

École polytechnique

Mathématiques B-(X)

Un corrigé proposé par : AQALMOUN Mohamed agrégé de mathématiques CPGE Khouribga

Première partie : convergence au sens de Césaro

1. Soit $(a_n)_n$ une suite convergente, notons par l sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on a $|a_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Par l'inégalité triangulaire

$$|m_n - l| = \frac{1}{n+1} |(a_0 - l) + \dots + (a_n - l)| \leq \frac{|a_0 - l| + \dots + |a_N - l|}{n+1} + \frac{|a_{N+1} - l| + \dots + |a_n - l|}{n+1} \leq \frac{|a_0 - l| + \dots + |a_N - l|}{n+1} + \frac{n+1-N}{n+1} \frac{\varepsilon}{2}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{|a_0 - l| + \dots + |a_N - l|}{n+1} \rightarrow 0$ ($|a_0 - l| + \dots + |a_N - l|$ est constant par rapport à n), il existe alors $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N'$, $\frac{|a_0 - l| + \dots + |a_N - l|}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall n \geq N'' = \max(N, N')$,

$$|m_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+1-N}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

La suite $(m_n)_n$ est convergente de limite l , d'où $(a_n)_n$ est C-convergente.

Un exemple : La suite $((-1)^n)_n$ n'est pas convergente, $m_{2n} = 0$ et $m_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$, alors $(m_n)_n$ est convergente de limite nulle, la suite $(a_n)_n$ est alors C-convergente.

2. Soit $(a_n)_n$ une suite C-convergente,

on a $(n+1)m_n - nm_{n-1} = a_n$, donc $\frac{a_n}{n} = \frac{n+1}{n}m_n - m_{n-1}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

3. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $a_n = (-1)^n n^\alpha$, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k$

$$\text{On a } S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^n v_k$$

D'une part $v_n = a_{2n-1} + a_{2n} = (2n)^\alpha - (2n-1)^\alpha$ et d'après le Théorème des Accroissements finis, il existe $c_n \in]2n-1, 2n[$ tel que $(2n)^\alpha - (2n-1)^\alpha = \alpha c_n^{\alpha-1}$, on a $1 - \frac{1}{2n} < \frac{c_n}{2n} < 1$ donc $c_n \sim 2n$ aussi $c_n^{\alpha-1} \sim 2^{\alpha-1} n^{\alpha-1}$, d'où l'équivalence $v_n \sim \alpha 2^{\alpha-1} n^{\alpha-1}$

$\sum n^{\alpha-1}$ est une série à termes positifs divergente ($0 < 1 - \alpha < 1$) donc

$$\alpha 2^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} \sim \sum_{k=1}^n v_k = S_{2n}$$

D'autre part $\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \rightarrow \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha}$, donc $S_{2n} \sim 2^{\alpha-1} n^\alpha$

$$m_{2n} = \frac{S_{2n}}{2n+1} \sim 2^{\alpha-1} \frac{n^\alpha}{2n+1} \sim 2^{\alpha-2} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \rightarrow 0$$

$$m_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} m_{2n} + \frac{a_{2n+1}}{2n+2} \rightarrow 0$$

Donc la suite $(a_n)_n$ est C-convergente.

4. La série $\sum c_n z_0^n$ est C-convergente, donc la suite $(S_n(z_0))_n$ est C-convergente, d'après la question

2.) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(z_0)}{n+1} = 0$, donc la suite $(c_n)_n$ est C-convergente, encore d'après la question 2.) on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n z_0^n}{n} = 0$, en particulier la suite $(\frac{c_n z_0^n}{n})_n$ est bornée, et puisque les deux séries $\sum c_n z^n$ et $\sum \frac{c_n}{n} z^n$ ont même rayon de convergence, alors $|z_0| \leq R$

5. (a) Le rayon de convergence est égal à 1, soit z tel que $|z| = 1$

• Cas $z = 1$: $S_n(1) = n+1$ et $\sigma_n(1) = 1 + \frac{n}{2}$, donc $1 \notin F$

