(r) = r^{m+1} H(r)$. Puisque $\dfrac{\widehat{F}(r)}{r} \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0$, il existe $r_0 \in \left]0, 1\right[$ tel que $0 \leqslant \widehat{F}(r) \leqslant r$. Soit $\gamma \in \left]0, 1\right[$. Pour tout $r \in [0, \gamma r_0]$,

$$0 \leqslant \widehat{F}(r) = r^{m+1} H(r) \leqslant \gamma^m r_0^m r\, H(r_0) \leqslant \gamma^m\, r$$

car H est croissante sur $[0, r_0]$ et $r_0^m\, H(r_0) = \widehat{F}(r_0) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } r \in [0, \gamma r_0],\ \hat{F}(r) \leqslant \gamma^m\, r.}$$

(25) $P \circ (\lambda I) - \lambda P = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{(F)_k}{\lambda^k - \lambda} (\lambda^k - \lambda) z^k = \sum_{k=m+1}^{2m} (F)_k z^k = [F]_{2m}$ car $F \in O_{m+1}$.

Enfin, puisque $\big(P \circ (\lambda I) - \lambda P - F\big)_{2m} = 0$,

$$\boxed{P \circ (\lambda I) - \lambda P - F \in O_{2m+1}.}$$

$(I + P) \circ (R + I) = I$ donc $R + P = -P \circ R \in O_{m+1}$ car $R \in O_1$, $P \in O_{m+1}$ en appliquant la question **(5)**. Ainsi, $R = P - P \circ R \in O_{m+1}$, puis $R + P = -P \circ R \in O_{(m+1)^2} \subset O_{2m+1}$ car $R \in O_{m+1}$, $P \in O_{m+1}$ en appliquant **(5)**.

$$\boxed{R + P \in O_{2m+1}.}$$

Pour $r \in [0, \gamma_m r_0]$,

$$\begin{aligned} \widehat{P}(r) &\leqslant \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{\big|(F)_k\big|}{\min\left(\omega_{m+1}, \cdots, \omega_{2m}\right)}\, r^k \leqslant \frac{1}{\alpha_m}\, \widehat{F}(r) \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha_m}\, \gamma_m^m\, r = \frac{\alpha_m^2}{\alpha_m}\, r = \alpha_m\, r. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall r \in [0, \gamma_m r_0]\,, \qquad \widehat{P}(r) \leqslant \alpha_m\, r.}$$

Soit $r \in [0, (1-\alpha_m)\gamma_m r_0]$; on le note sous la forme $r = (1-\alpha_m)\gamma_m r_0 u$ avec $u \in [0,1]$.
On utilise la question **(18)**, avec $F \leftarrow R$ et $G \leftarrow R$, $s = \gamma_m r_0 u$ (le cas $u = 0$ étant valide),

$$\hat{R}\big((1-\alpha_m)s\big) \leqslant \alpha_m s,$$

donc

$$\hat{R}(r) = R\big((1-\alpha_m)\gamma_m r_0 u\big) \leqslant \alpha_m \gamma_m r_0\, u = \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m} r.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } r \in [0, (1-\alpha_m)\gamma_m r_0],\ \hat{R}(r) \leqslant \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m} r.}$$

(26) Puisque $(I+R)\circ(I+P) = I$,

$$G = \big[(I+R)\circ(\lambda I + F) - \lambda(I+R)\big]\circ(I+P).$$

Montrons que $(I+R)\circ(\lambda I+F) - \lambda(I+R) \in O_{2m+1}$ et on conclura par **(5)** que $G \in O_{2m+1}$ car $I + F \in O_1$.

$$(I+R)\circ(\lambda I+F) - \lambda(I+R) = R\circ(\lambda I + F) - \lambda R + F.$$

Or d'après **(5)**, et en prenant $f = R$, $g = \lambda I$ et $h = F$, $R\circ(\lambda I+F) - R\circ(\lambda I) \in O_{2m+1}$ car $R \in O_{2m+1}$.
On est ramené à montrer que $A = R\circ(\lambda I) - \lambda R + F \in O_{2m+1}$.
Mais on sait que $B = P\circ(\lambda I) - \lambda P - F \in O_{2m+1}$ (question **(25)**), et

$$A + B = \underbrace{(R+P)\circ(\lambda I)}_{\in O_{2m+1} \text{par } \textbf{(25)} \text{ et } \textbf{(5)}} \; - \underbrace{\lambda(R+P)}_{\in O_{2m+1}} \in O_{2m+1}.$$

