Ecoles Normales Supérieures 2012

Corrigé de l'épreuve C - filière MP

Partie I

1. L'application $P \longmapsto P(\theta)$ est un morphisme d'anneau de $\mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{C}$: son noyau I_θ est donc un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. Comme $\mathbb{Q}[X]$ est un anneau principal ($\mathbb{Q}$ est un corps commutatif), cet idéal est principal et il existe un polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $I_\theta = \Pi\,\mathbb{Q}[X]$. Enfin, θ étant algébrique sur $\mathbb{Q}$, I_θ n'est pas réduit à $\{0\}$ et Π est non nul : en notant Π_θ le quotient de Π par son coefficient dominant, nous avons toujours $I_\theta = \Pi_\theta\,\mathbb{Q}[X]$ avec $\Pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire. Les polynômes unitaires de $\mathbb{Q}[X]$ annulant θ sont donc les polynômes de la forme $P\,\Pi_\theta$ avec $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire : Π_θ est ainsi l'unique polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré minimal annulant θ.

2. Il suffit de suivre l'indication (sans faire de preuve par l'absurde) : soit p un nombre premier. Comme les a_k sont premiers dans leur ensemble, il existe un entier m minimal tel que p ne divise par a_m. De même, il existe un entier q minimal tel que p ne divise pas b_q. Nous avons alors :

$$c_{m+q} = \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i b_{m+q-i}\right) + a_m b_q + \left(\sum_{j=0}^{q-1} a_{m+q-j} b_j\right)$$

- p divise $\sum_{i=0}^{m-1} a_i b_{m+q-i}$ car il divise chaque a_i,
- de même, p divise $\sum_{j=0}^{q-1} a_{m+q-j} b_j$ car il divise chaque b_j,
- p est premier et ne divise ni a_m, ni b_q, il ne divise donc pas $a_p b_q$,

donc p ne divise par c_{m+q}. Nous avons ainsi montré que les coefficients de PQ n'ont pas de diviseur premier commun : ils sont premiers dans leur ensemble et PQ est primitif.

3. Il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P \in I_\theta$. On peut alors écrire $P = Q\,\Pi_\theta$ avec $Q \in \mathbb{Q}[X]$. Mais tout polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ s'écrit comme le produit d'un rationnel par un polynôme primitif. Nous pouvons donc écrire :

$$Q = \frac{a}{b}\,Q_1,\ \Pi_\theta = \frac{c}{d}\,\Pi_1$$

avec $Q_1, \Pi_1 \in \mathbb{Z}[X]$ primitifs, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$. Cela donne :

$$bd\,P = ab\,Q_1\Pi_1$$

Comme $Q_1\Pi_1$ est primitif, ab est le p.g.c.d. des coefficients du polynôme entier $ab\,Q_1\Pi_1$. D'autre part, P est également primitif (son coefficient dominant vaut 1), donc bd est le p.g.c.d. des coefficients de bdP : on en déduit que $bd = ab$, puis que $P = Q_1\,\Pi_1$. Comme ces trois polynômes sont à coefficients entiers et comme P est normalisé, ceci impose aux coefficients dominants de Q_1 et Π_1 d'être égaux à 1 ou -1. Nous obtenons donc $\Pi_1 = \Pi_\theta$ ou $\Pi_1 = -\Pi_\theta$: dans les deux cas, $\Pi_\theta \in \mathbb{Z}[X]$.

4. Si θ est un nombre de Pisot, $\overline{\theta}$ est également racine de Π_θ (car Π_θ est un polynôme réel). Comme $|\overline{\theta}| = |\theta| \geq 1$, la propriété **ii)** prouve que $\overline{\theta} = \theta$: les nombres de Pisot sont donc tous réels.