• Cas $z \neq 1$: $S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{z-1} - \frac{1}{z-1}$ et $\sigma_n(z) = \frac{z(z^n-1)}{(n+1)(z-1)^2} - \frac{1}{z-1}$, puisque la suite $(z^n - 1)_n$ est bornée alors $z \in F$ et $\sigma(z) = \frac{1}{1-z}$. $F = \mathbb{U} \setminus \{1\}$

- (b) Le rayon de convergence est égal à 1, soit z tel que $|z| = 1$
- Si $z = 1$, $\frac{S_{2n}}{2n} = \frac{2\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha}{2n} \rightarrow \frac{2\alpha+\beta}{2} \neq 0$, donc la série $\sum c_n$ n'est pas C-convergente et $1 \notin F$
 - Si $z = -1$, $\frac{S_{2n}}{2n} = -\beta(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}) - \frac{\alpha}{2n} \rightarrow -\frac{\beta}{2} \neq 0$, donc $-1 \notin F$
 - Si $z \neq \pm 1$, $S_{2n}(z) = z^{2n} \frac{(\alpha+\beta+\alpha z)z}{z^2-1} - \frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$ et $s_{2n+1}(z) = z^{2n} \frac{(\alpha+(\alpha+\beta)z)z^2}{z^2-1} - \frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$
 $\sigma_{2n}(z) = -\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1} + \frac{z^{2n+2}-1}{2n+1} \frac{(\alpha+\beta+\alpha z)z}{(z^2-1)^2} + \frac{z^{2n}-1}{2n+1} \frac{(\alpha+(\alpha+\beta)z)z^2}{(z^2-1)^2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{2n}(z) = -\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$
, et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{2n+1}}{2n+2} = 0$ et $\sigma_{2n+1}(z) = \frac{2n+1}{2n+2} \sigma_{2n}(z) + \frac{S_{2n+1}}{2n+2}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{2n+1}(z) = -\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(z) = -\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$, ainsi $F = \mathbb{U} \setminus \{-1, 1\}$ et pour tout $z \in F$
 $\sigma(z) = -\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$
- (c) $\sum c_n z^n = \sum z^n + \alpha \sum e^{in\lambda} z^n$, le rayon de convergence de chacune des deux séries $\sum z^n$ et $\sum e^{in\lambda}$ est égal à 1, donc $R \geq 1$. D'autre part si $|z| > 1$, alors $|c_n z^n| = |z|^n (|1 + \alpha e^{in\lambda}|)$ ne tend pas vers 0, en effet si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n z^n| = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \alpha e^{in\lambda} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha e^{in\lambda} = -1$ on obtient $\alpha = 1$ mais $\alpha \in]0, 1[$ absurde, donc $R = 1$
Soit z tel que $|z| = 1$, et on suppose que $\lambda \neq 0 \pmod{2\pi}$ (pour le cas $\lambda = 0 \pmod{2\pi}$ voir le premier exemple)
- Si $z = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n+1} = 1$, donc $1 \notin F$
 - Si $z = e^{i\lambda}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n+1} = \alpha \neq 0$, donc $e^{i\lambda} \notin F$
 - Si $z \neq 1$ et $z \neq e^{i\lambda}$, $\sigma_n(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}} + \frac{z^{n+1}-1}{n+1} \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{(ze^{i\lambda})^{n+1}-1}{n+1} \frac{\alpha ze^{i\lambda}}{(1-ze^{i\lambda})^2}$ donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}$
Donc $F = \mathbb{U} \setminus \{1, e^{i\lambda}\}$ et $\forall z \in F$, $\sigma(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}$

