

# CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2025

Épreuve de mathématiques I, MP & MPI, trois heures

(corrigé)

## Inégalité de Hölder

1. Soit deux réels positifs  $x$  et  $y$ . Si  $x$  ou  $y$  est nul alors  $xy = 0 \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ . Sinon, on a  $\frac{1}{p} \in [0, 1]$  et par concavité du logarithme sur  $]0, +\infty[$  (on a en effet :  $\forall u > 0, \ln''(u) = -\frac{1}{u^2} < 0$ ), on a :

$$\frac{1}{p} \ln(x^p) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln(y^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)y^q\right).$$

d'où :  $\ln(x \times y) \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)$ . Comme  $\exp$  est croissante, on peut conclure que dans tous les cas :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. On remarque que comme l'univers est fini, les variables aléatoires admettent des moments à tout ordre.

Par positivité de l'espérance, on a :  $E(X^p) \geq 0$ , et :  $E(Y^q) \geq 0$ .

*Premier cas.* On suppose que  $E(X^p) = E(Y^q) = 1$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a :

$$|X(\omega)Y(\omega)| \leq \frac{|X(\omega)|^p}{p} + \frac{|Y(\omega)|^q}{q}$$

d'après la question précédente, donc  $|XY| \leq \frac{1}{p}X^p + \frac{1}{q}Y^q$ . D'où, par croissance et linéarité de l'espérance :

$$E(|XY|) \leq \frac{1}{p}E(X^p) + \frac{1}{q}E(Y^q),$$

donc :

$$E(|XY|) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = E(X^p)E(Y^q).$$

*Deuxième cas.* On suppose que  $E(X^p) > 0$  et  $E(Y^q) > 0$ . Notons  $\lambda = E(X^p)$ ,  $X' = \frac{1}{\lambda^{1/p}}X$ ,  $\mu = E(Y^q)$  et  $Y' = \frac{1}{\mu^{1/q}}Y$ . Ainsi on a  $E(|X'|^p) = E(|Y'|^q) = 1$  et on peut appliquer le premier cas à  $X'$  et  $Y'$ , donc :

$$E(|X'Y'|) \leq E(|X'|^p)E(|Y'|^q)$$

et ainsi :  $E\left(\frac{XY}{\lambda^{1/p}\mu^{1/q}}\right) \leq 1$ , ce qui donne :

$$E(|XY|) \leq \lambda^{1/p}\mu^{1/q} = E(X^p)^{1/p} E(Y^q)^{1/q}.$$

*Troisième cas.* On suppose que  $E(X^p) = 0$  ou  $E(Y^q) = 0$ . Sans perte de généralité, traitons le cas  $E(X^p) = 0$ . Comme  $X^p$  est une variable aléatoire positive, on en déduit que  $X$  est nulle presque sûrement donc il en est de même pour  $XY$  et aussi pour  $XY$ . D'où :  $E(XY) = 0 = E(X^p)^{1/p} E(Y^q)^{1/q}$ . On a donc bien :  $E(XY) \leq E(X^p)^{1/p} E(Y^q)^{1/q}$ .

**Conclusion.** Dans tous les cas, on a :  $E(XY) \leq E(X^p)^{1/p} E(Y^q)^{1/q}$ .

3. On reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que nous redémontrons.

Si  $E(X^2) = 0$ , alors  $X^2$  est positive et d'espérance nulle, donc est nulle (presque sûrement). On en déduit que  $X$  est nulle et donc  $XY$  aussi. Par conséquent :  $E(XY) = 0 \leq E(X^2)E(Y^2)$ .

Supposons à présent que  $E(X^2)$  est non nul. L'application :

$$\lambda \mapsto E((\lambda X + Y)^2) = \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2)$$

est positive sur  $\mathbf{R}$  par croissance de l'espérance et est polynomiale du second degré en  $\lambda$ . Elle admet donc au plus une racine réelle : cela équivaut à la négativité de son discriminant  $\Delta$ , qui est égal à  $4(E(XY) - E(X^2)E(Y^2))$ . D'où le résultat :

$$E(XY) \leq E(X^2)E(Y^2).$$

## Une inégalité de déviation

4. Soit  $t \in \mathbf{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on a :

$$(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k \geq \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k = \prod_{\ell=1}^n 2\ell = 2^n n!.$$

On en déduit, comme  $t^{2n}$  est positif pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!}.$$

On reconnaît les développements en série entière du cosinus hyperbolique et de l'exponentielle. D'où le résultat :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