5. Nous avons, en notant $\rho = \max |\alpha_i|$:

$$0 \leq \sin^2(\pi\theta^n) = \sin^2\left(\pi\sum_{i=0}^{k}\alpha_i^n\right) \leq \left(\pi\sum_{i=0}^{k}\alpha_i^n\right)^2 \leq \pi^2\left(\sum_{i=0}^{k}|\alpha_i|^n\right)^2 = O(\rho^{2n})$$

Comme $0 \leq \rho < 1$, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs permettent d'affirmer que la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ est convergente.

Partie 2

1. Nous pouvons écrire $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n X^n$ avec $p_n = 0$ et $q_n = 0$ à partir d'un certain rang. Alors, par produit de Cauchy :

$$\forall z \in D(0,R),\ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q_k c_{n-k}\right) z^n.$$

Par unicité du développement en série entière, nous obtenons :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n = \sum_{k=0}^{n} q_k c_{n-k}.$$

En particulier :

$$\forall n \geq \max\left(\deg(P)+1, \deg(Q)\right),\ 0 = p_n = \sum_{k=0}^{n} q_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{\deg(Q)} q_k c_{n-k}.$$

En notant $p = \deg(Q)$, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p) = (q_p, \ldots, q_1, q_0)$ et $n_0 = \max\left(\deg(P)+1, \deg(Q)\right) - \deg(Q)$, nous avons donc :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 = \sum_{k=0}^{p} \beta_k c_{n+k}.$$

2. Posons $Q(X) = \beta_0 X^p + \beta_1 X^{p-1} + \cdots + \beta_p$: Q est un polynôme non nul car les β_i sont non tous nuls. Le produit de Cauchy de $f(z)$ et de $Q(z)$, valable pour $|z| < R$, est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$ avec p_n nul à partir d'un certain rang : il existe donc $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(z)f(z) = P(z)$ pour tout $z \in D(0,R)$: f coïncide donc, en tout point de $D(0,R)$ où Q ne s'annule pas, avec la fraction rationnelle P/Q, ce qui est la définition donnée d'une fraction rationnelle.

3. Notons L_j^m la j-ème ligne du déterminant Δ_m (on numérote les lignes à partir de l'indice 0). En reprenant les notations précédentes, dès que $m \geq n_0 + p$, nous avons $\beta_0 L_{m-p}^m + \beta_1 L_{m-p+1}^m + \cdots + \beta_p L_m^m = 0$. Les β_i étant non tous nuls, les lignes de Δ_m sont liées et $\Delta_m = 0$.

4.(a) Δ_p est nulle, donc il existe une relation de liaison non triviale entre les lignes de Δ_p :

$$\beta_0(c_0\ c_1\ \cdots\ c_p) + \beta_1(c_1\ c_2\ \cdots c_{p+1}) + \cdots + \beta_p(c_p\ c_{p+1}\ \cdots c_{2p}) = (0\ 0\ \cdots\ 0).$$

Comme Δ_{p-1} est non nul, β_p est non nul. Quitte à diviser par β_p, nous pouvons donc supposer que $\beta_p = 1$: nous obtenons exactement les $p+1$ relations demandées.

4.(b) Dans Δ_{p+1}, ajoutons à ligne L_{p+1}^{p+1} la combinaison linéaire $\beta_0 L_1^{p+1} + \beta_1 L_2^{p+1} + \cdots + \beta_{p-1} L_p^{p+1}$. Nous obtenons :

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p-1} & c_p & \cdots & c_{2p-2} & c_{2p-1} & c_{2p} \\ c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{2p-1} & c_{2p} & c_{2p+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{2p+1} & C_{2p+2} \end{vmatrix}$$

Ajoutons ensuite à l'avant dernière ligne la combinaison linéaire $\beta_0 L_0^{p+1} + \beta_1 L_1^{p+1} + \cdots + \beta_{p-1} L_{p-1}^{p+1}$:

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p-1} & c_p & \cdots & c_{2p-2} & c_{2p-1} & c_{2p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{2p+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{2p+1} & C_{2p+2} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à l'avant dernière ligne, puis par rapport à la dernière ligne, nous obtenons :

$$\Delta_{p+1} = (-1)^{p+2+p+1} C_{2p+1} \times (-1)^{p+1+p+1} C_{2p+1} \, \Delta_{p-1} = -\Delta_{p-1} (C_{2p+1})^2.$$

4.(c) Pour $m > p$, notons $\mathcal{P}_m$ la propriété : $\forall\, j \leq m-1,\ C_{j+p} = 0$.