Deuxième partie : Un théorème de Kronecker

6. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
- Cas $\lambda = 0$: $\frac{1}{2x} \int_{-x}^x e^{i\lambda t} dt = 1 \rightarrow 1$
 - Cas $\lambda \neq 0$: $|\frac{1}{2x} \int_{-x}^x e^{i\lambda t} dt| = |\frac{1}{2i\lambda x} (e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x})| \leq \frac{1}{|\lambda x|} \rightarrow 0$
- Par linéarité de l'intégral, la limite existe pour tout $f \in \mathcal{E}$
Pour $f \in \mathcal{E}$ et x au voisinage de $+\infty$, par l'inégalité triangulaire on a
 $\frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt \leq \frac{1}{2x} \int_{-x}^x |f(t)| dt \leq \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$ en passant à la limite, on obtient
 $M(f) \leq \|f\|_\infty$, donc la forme linéaire est continue sur $\mathcal{E}$.
- (b) Il s'agit de démontrer que cette famille est libre (elle génératrice), Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_{\lambda_k} = 0$, soit $j \in \{1, \dots, n\}$ en multipliant par $e_{-\lambda_j}$ et en appliquant M , on obtient $\sum_{k=0}^n \alpha_k M(e_{\lambda_k - \lambda_j}) = \alpha_j M(e_0) = 0$ donc $\alpha_j = 0$
- Soit $f \in \mathcal{E}$ ils existent $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_{\lambda_k}$, donc $M(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k M(e_{\lambda_k})$, alors :
- $M(f) = 0$ si les λ_k sont tous nuls, c'est le cas où la coordonnée de f suivant e_0 est nulle
 $M(f) = \alpha_j$ Si $\lambda_j = 0$ et on a aussi α_j est la coordonnée de f suivant e_0
- (c) C'est une conséquence du fait que $e_{\lambda} e_{\lambda'} = e_{\lambda+\lambda'} \in \mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel.
Si g est à valeurs positives, pour x au voisinage de $+\infty$ on a :
 $|\frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) g(t) dt| \leq \frac{1}{2x} \int_{-x}^x |f(t)| g(t) dt \leq \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \|f\|_\infty g(t) dt \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2x} \int_{-x}^x g(t) dt$, en passant à la limite on obtient $M(fg) \leq \|f\|_\infty M(g)$

7. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 K_N(t) &= 1 + \sum_{j=-N}^{-1} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j(t) + \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j(t) \\
 &= 1 + \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_{-j}(t) + \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j(t) \\
 &= 1 + \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{j}{N+1}\right) (e_j(t) + e_{-j}(t)) \\
 &= 1 + \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{j}{N+1}\right) 2 \cos(jt)
 \end{aligned}$$

donc $K_N(t) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{2j}{N+1} \cos((N+1-j)t)$ Changement d'indice $j \leftarrow N+1-j$

(b) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^N e^{i(\frac{N}{2}-k)t} &= e^{i\frac{N}{2}t} \sum_{k=0}^N e^{-ikt} = e^{i\frac{N}{2}t} \sum_{k=0}^N (e^{-it})^k \\
 &= e^{i\frac{N}{2}t} \frac{1 - e^{-i(N+1)t}}{1 - e^{-it}} = e^{i\frac{N}{2}t} \frac{-2ie^{-i\frac{N+1}{2}t} \sin(\frac{N+1}{2}t)}{-2ie^{-i\frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2}} \\
 &= \frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}}
 \end{aligned}$$

par le changement d'indice $k \leftarrow N - k$ on a $\sum_{k=0}^N e^{i(\frac{N}{2}-k)t} = \sum_{k=0}^N e^{i(k-\frac{N}{2})t}$ donc,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^N e^{i(\frac{N}{2}-k)t}\right) \left(\sum_{j=0}^N e^{i(j-\frac{N}{2})t}\right) \\
 &= \sum_{0 \leq k, j \leq N} e^{i(j-k)t} \\
 &= \sum_{0 \leq k < j \leq N} e^{i(j-k)t} + \sum_{0 \leq k > j \leq N} e^{i(j-k)t} + \sum_{0 \leq k=j \leq N} e^{i(j-k)t} \\
 &= \sum_{0 \leq k < j \leq N} e^{i(j-k)t} + \sum_{0 \leq k < j \leq N} e^{i(k-j)t} + N+1 \\
 &= \sum_{0 \leq k < j \leq N} (e^{i(j-k)t} + e^{i(k-j)t}) + N+1 \\
 &= \sum_{0 \leq k < j \leq N} 2 \cos((j-k)t) + N+1 \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{j-1} 2 \cos((j-k)t) + N+1
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j 2 \cos(kt) + N + 1 \quad \text{changement d'indice } k \leftarrow j - k$$