5. Soient  $t \geq 0$  et  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ . Par propriété de morphisme de l'exponentielle :

$$E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^n \exp(tc_i X_i)\right).$$

Les variables aléatoires  $X_i$  sont supposées indépendantes, donc les  $\exp(tc_i X_i)$  le sont aussi par le lemme des coalitions. Donc :

$$E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^n E(\exp(tc_i X_i)).$$

Comme les  $X_i$  suivent la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ , par le théorème de transfert on a :

$$E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} (\exp(tc_i) + \exp(-tc_i)) = \prod_{i=1}^n \text{ch}(tc_i).$$

On conclut grâce à la question précédente :

$$E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \leq \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{(tc_i)^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

6. Soient  $t \geq 0$ ,  $x \geq 0$  et  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ . Comme  $\exp\left(x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)$  est une variable aléatoire positive, par l'inégalité de Markov et la question précédente on a :

$$P\left(\exp\left(x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{tx}\right) \leq \frac{E\left(\exp\left(x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right)}{e^{tx}} = e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

Comme  $-X_i$  suit aussi la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et que les  $-X_i$  sont toutes indépendantes car les  $X_i$  le sont (lemme des coalitions), cette inégalité reste valable en remplaçant les  $X_i$  en  $-X_i$ . On obtient :

$$P\left(\exp\left(-x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{tx}\right) \leq e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right).$$

Comme la réalisation de  $\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{tx}$  entraîne celle de  $\exp\left(x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{tx}$  ou de  $\exp\left(-x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{tx}$  (selon le signe de  $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ ), on a par croissance et sous-additivité :

$$\begin{aligned} P\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right) &\leq P\left(\exp\left(x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{tx}\right) + P\left(\exp\left(-x \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{tx}\right) \\ &\leq 2e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

7. Soient  $t \geq 0$  et  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$  non nul. Comme l'exponentielle est strictement croissante, pour tout  $x \geq 0$  on a :

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq P\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > xt\right) = P\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right).$$

La première inégalité n'est pas une égalité à cause du cas particulier  $x = 0$ . On en déduit, par la question précédente :

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} - tx\right).$$

Posons  $x = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq 0$ . La division par  $\sum_{i=1}^n c_i^2 = \|(c_1, \dots, c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n}$  est licite par propriété de séparation de la norme, car  $(c_1, \dots, c_n)$  est supposé non nul. On obtient :

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right),$$

d'où le résultat.

## Inégalités de Khintchine

8. Notons que  $X$  étant finie, la fonction  $F_X$  est continue par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités, en chaque  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $P(X = t) > 0$ ) et positive sur  $\mathbf{R}$ , donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$  est bien définie dans  $[0, +\infty]$ . On la calcule avec la relation de Chasles. Notons  $X(\Omega) = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq \mathbf{R}_+$ , où les  $t_i$  sont ordonnés en sens strictement croissant. On a  $F_X(t) = 1$

pour  $t < t_1$ , puis  $F_X(t) = P(X > t_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$  et tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$ , et enfin  $F_X(t) = 0$  pour  $t > t_k$ . On a donc dans  $[0, +\infty[$ , en ignorant les points isolés :

$$\begin{aligned}
 p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt &= \int_0^{t_1} p t^{p-1} dt + \sum_{i=1}^{k-1} P(X > t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} p t^{p-1} dt \\
 &= t_1^p + \sum_{i=1}^{k-1} P(X > t_i) (t_{i+1}^p - t_i^p) \\
 &= t_1^p + \sum_{i=1}^{k-1} P(X > t_i) t_{i+1}^p - \sum_{i=1}^{k-1} P(X > t_i) t_i^p \\
 &= t_1^p + \sum_{i=2}^k P(X > t_{i-1}) t_i^p - \sum_{i=1}^k P(X > t_i) t_i^p \\
 &= t_1^p - P(X > t_1) t_1^p + \sum_{i=2}^k (P(X > t_{i-1}) - P(X > t_i)) t_i^p \\
 &= P(X \leq t_1) t_1^p + \sum_{i=2}^k P(t_i \geq X > t_{i-1}) t_i^p \\
 &= P(X = t_1) t_1^p + \sum_{i=2}^k P(X = t_i) t_i^p \\
 &= \sum_{t \in X(\Omega)} t^p P(X = t) \\
 &= E(X^p), \tag{théorème de transfert}
 \end{aligned}$$

d'où l'égalité. Comme  $X$  est finie, l'espérance de  $X^p$  l'est aussi, ce qui démontre en même temps la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$ .