- $\mathcal{P}_{p+1}$ est vérifiée d'après le a)
- soit $m > p$ et supposons que $\mathcal{P}_m$ est vérifiée. On calcule alors Δ_m en multipliant la matrice associée à Δ_m à gauche par la matrice de déterminant 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Cela donne, en remarquant que $C_p = C_{p+1} = \cdots = C_{m-1+p} = 0$:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{p-1} & c_p & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_p & c_{p+1} & \dots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ c_{p-1} & c_p & \dots & c_{2p-2} & c_{2p-1} & \dots & c_{m+p-1} \\ C_p & C_{p+1} & \dots & C_{2p-1} & C_{2p} & \dots & C_{m+p} \\ C_{p+1} & C_{p+2} & \dots & C_{2p} & C_{2p+1} & \dots & C_{m+p+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_m & C_{m+1} & \dots & C_{m-1+p} & C_{m+p} & \dots & C_{2m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Nous avons ensuite $\det(A) = \Delta_{p-1}$ et C est de taille $N = m+1-p$ et de la forme

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & \alpha \\ & \iddots & \\ \alpha & & * \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = C_{m+p}$. Par développements successifs par rapport aux lignes, on obtient :

$$\det(C) = \alpha^N (-1)^{N+1} (-1)^N \cdots (-1)^2 = \alpha^N \, (-1)^{(N+2)(N+1)/2-1} = \alpha^N \, (-1)^{N(N-1)/2}.$$

Il y a donc une petite erreur d'énoncé, puisque l'on obtient :

$$\Delta_m = (-1)^{(m+1-p)(m-p)/2} \, \Delta_{p-1} \, (C_{m+p})^{m+1-p}.$$

Comme $\Delta_{p-1} \neq 0$ et $\Delta_m = 0$, on obtient tout de même $C_{m+p} = 0$ et $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie.

4.(d) En posant $\beta_p = 1$, nous obtenons une famille non nulle $(\beta_0, \dots, \beta_p)$ telle que :

$$\forall\, n \geq 0, \;\; \beta_0 c_n + \beta_1 c_{n+1} + \cdots + \beta_p c_{n+p} = 0$$

ce qui prouve que f est rationnelle d'après 2.

Remarque : nous avons aussi affiné le résultat de la question 1, puisque si f est une fraction rationnelle, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ non tous nuls tels que la relation (0.1) soit vraie pour tout $n \geq 0$, et pas seulement à partir d'un certain rang n_0.

5.(a) Posons $p_k = 0$ si $k > m$ et $q_k = 0$ si $k > n$. Par produit de Cauchy de f par Q, nous obtenons :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \;\; p_k = \sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} \in q_0\mathbb{Z} + q_1\mathbb{Z} + \cdots + q_m\mathbb{Z}$$

Ceci prouve que l'idéal engendré par $(q_0, q_1, \dots, q_n)$ est aussi l'idéal engendré par $(q_0, q_1, \cdots, q_n, p_0, p_1, \cdots, p_m)$, c'est à dire $\mathbb{Z}$: les q_k sont donc premiers dans leur ensemble.

5.(b) Comme P et Q sont premiers entre eux, le théorème de Bézout (dans l'anneau principal $\mathbb{Q}[X]$) assure l'existence de U_1 et V_1 dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $U_1P + V_1Q = 1$. En notant r le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients des polynômes U_1 et V_1, nous avons :

$$r \in \mathbb{Z}^*, \;\; U = rU_1 \in \mathbb{Z}[X], \;\; V = rV_1 \in \mathbb{Z}[X] \text{ et } Q(Uf + V) = r(U_1P + V_1Q) = r.$$

5.(c) Notons $(Uf+V)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k$ et supposons (preuve par l'absurde) que r ne divise pas tous les d_k. En notant d le plus grand diviseur commun à r et aux d_k, $r' = r/d$ et $d'_k = d_k/d$, nous avons :

- $r', d'_k \in \mathbb{Z}$;
- r' et les d'_k sont premiers dans leur ensemble ;
- $r' = Q(z) \times \sum_{k=0}^{+\infty} d'_k z^k$.