On pose $a_k = 2 \cos(kt)$ on a

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j 2 \cos(kt) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j a_k = a_1 + (a_1 + a_2) + \dots + (a_1 + \dots + a_N) = Na_1 + (N-1)a_2 + \dots + a_N =$$

$$\sum_{k=1}^N (N+1-k)a_k = \sum_{j=1}^N ja_{N+1-j} = \sum_{j=1}^N 2j \cos((N+1-j)t)$$

$$\text{donc } \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 = K_N(t)$$

8. (a) on a $K_N(\lambda_p x + \alpha_p) = \sum_{j=-N}^N (1 - \frac{|j|}{N+1}) e_j(\lambda_p x + \alpha_p) = \sum_{j=-N}^N (1 - \frac{|j|}{N+1}) e^{ij\alpha_p} e^{ij\lambda_p x}$ donc

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \prod_{p=1}^{n+1} K_N(\lambda_p x + \alpha_p) = \left(\sum_{j_1=-N}^N (1 - \frac{|j_1|}{N+1}) e^{ij_1\alpha_1} e^{ij_1\lambda_1 x} \right) \dots \left(\sum_{j_{n+1}=-N}^N (1 - \frac{|j_{n+1}|}{N+1}) e^{ij_{n+1}\alpha_{n+1}} e^{ij_{n+1}\lambda_{n+1} x} \right) \\ &= \sum_{-N \leq j_1, \dots, j_{n+1} \leq N} \prod_{k=1}^{n+1} \left((1 - \frac{|j_k|}{N+1}) e^{ij_k\alpha_k} e^{ij_k\lambda_k x} \right) \\ &= \sum_{-N \leq j_1, \dots, j_{n+1} \leq N} \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 - \frac{|j_k|}{N+1}) \right) e^{i(\sum_{k=1}^{n+1} j_k \alpha_k)} e^{i(\sum_{k=1}^{n+1} j_k \lambda_k) x} \\ &= \sum_{-N \leq j_1, \dots, j_{n+1} \leq N} \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 - \frac{|j_k|}{N+1}) \right) e^{i(\sum_{k=1}^{n+1} j_k \alpha_k)} e_{(\sum_{k=1}^{n+1} j_k \lambda_k)}(x) \end{aligned}$$

$M(g_N)$ est la coordonnée de g_N suivant e_0 et on a, $\sum_{k=1}^{n+1} j_k \lambda_k = 0$ si, et seulement si, tous les j_k sont nuls (ceci est grace à la $\mathbb{Q}$ -liberté de la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$), donc le coefficient de e_0 est $(\prod_{k=1}^{n+1} (1 - \frac{|j_k|}{N+1})) e^{i(\sum_{k=1}^{n+1} j_k \alpha_k)} = 1$ (tous les j_k sont nuls), d'où $M(g_N) = 1$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x)g_N(x) = r_0 g_N(x) + \sum_{j=1}^{n+1} a_j e_{\lambda_j}(x) g_N(x)$, donc par linéarité de M on a

$$M(fg_N) = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1} a_j M(e_{\lambda_j} g_N), \text{ il reste à calculer } M(e_{\lambda_j} g_N)$$