9. L'application  $t \mapsto t^3 e^{-t^2/2}$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$  et admet pour primitive  $t \mapsto -(t^2 + 2)e^{-t^2/2}$ . On le démontre soit en intégrant par parties (on dérive  $t \mapsto -t^2$  et intègre  $t \mapsto -te^{-\frac{t^2}{2}}$ ), soit en intégrant terme à terme le développement en série entière de cette fonction. Or, par croissances comparées, cette primitive a une limite finie (nulle) en  $+\infty$ , donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt$  converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt = \left[ -(t^2 + 2)e^{-t^2/2} \right]_0^{+\infty} = 2.$$

Appliquons la question précédente à la variable aléatoire  $X = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|$ , qui est positive et finie.

On a :

$$E \left( \left( \sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) = E \left( \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^4 \right) = 4 \int_0^{+\infty} t^3 F_X(t) dt.$$

La question 7 permet de majorer  $F_X$ . On a :

$$E \left( \left( \sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 \exp \left( -\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right) dt = 8 \int_0^{+\infty} t^3 \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) dt,$$

d'où le résultat.

10. Par linéarité de l'espérance :

$$E \left( \left( \sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} c_i c_j E(X_i X_j).$$

Remarquons que les variables aléatoires suivant la loi de Rademacher sont centrées. Par conséquent, si les indices  $i$  et  $j$  sont distincts, par indépendance des variables aléatoires on a :  $E(X_i X_j) = E(X_i) E(X_j) = 0$ . D'où :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 E(X_i^2) = \sum_{i=1}^n c_i^2 E(1) = \sum_{i=1}^n c_i^2,$$

d'où le résultat.

**Remarque.** C'est le théorème de Pythagore ! Des variables de Rademacher indépendantes sont en effet orthogonales pour la forme bilinéaire symétrique  $(X, Y) \mapsto E(XY)$ .

11. Je présume que  $\beta_p$  est indépendant des  $c_i$  et de  $n$  (l'indépendance en  $n$  intervient dans la question 18) : sinon, il n'y a rien à démontrer.

Soit  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ . Supposons  $(c_1, \dots, c_n)$  non nul et posons :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i = \frac{c_i}{\|(c_1, \dots, c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n}}$ . Par homogénéité de la norme, on a :  $\|(d_1, \dots, d_n)\|_2^{\mathbf{R}^n} = 1$ , ce qui permet de démontrer, en imitant le raisonnement de la question 9 :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n d_i X_i\right)^p\right) \leq 2p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n d_i^2}\right) dt = 2p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(c_1, \dots, c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n} \cdot \left(2p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

et par la question précédente on a :  $\|(c_1, \dots, c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n} = E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ . D'où le résultat si  $(c_1, \dots, c_n)$  est non nul, en posant :

$$\beta_p = \left(2p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

qui est strictement positif parce que  $t \mapsto t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$  est continue, positive et non identiquement nulle sur  $\mathbf{R}_+$  (l'intégrale converge parce que l'intégrande est continu et dominé par la fonction de Riemann intégrable  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  au voisinage de  $+\infty$ ).

Le résultat reste évidemment vrai pour  $(c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$ .

**Autre démonstration.** L'énoncé demande d'admettre que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $L^0(\Omega)$ . C'est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie car  $\Omega$  est fini : une partie génératrice est  $\{\mathbb{1}_{\{\omega\}} \mid \omega \in \Omega\}$ . Les normes étant toutes équivalentes en dimension finie, il existe  $\beta_p > 0$  tel que pour tout  $X \in L^0(\Omega)$ , on ait :  $\|X\|_p \leq \beta_p \|X\|_2$ . D'où le résultat :

$$\forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n, \quad E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta_p E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cependant cela n'utilise pas la question précédente : ce n'était pas l'argument attendu par le concepteur du sujet, puisqu'il indique : « En déduire... »

12. Soit  $X = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ . On applique l'inégalité de Hölder avec le couple de variables aléatoires  $(X^2, 1)$  et avec  $\frac{p}{2}$  au lieu de  $p$  (on a bien  $\frac{p}{2} \geq 1$  par hypothèse). Soit  $q \geq 1$  tel que :  $\frac{1}{p/2} + \frac{1}{q} = 1$ . On a :

$$E(X^2) \leq E\left(|X|^{2 \cdot \frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} E(1)^{\frac{1}{q}} = E(|X|^p)^{\frac{2}{p}},$$

d'où le résultat par croissance de la racine carrée.