Comme $|r'| \geq 2$, il possède un diviseur premier p. Il existe alors $l \geq 0$ tel que p divise $d'_0, \ldots, d'_{l-1}$ mais ne divise par d'_l. D'autre part, les q_k étant premiers entre eux dans leur ensemble, il existe également $k \geq 0$ tel que p divise $q_0, \ldots, q_{k-1}$ mais ne divise par q_k. Par produit de Cauchy, nous avons alors :

$$\sum_{i=0}^{k+l} q_i d'_{k+l-i} = \begin{cases} r' & \text{si } k = l = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans tous les cas, p divise $\sum_{i=0}^{k+l} q_i d'_{k+l-i}$, ce qui est absurde car p ne divise par $q_k d'_l$ mais divise tous les autres termes de cette somme.

5.(d) En particulier, $q_0 \times \dfrac{d_0}{r} = 1$ avec $q_0, \dfrac{d_0}{r} \in \mathbb{Z}$, donc $q_0 = \pm 1$.

Partie 3

1.(a) $\sin^2(\lambda\pi\theta^n) = \sin^2(\pi\varepsilon_n)$. Comme $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ est un terme général de série convergente, il tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que $s_n = \sin(\pi\varepsilon_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui impose à ε_n de tendre vers 0 quand n tend vers l'infini (comme $-\pi/2 \leq \varepsilon_n < \pi/2$, $\pi\varepsilon_n = \text{Arcsin} s_n$). Nous avons alors :

$$\sin^2(\lambda\pi\theta^n) = \sin^2(\pi\varepsilon_n) \underset{+\infty}{\sim} \pi^2\varepsilon_n^2$$

et ε_n^2 est le terme général d'une série convergente, par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Pour $n \geq 1$, $\eta_n = \varepsilon_n - \theta\varepsilon_{n-1}$ et :

$$0 \leq \eta_n^2 = \varepsilon_n^2 + \theta^2\varepsilon_{n-1}^2 - 2\theta\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon_n^2 + \theta^2\varepsilon_{n-1}^2 + \theta(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}^2)$$

donc la série de terme général η_n^2 est convergente puisque ce majorant est un terme général de série convergente.

1.(b) Posons $A_n = (a_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n}$ et notons P la matrice carrée de taille $n+1$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -\theta & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\Delta_n = \det(A_n) = \det(A_n P) = \begin{vmatrix} a_0 & \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \\ a_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} & \dots & \eta_{2n} \end{vmatrix}$$

Le lemme d'Hadamard donne ensuite exactement l'inégalité demandée.

1.(c) Nous avons $a_n = \lambda\theta^n + o(1)$ et $\lambda\theta^n$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc $a_n \sim_{+\infty} \lambda\theta^n$. Le théorème de comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes donne :

$$\sum_{m=0}^{n} a_m^2 \underset{+\infty}{\sim} \sum_{m=0}^{n} \lambda^2\theta^{2m} \underset{+\infty}{=} O(\theta^{2n}).$$

Il existe ainsi une constante positive C telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{m=0}^{n} a_m^2 \le C\,\theta^{2n}.$$

En notant $R_k = \displaystyle\sum_{m=k}^{+\infty} \eta_m^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \le \Delta_n^2 \le C\,\theta^{2n} R_1 R_2 \dots R_n = C \prod_{m=1}^{n} \theta^2\, R_m$$