Donc on a bien $A = R\circ(\lambda I) - \lambda R + F \in O_{2m+1}$, et finalement

$$\boxed{G \in O_{2m+1}.}$$

(27) Puisque $G + \lambda I = (I+R)\circ(\lambda I + F)\circ(I+P)$,

$$\widehat{G+\lambda I} = \widehat{G} + I \prec (I+\widehat{R})\circ(I+\widehat{F})\circ(I+\widehat{P}),$$

donc par la question **(8)**, pour $r \in \left]0, \dfrac{1-\alpha_m}{(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}\gamma_m r_0\right[\subset]0, (1-\alpha_m)\gamma_m r_0[\subset]0, \gamma_m r_0[$,

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(r) + r &\leqslant (I+\widehat{R})\circ(I+\widehat{F})(r + \widehat{P}(r))\\
&\leqslant (I+\widehat{R})\circ(I+\widehat{F})(r + \alpha_m r)\\
&\leqslant (I+\widehat{R})\,\underbrace{\big((1+\alpha_m)r + \alpha_m^2(1+\alpha_m)r\big)}_{=(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)r} && \textit{car } \widehat{F}(s) \leqslant \gamma_m^m s = \alpha_m^2 s\\
&\leqslant \left((1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2) + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)\right) r && \textit{car } \widehat{R}(u) \leqslant \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m} u\\
&\leqslant r\left(1 + \alpha_m + (1+\alpha_m)\alpha_m^2 + \frac{\alpha_m(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m}\right).
\end{aligned}$$

ce qui montre la première inégalité.
Enfin,

$$\alpha_m + (1+\alpha_m)\alpha_m^2 + \frac{\alpha_m(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m} = \alpha_m \frac{\alpha_m + \alpha_m^2 + 2}{1-\alpha_m} \leqslant 1$$

car $\alpha_m \leqslant \dfrac{1}{5}$ et la fonction $\phi : t \mapsto t\dfrac{t+t^2+2}{1-t}$ est croissante sur $[0,1[$ et $\phi(1/5) = \dfrac{31}{125} \leqslant 1$.

$$\boxed{\widehat{G}(r) \leqslant \left(\alpha_m + (1+\alpha_m)\alpha_m^2 + \frac{\alpha_m(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m}\right) r \leqslant r.}$$

(28) On effectue bien sûr une récurrence sur k. On pose $m_k = 2^k$.
Par récurrence: $F_k \in O_{m_k+1}$, la question **(25)** permet de définir $P_k \in O_{m_k+1}$ (avec F_k au lieu de F) pour $m = 2^k$ puis $G_k \in O_{2m_k+1} = O_{m_{k+1}+1}$ que l'on note F_{k+1} et ainsi de suite.
On a bien $\lambda I + F_{k+1} = (I+P_k)^\dagger \circ (\lambda I + F_k)\circ(I+P_k)$.

On vérifie, en appliquant **(24)** à **(27)**, que si pour tout $r \in [0, r_k]$, $\widehat{F_k}(r) \leqslant r$, alors $\widehat{P_k}(r) \leqslant \alpha_{2^k} r$ et pour $r \in [0, r_{k+1}]$,

$$\widehat{G_k}(r) = \widehat{F_{k+1}}(r) \leqslant r.$$

En particulier, $\widehat{F_k}(r_k) \leqslant r_k$ et $\widehat{P_k}(r_{k+1}) \leqslant \alpha_{2^k} r_{k+1}$.
Il reste à montrer que $\alpha_{2^k} r_{k+1} \leqslant r_k - r_{k+1}$ c'est-à-dire que

$$1 \geqslant \gamma_{2^k} \frac{1-\alpha_{2^k}}{1+\alpha_{2^k}^2}$$

ce qui est immédiat.

$$\boxed{\text{On a bien pu construire les suites } (F_k)_k \text{ et } (P_k)_k.}$$