$e_{\lambda_j} g_N$ est combinaison linéaire des fonctions e_λ avec λ de la forme $\lambda = \lambda_j + k_1 \lambda_1 + \dots + k_{n+1} \lambda_{n+1}$ $k_i \in \{-N, \dots, N\}$, et $\lambda = 0$ si, et seulement si, $k_j = -1$ et $k_i = 0$ pour $i \neq j$ donc le coefficient de e_0 est $(\prod_{k=1}^{n+1} (1 - \frac{|j_k|}{N+1})) e^{i(\sum_{k=1}^{n+1} j_k \alpha_k)} = (1 - \frac{1}{N+1}) e^{-i\alpha_j} = \frac{N}{N+1} e^{-i\alpha_j}$, on obtient alors

$$M(fg_N) = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{N}{N+1} a_j e^{-i\alpha_j} = r_0 + \frac{N}{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} r_j$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leq |r_0| + \sum_{j=1}^{n+1} |a_j e^{i\lambda_j x}| = \sum_{j=0}^{n+1} r_j$, donc $\|f\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{n+1} |a_j|$

g_N est un élément de $\mathcal{E}$ à valeurs positives, d'après la question 6.c on a $M(fg_N) \leq \|f\|_\infty M(g_N)$ donc $r_0 + \frac{N}{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} r_j \leq \|f\|_\infty$, en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ on obtient

$$\sum_{j=0}^{n+1} r_j \leq \|f\|_\infty$$

9. Supposons qu'ils existent k_0 et j_0 tels que $k_0 \neq j_0$ et $|u_{k_0} + u_{j_0}| < 2 - \varepsilon$

$$|\sum_{j=1}^m u_j| \leq |u_{k_0} + u_{j_0}| + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ u_{j_0} \neq i \neq u_{k_0}}} u_j < 2 - \varepsilon + m - 2 = m - \varepsilon \text{ contradiction.}$$

$$|u_k + u_j|^2 + |u_k - u_j|^2 = (u_k + u_j)(\bar{u}_k + \bar{u}_j) + (u_k - u_j)(\bar{u}_k - \bar{u}_j) = 4, \text{ donc } \\ |u_k - u_j|^2 = 4 - |u_k + u_j|^2 \leq 4 - (2 - \varepsilon)^2 = 4\varepsilon - \varepsilon^2 \leq 4\varepsilon, \text{ donc } |u_k - u_j| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$$

10. (a) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty = \sum_{j=0}^{n+1} r_j = n+2$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, $\forall m \in \mathbb{N}$, il existe $x_m \in \mathbb{R}$ tel que $n+2 - \frac{1}{m+1} \leq |f(x_m)| \leq n+2$ et on a alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} |f(x_m)| = n+2$

(b) Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq m_0$, $|f(x_m)| \geq n+2 - \frac{\varepsilon^2}{4}$, comme $f(x_m)$ est somme de $n+2$ complexes de module 1 (remarquant que le premier terme est égal à 1), alors d'après la question 9. $\forall m \geq m_0$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $|e^{i\alpha_j} e^{i\lambda_j x_m} - 1| \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \varepsilon$ et $|e^{i2\pi x_m} - 1| \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \varepsilon$, donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\alpha_j} e^{i\lambda_j x_m} = 1$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i2\pi x_m} = 1$, d'où le résultat.

(c) La suite $(y_m)_m$ étant bornée, il suffit de montrer que 0 est la seule valeur d'adhérence de $(y_m)_m$.

soit l une valeur d'adhérence de la suite $(y_m)_m$, il existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $l = \lim_{m \rightarrow +\infty} y_{\phi(m)}$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i2\pi x_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i2\pi(N_m + y_m)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i2\pi y_m} = e^{i2\pi l}$, donc $e^{i2\pi l} = 1$, et puisque la suite $(y_m)_m$ est à valeurs dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ alors $l \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc $2i\pi l \in [-\pi, \pi]$ d'où $l = 0$

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j x_m} e^{i\lambda_j y_m} = e^{-i\alpha_j}$