Comme $\theta^2\, R_m$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini, ce produit tend grossièrement vers 0 quand n tend vers l'infini et Δ_n converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. L'équivalent de a_n obtenu à la question précédente prouve que le rayon de convergence de la série entière associée est égal à $1/\theta$: il est donc non nul. D'autre part, $(\Delta_n)_{n\ge 0}$ est une suite d'entiers qui converge vers 0 : il existe donc un rang n_0 tel que $\Delta_n = 0$ pour $n \ge n_0$. La question 4 de la partie 2 prouve donc que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fraction rationnelle. Comme cette série est à coefficients entiers, on obtient le résultat demandé en appliquant la question 5 de la partie 2.

3. Comme ε_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, le rayon de convergence R de f est au moins égal à 1. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \theta^{-1}$, on a également $|z| < R$ et (en remarquant que les séries introduites sont toutes convergentes) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\theta^n - a_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (\theta z)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{\lambda}{1-\theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

4. Les fonctions $z \longmapsto f(z)(1-\theta z)Q(z)$ et $z \longmapsto \lambda Q(q) + (1-\theta z)P(z)$ sont développables en série entière sur $D(0,1)$ et coïncident au voisinage de 0 : elle sont donc égales sur tout le disque ouvert $D(0,1)$.

En particulier, avec $z = \theta^{-1}$, nous obtenons $0 = \lambda Q(\theta^{-1})$ donc θ^{-1} est un zéro de Q de module strictement inférieur à 1.

Réciproquement, si z_0 est un zéro de Q tel que $|z_0| < 1$, nous avons $0 = (1-\theta z_0)P(z_0)$. Comme P et Q sont premiers entre eux, $X - z_0$ ne divise par P : on en déduit que $P(z_0) \neq 0$, puis que $z_0 = \theta^{-1}$.

5. Une première méthode utilise le lemme d'Abel : si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente, la série entière de terme général $u_n z^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,1]$. En particulier, sa somme est continue sur $[0,1]$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \rho^n \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

En effet, pour $z \in D(0,1)$, posons $\rho = |z|$. Nous avons :

$$|(1-|z|)f(z)| \leq (1-\rho)\sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n|\rho^n = |\varepsilon_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|\varepsilon_n| - |\varepsilon_{n-1}|\right)\rho^n.$$

En posant $u_0 = |\varepsilon_0|$ et $u_n = |\varepsilon_n| - |\varepsilon_{n-1}|$ pour $n \geq 1$, le lemme s'applique car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = |\varepsilon_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $(1-|z|)f(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers 1^-.

Une seconde preuve beaucoup plus rapide m'a été soufflée par Denis Favennec : l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$0 \leq (1-|z|)\,|f(z)| \leq (1-|z|)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|z|^{2n}\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n^2\right)^{1/2}\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{1/2} \xrightarrow[|z|\to 1^-]{} 0.$$

Supposons que Q possède un zéro z_0 de module 1. Pour tout $\rho \in]\theta^{-1}, 1[$, nous avons :

$$(1-\rho)f(\rho z_0)Q(\rho z_0) = \frac{\lambda(1-\rho)Q(\rho z_0)}{1-\theta\rho z_0} - P(\rho z_0)$$

ce qui donne

$$0 = -P(z_0)$$

en faisant tendre ρ vers 1 : c'est absurde car P et Q n'ont pas de zéro commun.

6. Posons $Q = 1 + q_1 X + \cdots + q_p X^p$ avec $q_p \neq 0$ et $\Pi = X^p + q_1 X^{p-1} + \cdots + q_p$. Nous avons :

- Π est un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$;
- pour tout z complexe non nul, $\Pi(z) = z^p P(z^{-1})$, donc θ est le seul zéro de Π n'appartenant pas à $D(0,1)$.

On en déduit que θ est un entier algébrique et que Π_θ, qui divise Π, a également θ pour seul zéro n'appartenant pas à $D(0,1)$: θ est un nombre de Pisot.