**Autre démonstration.** On peut aussi utiliser le théorème de transfert et l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe  $t \mapsto t^{p/2}$ , étant donné que  $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$  (et parce qu'une probabilité est positive) :

$$E(|X|^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)|x|^p \geq \left( \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)|x|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = E(|X|^2)^{\frac{p}{2}}.$$

13. L'application  $\theta \mapsto \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$  est continue sur  $[0, 1]$ , vaut  $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$  en 0 et  $\frac{1}{p} > \frac{1}{2}$  en 1. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que :  $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$ . D'où le résultat.

**Remarque.** On peut expliciter  $\theta$ , qui est égal à  $\frac{p}{4-p}$ .

14. Soit  $X = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ . On applique l'inégalité de Hölder avec le couple  $(X^{2\theta}, X^{2(1-\theta)})$  et avec  $\frac{p}{2\theta}$  au lieu de  $p$  (on a bien  $\frac{p}{2\theta} \geq 1$ , puisque :  $\frac{2\theta}{p} = 1 - \frac{1-\theta}{2} \leq 1$ ). On a :

$$E(X^2) = E(X^{2\theta} X^{2(1-\theta)}) \leq E(|X|^p)^{\frac{2\theta}{p}} E(|X|^{2(1-\theta) \cdot \frac{2}{1-\theta}})^{1-\frac{2\theta}{p}} = E(|X|^p)^{\frac{2\theta}{p}} E(|X|^4)^{\frac{1-\theta}{2}},$$

d'où le résultat.

15. Soit  $X = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ . Si  $X = 0$  alors l'inégalité voulue est triviale. Nous supposons donc  $X$  non nulle. On a par la question 11 :

$$E(|X|^4)^{\frac{1-\theta}{2}} = \left( E(X^4)^{\frac{1}{4}} \right)^{2(1-\theta)} \leq \beta_4^{2(1-\theta)} E(X^2)^{\frac{2(1-\theta)}{2}} = \beta_4^{2(1-\theta)} E(|X|^2)^{1-\theta}.$$

Par la question précédente, on a donc :

$$E(X^2) \leq \beta_4^{2(1-\theta)} E(|X|^p)^{\frac{2\theta}{p}} E(X^2)^{1-\theta}.$$

Comme  $X$  est non nulle, on a  $E(|X|^2) > 0$ , ce qui permet de diviser :

$$E(X^2)^\theta \leq \beta_4^{2(1-\theta)} E(|X|^p)^{\frac{2\theta}{p}}.$$

La fonction  $u \mapsto u^{\frac{1}{2\theta}}$  est croissante sur  $\mathbf{R}_+$  car  $\theta$  est positif. On en déduit :

$$E(X^2)^{\frac{1}{2}} \leq \beta_4^{\frac{1-\theta}{\theta}} E(|X|^p)^{\frac{1}{p}},$$

d'où le résultat en posant  $\tilde{\alpha}_p = \beta_4^{-\frac{1-\theta}{\theta}} > 0$ .

**Autre démonstration.** Comme à la question 11, il suffit d'utiliser l'équivalence des normes. Ce n'est cependant pas la philosophie du sujet, fort riche en imprécisions et ambiguïtés.

16. Il suffit de poser :

$$\alpha_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq 2, \\ \tilde{\alpha}_p & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui est bien strictement positif (ce n'est pas demandé, mais permettre  $\alpha_p \leq 0$  rend la question triviale et sans intérêt).

## Une première conséquence

17. L'application  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , bilinéaire par distributivité du produit par rapport à l'addition et par linéarité de l'espérance. Elle est symétrique par commutativité du produit de fonctions réelles.

Ensuite, par croissance de l'espérance :  $\varphi(X, X) = E(X^2) \geq 0$ , car  $X^2$  est positive. De plus, l'espérance d'une variable aléatoire positive est nulle si et seulement si elle est nulle (presque sûrement), donc  $\varphi(X, X) = 0$  équivaut à  $X = 0$  : ainsi  $\varphi$  est définie positive.

Ceci achève de démontrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $L^0(\Omega)$ .

18. Soit  $u = (u_i)_{i \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ . La somme  $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$  est à support fini et existe bien. L'application

$\psi(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$  est donc une application de  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire :  $\psi(u) \in L^0(\Omega)$ .

On veut démontrer que  $\psi$  conserve le produit scalaire. Comme  $\psi$  est linéaire, il suffit de démontrer que  $\psi$  préserve la norme euclidienne associée à  $\varphi$ , qui est  $\|\cdot\|_2$ . Or, pour tout  $u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ , on a par la question 10 (que l'on peut bien utiliser car toutes les sommes sont en vérité à support fini) :

$$\|\psi(u)\|_2^2 = E \left( \left( \sum_{i=1}^{+\infty} u_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i^2 = \langle u, u \rangle,$$

d'où le résultat.