11. (a) Supposons l'existence d'un intervalle fermé borné I et $a \in I$ tel que $|f(a)| = n+2$. fixons un $\varepsilon > 0$, on a $|f(a)| \geq n+2 - \varepsilon$, et comme $f(a)$ est somme de $n+2$ complexes de module 1, par la question 9. $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $|e^{i\lambda_j a} - 1| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$ et $|e^{i2\pi a} - 1| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $e^{i\lambda_j a} + 1 = 0$ et $e^{i2\pi a} - 1 = 0$. D'une part $e^{i2\pi a} = 1$ donne $a \in \mathbb{Z}$. D'autre part $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $e^{i\lambda_j a} = -1$, donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ il existe $p_j \in \mathbb{Z}$ tel que $a\lambda_j = (2p_j + 1)\pi$ puisque la famille (λ_j, π) est $\mathbb{Q}$ -libre et $a, p_j \in \mathbb{Z}$ alors $2p_j + 1 = a = 0$ donc $|f(a)| = |f(0)| = n-2$ contradiction.

(b) Soit $(x_m)_m$ comme à la question 10.a.

D'abord montrons que cette suite n'est pas bornée. Par l'absurd supposons que elle est bornée, d'après le théorème de bolzano-Weierstrass, $(x_m)_m$ possède une suite extraite convergente, soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que la suite $(x_{\phi(m)})_m$ converge de limite l , puisque f est continue en l alors $|f(l)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} |f(x_{\phi(m)})| = n+2$, considérons l'intervalle fermé borné $I = [l-1, l+1]$ on a $l \in I$ et $|f(l)| = n+2$ contradiction (avec 11.a.)

Maintenant la suite $(x_m)_m$ n'est pas bornée, donc au moins n'est pas majorée ou n'est pas minorée.

Traitons le cas où la suite n'est pas majorée

Il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq y_{m_0}$ et posons $\psi(0) = m_0$, supposons qu'on a construis $\psi(0) < \dots < \psi(m)$ avec $0 \leq \forall k \leq m$, $k \leq x_{\psi(k)}$, la suite $(x_k)_{k \geq \psi(m)+1}$ n'est pas bornée, donc il existe $k_0 > \psi(m)$ tel que $m+1 \leq x_{k_0}$ on pose $\psi(m+1) = k_0$ on a $\psi(0) < \dots < \psi(m) < \psi(m+1)$ et $0 \leq \forall k \leq m+1$, $k \leq x_{\psi(k)}$, on a construis alors une suite extraite $(x_{\psi(m)})_m$ de la suite $(x_m)_m$ tel que $\forall m$, $m \leq x_{\psi(m)}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\psi(m)} = +\infty$, et on a de plus, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j x_{\psi(m)}} = -1.$$

Posons $N'_m = [x_{\psi(m)} + \frac{1}{2}]$ (la partie entière de ...) et $y_m = x_{\psi(m)} - N'_m$ de sorte que $x_{\psi(m)} = N'_m + y_m$ et $y_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, par 10.c on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_m = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} N'_m = +\infty$, et $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N'_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j (x_{\psi(m)} - y_m)} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\lambda_j N'_m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{i\lambda_j N'_m})^2 = 1$$

Dans le cas où la suite n'est pas minorée on construis (de même façon) la suite $(N_m)_m$ de limite $-\infty$

12. Démonstration du théorème :

On pose $g(x) = 1 + \sum_{j=1}^n e^{-i\alpha_j} e^{i\lambda_j x} + e^{i2\pi x}$, on d'après les questions précédentes $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = n + 2$, on va distinguer deux cas, selon que le sup est atteint ou non.

• Premier cas : S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $|g(a)| = n + 2$

Dans ce cas on a $|1 + \sum_{j=1}^n e^{-i\alpha_j} e^{i\lambda_j a} + e^{i2\pi a}| = n + 2$, donc $e^{i2\pi a} = 1$ et $1 \leq \forall j \leq n, e^{-i\alpha_j} e^{i\lambda_j a} = 1$, par suite $a \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq \forall j \leq n, \alpha_j = \lambda_j a \bmod 2\pi$, soit $(N_m)_m$ une suite d'entiers naturels tel que $\lim_{m \rightarrow +\infty} N_m = +\infty$ et $1 \leq \forall j \leq n, \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N_m} = 1$, on pose $N'_m = N_m + a$ qui est le terme d'une suite d'entiers naturels à partir d'un certain rang et tend vers $+\infty$, de sorte que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N'_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N_m} e^{i\lambda_j a} = e^{i\alpha_j}$