Partie 4

1. Soit $u > 0$. Comme $u\,\theta^{-k}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, $\cos(u\,\theta^{-k})$ est strictement positif à partir d'un certain rang k_0. Pour $k \geq k_0$:

$$\ln\left(\cos(u\,\theta^{-k})\right) = \ln\left(1 - \frac{u^2}{2\theta^{2k}} + o(\theta^{-2k})\right) \underset{+\infty}{=} O(\theta^{-2k}).$$

Comme θ^{-2k} est positif et est le terme général d'une série convergente, la série de terme général $\ln\big(\cos(u\,\theta^{-k})\big)$ est absolument convergente. On en déduit que $\displaystyle\prod_{k=n_0}^{n}\cos(u\,\theta^{-k})$ a une limite quand n tend vers l'infini : Γ est donc définie sur $]0,+\infty[$.

2. Soit $u>0$. On montre facilement par récurrence les égalités :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ \frac{\sin(2u)}{u}=\frac{\sin\frac{u}{2^n}}{\frac{u}{2^n}}\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{u}{2^k}$$

Comme $\dfrac{\sin v}{v}$ tend vers 1 quand v tend vers 0, on obtient l'égalité demandée en faisant tendre n vers l'infini.

3.(a) Comme $\Gamma(u)$ ne tend pas vers 0 quand u tend vers $+\infty$, il existe $\delta>0$ tel que :

$$\forall A>0,\ \exists u\geq A,\ |\Gamma(u)|\geq\delta.$$

Remarquons que chaque $u\geq\pi$ s'écrit d'une unique façon sous la forme $u=\pi\lambda\theta^m$ avec $m\in\mathbb{N}$ et $\lambda\in[1,\theta[$. Ces uniques λ et m seront notés $\lambda(u)$ et $m(u)$.

Commençons par construire par récurrence des suites (m'_s), (λ'_n) et (u'_s) vérifiant toutes les conditions demandées exceptée la convergence de la suite λ.

- choisissons $u'_0\geq\pi$ tel que $|\Gamma(u'_0)|\geq\delta$ et posons $\lambda'_0=\lambda(u'_0)$ et $m'_0=m(u'_0)$;
- soit $k\geq 0$ et supposons construites $(m'_0,\dots,m'_k)$ suite strictement croissante d'entiers et $(\lambda'_0,\dots,\lambda'_k)$ suite d'éléments de $[1,\theta[$ telles que :

$$\forall\, s\in[\![0,k]\!],\ \left|\Gamma(\pi\lambda'_s\theta^{m'_s})\right|\geq\delta.$$

Il existe alors $u'_{k+1}\geq\pi\theta^{m'_k+1}$ tel que $\left|\Gamma(u'_{k+1})\right|\geq\delta$. En posant $m'_{k+1}=m(u'_{k+1})$ et $\lambda'_{k+1}=\lambda(u'_{k+1})$, nous avons bien $m'_{k+1}\in\mathbb{Z}$, $m'_{k+1}>m'_k$, $\lambda'_{k+1}\in[0,\theta[$ et $\left|\Gamma(\pi\lambda'_{k+1}\theta^{m'_k+1})\right|\geq\delta$.

La suite $(\lambda'_k)_{k\geq0}$ est une suite réelle bornée, il existe donc $\varphi:\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante et $\lambda\in[1,\theta]$ tels que $\lambda'_{\varphi(k)}$ converge vers λ quand k tend vers l'infini : les suites $(\lambda'_{\varphi(s)})_{s\geq0}$ et $(m'_{\varphi(s)})_{s\geq0}$ vérifient les conditions demandées.

3.(b) Pour $n\geq m_s$, nous avons :

$$\left|\prod_{k=0}^{n}\cos(u\theta^{-k})\right|=\prod_{k=0}^{n}\underbrace{\left|\cos(u\theta^{-k})\right|}_{\leq1}\leq\prod_{k=0}^{m_s}\left|\cos(u\theta^{-k})\right|=|\cos(\pi\lambda_s)\cos(\pi\lambda_s\theta)\dots\cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s})|$$

d'où l'inégalité demandée en faisant tendre n vers l'infini.