19. Par les questions 11 et 16, les normes  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_p$  sont équivalentes sur  $R$  pour tout  $p \geq 1$ . Par transitivité, les normes  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_q$  sont équivalentes sur  $R$  pour tous  $p$  et  $q$  dans  $[1, +\infty[$  : d'où le résultat.

## Une deuxième conséquence

20. Par la formule de transfert, avec le vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_k)$  (qui suit la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}^k$  par indépendance des  $X_i$ ) et la fonction  $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \left| \sum_{i=1}^k a_i x_i \right|$ , on a :

$$E(f(X_1, \dots, X_k)) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \frac{1}{2^k} \left| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i \right|,$$

mais on a aussi :

$$E(f(X_1, \dots, X_k)) = E \left( \left| \sum_{i=1}^k a_i X_i \right| \right).$$

L'encadrement demandé revient donc à encadrer  $2^k E \left( \left| \sum_{i=1}^k a_i X_i \right| \right) = n E \left( \left| \sum_{i=1}^k a_i X_i \right| \right)$ . Par les questions 11 et 16 avec  $p = 1$ , on a :

$$\alpha_1 E \left( \left( \sum_{i=1}^k a_i X_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq E \left( \left| \sum_{i=1}^k a_i X_i \right| \right) \leq \beta_1 E \left( \left( \sum_{i=1}^k a_i X_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Par la question 10 :

$$\alpha_1 \left( \sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2} \leq E \left( \left| \sum_{i=1}^k a_i X_i \right| \right) \leq \beta_1 \left( \sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2},$$

d'où le résultat après multiplication par  $n \geq 1$ .

21. Soit  $T$  l'application définie dans l'indication de l'énoncé. C'est une application linéaire de  $\mathbf{R}^k$  dans  $\mathbf{R}^n$  (on a identifié  $\mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{R}^{\{-1,1\}^k}$  via la prescription d'un ordre sur les éléments de  $\{-1,1\}^k$ ). Démontrons qu'elle est injective. Soit  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^k$  tel que  $T(a_1, \dots, a_k)$  soit nul. Soit  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Pour tout  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k$  on a :  $\sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i = 0$ . Prenons  $\varepsilon_j = 1$  et tous les autres  $\varepsilon_i$  égaux à  $-1$ . On a :

$$a_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k a_i = 0.$$

En prenant  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_k = 1$ , on a aussi :

$$a_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k a_i = 0.$$

En sommant ces deux égalités, on en déduit :  $a_j = 0$ . Ceci vaut pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , ce qui démontre que  $T$  est de noyau trivial et est donc injective. Elle induit un isomorphisme sur son image, donc  $F = \text{im}(T)$  est de dimension  $k$ .

Démontrons alors que les éléments de  $F$  vérifient l'encadrement de l'énoncé. Soit  $x \in F$ . Il existe  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^k$  tel que :  $x = \left( \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right)_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k}$ . D'après la question précédente :

$$\alpha_1 n \| (a_1, \dots, a_k) \|_2^{\mathbf{R}^k} \leq \| x \|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 n \| (a_1, \dots, a_k) \|_2^{\mathbf{R}^k}. \quad (*)$$

Or :

$$\left( \| x \|_2^{\mathbf{R}^n} \right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left( \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left( \sum_{i=1}^k a_i^2 \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j \varepsilon_i \varepsilon_j \right).$$

Simplifions la deuxième somme :

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j \varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \varepsilon_i \varepsilon_j.$$

Or, pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , l'application  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_k) \mapsto (\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_j, \dots, \varepsilon_k)$  est une permutation de  $\{-1,1\}^k$  car elle est involutive, donc pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$  tel que  $i < j$ , on a :

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \varepsilon_i \varepsilon_j = - \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \varepsilon_i \varepsilon_j.$$

Cette somme est donc nulle. On a démontré :

$$\left( \| x \|_2^{\mathbf{R}^n} \right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \sum_{i=1}^k a_i^2 \varepsilon_i^2 = 2^k \sum_{i=1}^k a_i^2 = n \| (a_1, \dots, a_k) \|_2^{\mathbf{R}^k}.$$

D'où le résultat, en extrayant la racine carrée dans l'égalité que l'on vient de démontrer et en reprenant (\*) :

$$\alpha_1 \sqrt{n} \| x \|_2^{\mathbf{R}^n} \leq \| x \|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \| x \|_2^{\mathbf{R}^n}.$$