• Si $\forall x \in \mathbb{R} \quad |g(x)| < n + 2$

Dans ce cas elle existe une suite de nombres réels $(x_m)_m$ non bornée tel que $\lim_{m \rightarrow +\infty} |g(x_m)| = n + 2$, de laquelle on peut extraire une suite qui tend vers $\pm\infty$, pour simplifier on peut supposer que la suite $(x_m)_m$ tend vers $+\infty$.

Si $(x_m)_m$ tend vers $+\infty$, on prend $N_m = [x_m + \frac{1}{2}] - y_m$ et on a $y_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (comme à la question 10.c), la suite $(N_m)_m$ tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain rang elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $e^{i\lambda_j N_m} = e^{i\alpha_j}$.

Si $(x_m)_m$ tend vers $-\infty$, on pose $N_m = [x_m + \frac{1}{2}] - y_m$ donc $(N_m)_m$ tend vers $-\infty$, on va construire par récurrence une application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel la suite $(2N_m - N_{\psi(m)})_m$ soit strictement croissante.

On prend $\psi(0) = 0$, il existe un entier que l'on note $\psi(1)$ tel que $N_{\psi(1)} \leq 2N_1 - 2N_0 - \frac{1}{2} < 2N_1 - 2N_0$ de sorte que $2N_0 - N_{\psi(0)} < 2N_1 - N_{\psi(1)}$

On suppose qu'ils existent $\psi(0) < \dots < \psi(m)$ tels que $2N_0 - N_{\psi(0)} < \dots < 2N_m - N_{\psi(m)}$, il existe un entier noté $\psi(m+1)$ tel que $\psi(m) < \psi(m+1)$ et $N_{\psi(m+1)} \leq 2N_{m+1} - (2N_m - N_{\psi(m)}) - \frac{1}{2}$ de sorte que $2N_m - N_{\psi(m)} < 2N_{m+1} - N_{\psi(m+1)}$

on pose $N'_m = 2N_m - N_{\psi(m)}$, la suite $(N'_m)_m$ est une suite d'entiers relatifs, strictement croissante, donc tend vers $+\infty$, en particulier elle est à termes dans $\mathbb{N}$ à partir d'un certain rang. Et on a $1 \leq \forall j \leq n, \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N'_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i2\lambda_j N_m} e^{-i\lambda_j N_{\psi(m)}} = e^{i2\alpha_j} e^{-i\alpha_j} = e^{i\alpha_j}$

Remarque(utile pour la suite) : dans le théorème de Kronecker on peut supposer de plus que la suite $(N_m)_m$ est strictement croissante, pour qu'elle soit une suite extraite de la suite $(m)_m$, "De toute suite de limite $+\infty$ on peut extraire une suite strictement croissante"

Troisième partie : valeurs d'adhérence aux points de C-convergence

13. (a) • Cas $\frac{x}{\pi} \in \mathbb{Q}$, ils existent $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{x}{\pi} = \frac{p}{q}$ de sorte que $x = \frac{p}{q}\pi$, on a $S_n(e^{ix}) - \sigma(e^{ix}) = \frac{e^{ix(n+1)}}{e^{ix}-1} = e^{ix} \frac{e^{ixn}}{e^{ix}-1}$, on pose $v_n = e^{inx}$ et remarquons que la suite $(v_n)_n$ est $2q$ -périodique, donc elle est à valeurs dans le compact $\{v_k, 0 \leq k \leq 2q-1\}$, en particulier l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(v_n)_n$ est inclus dans $\{v_k, 0 \leq k \leq 2q-1\}$. Réciproquement pour $0 \leq k \leq 2q-1$, on a $v_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{k+2qn}$, donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(v_n)_n$ est $\{v_k, 0 \leq k \leq 2q-1\}$, d'où $\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\sigma(e^{ix}) + e^{ix} \frac{e^{ixk}}{e^{ix}-1}, 0 \leq k \leq 2q-1\}$