Nous en déduisons, en utilisant l'inégalité de convexité $1-v\leq-\ln v$, valable pour pour tout $v\in]0,1]$, et les inégalités obtenues précédemment :

$$\sum_{q=0}^{m_s}\sin^2(\pi\lambda_s\theta^q)=\sum_{q=0}^{m_s}(1-\cos^2(\pi\lambda_s\theta^q))\leq-\sum_{q=0}^{m_s}\ln\big(\cos^2(\pi\lambda_s\theta^q)\big)\leq-2\ln|\Gamma(u_s)|\leq\ln(1/\delta^2)$$

3.(c) Soit $m \geq 0$. Comme m_s tend vers $+\infty$, il existe s_0 tel que $m_s \geq m$ pour $s \geq s_0$. On en déduit :

$$\forall\, s \geq 0,\ \sum_{q=0}^{m} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q) \leq \sum_{q=0}^{m_s} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q)$$

et donc

$$\forall\, s \geq 0,\ \sum_{q=0}^{m} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q) \leq \ln(1/\delta^2)$$

En faisant tendre s vers l'infini, nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^{m} \sin^2(\pi\lambda\theta^q) \leq \ln(1/\delta^2)$$

Cette inégalité étant valable pour tout m, nous avons prouvé la convergence de la série de terme général positif $\sin^2(\pi\lambda\theta^n)$, ce qui assure que θ est un nombre de Pisot, car $\lambda \geq 1 > 0$.

4.(a) Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $2\theta^m = 2k+1$. Le polynôme $2X^m - (2k+1)$ est alors à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et admet θ pour racine : il existe donc $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tel que

$$2X^m - (2k+1) = \Pi_\theta\, Q$$

Le polynôme $2X^m - (2k+1)$ ayant $m$racines simples de même module et θ étant la seule racine de Π_θ de module $|\theta|$, Π_θ admet θ pour unique racine, et cette racine est simple, ce qui impose $\Pi_\theta = X - \theta$ et $\theta \in \mathbb{Z}$: c'est absurde car $2\theta^m$ est pair et $2k+1$ est impair.

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $2\theta^{-m} = 2k+1$. On reprend la même démonstration avec le polynôme $2 - (2k+1)X^m$: $\theta \in \mathbb{N}$, puis $2 = (2k+1)\theta^m$, ce qui impose l'absurdité $\theta = 2$.

4.(b) Le (a) montre que $\cos^2(\pi\theta^{-m})$ ne s'annule jamais. Nous pouvons donc écrire :

$$\ln\left(\cos^2(\pi\theta^{-m})\right) = 2\ln\left|1 - \frac{1}{2}\pi^2\theta^{-2m} + o(\theta^{-2m}\right| \underset{+\infty}{\sim} -\pi^2\theta^{-2m}$$

Comme $-\pi^2\theta^{-2m}$ est de signe constant et est le terme général d'une série convergente, la série de terme général $\ln\left(\cos^2(\pi\theta^{-m})\right)$ converge, ce qui donne exactement le résultat demandé.

4.(c) Nous avons cette fois :

$$\ln\left(\cos^2(\pi\theta^m)\right) = \ln\left(1 - \sin^2(\pi\theta^m)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\sin^2(\pi\theta^m)$$

et on conclut de la même façon, $-\sin^2(\pi\theta^m)$ étant le terme général d'une série convergente.

4.(d) Nous avons, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$|\Gamma(\pi\theta^m)|^2 = \prod_{k=0}^{+\infty} \cos^2(\pi\theta^{m-k}) = A \times 1 \times \prod_{k=1}^{m} \cos^2(\pi\theta^k) \xrightarrow[m\to+\infty]{} AB > 0$$

Comme $\pi\theta^m$ tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$, ceci assure que $\Gamma(u)$ ne tend pas vers 0 quand u tend vers $+\infty$.