(29) Commençons par remarquer que

$$\lambda I + F_k = h_k^{\dagger} \circ (\lambda I + F) \circ h_k.$$

- La suite $(r_k)_{k \geqslant 0}$ est décroissante positive donc converge vers $r_\infty \geqslant 0$.

$$\boxed{r_\infty \text{ est bien définie.}}$$

- On a pour $k \geqslant 1$, $h_k = h_{k-1} \circ (I + P_{k-1})$ donc

$$\hat{h}_k \prec \hat{h}_{k-1} \circ \left(I + \hat{P}_{k-1}\right)$$

donc $\hat{h}_k(r_k) \leqslant \hat{h}_{k-1}(r_k + \hat{P}_{k-1}(r_k)) \leqslant \hat{h}_{k-1}(r_k + r_{k-1} - r_k) = \hat{h}_{k-1}(r_{k-1})$.
Ainsi, $\hat{h}_k(r_k) \leqslant \hat{h}_1(r_1) = r_1 + \hat{P}_0(r_1) \leqslant r_1 + r_0 - r_1 = r_0$.
- En particulier $\hat{h}_k(r_\infty) \leqslant \hat{h}_k(r_k) \leqslant r_0$ par monotonie.
Remarquons, point essentiel, que $h_k - h_{k-1} = h_{k-1} \circ (I + P_{k-1}) - h_{k-1} \circ I \in O_{2^{k-1}}$ par **5)** car $P_{k-1} \in O_{1+2^{k-1}}$.
Donc les premiers coefficients de la suite (h_k) se stabilisent, notons $\tilde{h}$ la série telle que $\left[\tilde{h}\right]_{2^k} = [h_k]_{2^k}$

Lemme 4 *$h = \tilde{h}$, et donc $[h_k]_{2^k} = [h]_{2^k}$.*

Alors

$$r_0 \geqslant \hat{h}_k(r_\infty) \geqslant (\hat{h}_k)_{2^k}(r_\infty) = (\hat{h})_{2^k}(r_\infty) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \hat{h}(r_\infty).$$

Ainsi, si $r_\infty > 0$, on peut affirmer que

$$\boxed{\rho(\hat{h}) = \rho(h) \geqslant r_\infty.}$$

Preuve du lemme
On veut par unicité (**19)**) montrer que $\lambda I = \widetilde{h}^{\dagger} \circ (\lambda I + F) \circ \widetilde{h}$, ou ce qui revient au même que

$$\widetilde{h} \circ (\lambda I) = \lambda \widetilde{h} + F \circ \widetilde{h}.$$

Pour cela, montrons que tout k, $\widetilde{h} \circ (\lambda I) - \lambda \widetilde{h} - F \circ \widetilde{h} \in O_{2^k+1}$. Posons $\widetilde{h} = h_k + r_k$, on a $r_k \in O_{2^k+1}$.
On sait que $\lambda I + F_k = h_k^{\dagger} \circ (\lambda I + F) \circ h_k$, c'est-à-dire

$$h_k \circ (\lambda I + F_k) - \lambda h_k - F \circ h_k = 0.$$

Or,

$$\widetilde{h} \circ (\lambda I) - \lambda \widetilde{h} - F \circ \widetilde{h} = h_k \circ (\lambda I) - \lambda h_k - F \circ (h_k + r_k) + \underbrace{r_k \circ (\lambda I) - \lambda r_k}_{\in O_{2^k+1} \text{ d'après } \mathbf{(5)}}.$$

Avec l'égalité précédente,

$$\begin{aligned} & h_k \circ (\lambda I) - \lambda h_k - F \circ (h_k + r_k) \\ = \ & \underbrace{h_k \circ (\lambda I) - h_k \circ (\lambda I + F_k)}_{\in O_{2^k+1} \text{ d'après } \mathbf{(5)} \text{ et } F_k \in O_{2^k+1}} + \underbrace{F \circ h_k - F \circ (h_k + r_k)}_{\in O_{2^k+1} \text{ d'après } \mathbf{(5)} \text{ et } F_k \in O_{2^k+1}}, \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver que $\tilde{h} \circ (\lambda I) - \lambda \tilde{h} - F \circ \tilde{h} \in O_{2^k+1}$ et donc le lemme.