• Cas $\frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, dans ce cas la famille (x, π) est $\mathbb{Q}$ -libre, d'après le théorème de Kronecker l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{inx})_n$ est $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, donc $\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\sigma(e^{ix}) + e^{ix} \frac{e^{i\theta}}{e^{ix}-1}, \theta \in \mathbb{R}\} = C(\sigma(e^{ix}), \frac{1}{|e^{ix}-1|})$

- (b) D'abord remarquons que si $(u_n)_n$ est une suite alors :

L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ = l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_{2n})_n \cup$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_{2n+1})_n$

On a $S_{2n}(e^{ix}) = \sigma(e^{ix}) - e^{ix} \frac{\alpha + \beta + \alpha e^{ix}}{1 - e^{i2x}} e^{in(2x)}$, la famille $(2x, \pi)$ est $\mathbb{Q}$ -libre, donc d'après le théorème de Kronecker, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{in(2x)})_n$ est $\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, par suite l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(S_{2n}(e^{ix}))_n$ est $\{\sigma(e^{ix}) - e^{ix} \frac{\alpha + \beta + \alpha e^{ix}}{1 - e^{i2x}} e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = C(\sigma(e^{ix}), |\frac{\alpha + \beta + \alpha e^{ix}}{1 - e^{i2x}}|) = C_1$

$S_{2n+1}(e^{ix}) = \sigma(e^{ix}) - e^{i2x} \frac{\alpha + (\beta + \alpha)e^{ix}}{1 - e^{i2x}} e^{in(2x)}$, la famille $(2x, \pi)$ est $\mathbb{Q}$ -libre, donc d'après le théo-

rème de Kronecker, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{in(2x)})_n$ est $\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, par suite l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(S_{2n+1}(e^{ix}))_n$ est $\{\sigma(e^{ix}) - e^{i2x} \frac{\alpha + (\beta + \alpha)e^{ix}}{1 - e^{i2x}} e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = C(\sigma(e^{ix}), |\frac{\alpha + (\beta + \alpha)e^{ix}}{1 - e^{i2x}}|) = C_2$, ainsi $\mathcal{L}(e^{ix}) = C_1 \cup C_2$

- (c) On a $S_n(e^{ix}) = \sigma(e^{ix}) - (e^{ix} \frac{e^{inx}}{1 - e^{ix}} + \alpha e^{i(\lambda+x)} \frac{e^{in(\lambda+x)}}{1 - e^{i(\lambda+x)}})$, la famille (x, λ, π) est $\mathbb{Q}$ -libre donc la famille $(x, x + \lambda, \pi)$ est aussi $\mathbb{Q}$ -libre, alors par le théorème de Kronecker

$\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\sigma(e^{ix}) - (e^{ix} \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{ix}} + \alpha e^{i(\lambda+x)} \frac{e^{i\theta'}}{1 - e^{i(\lambda+x)}}) / \theta, \theta' \in \mathbb{R}\}$ et les changement des paramètres $\theta \leftarrow \theta + x$ et $\theta' \leftarrow \theta + x + \lambda$, on obtient $\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\sigma(e^{ix}) - (\frac{e^{i\theta}}{1 - e^{ix}} + \alpha \frac{e^{i\theta'}}{1 - e^{i(\lambda+x)}}) / \theta, \theta' \in \mathbb{R}\}$

Posons $\frac{1}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\theta_1}}{|1 - e^{ix}|}$ et $\frac{1}{1 - e^{i(\lambda+x)}} = \frac{e^{i\theta_2}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}$ on a alors

$\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\sigma(e^{ix}) - (\frac{e^{i(\theta+\theta_1)}}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{e^{i(\theta'+\theta_2)}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}) / \theta, \theta' \in \mathbb{R}\}$, de même par les changement des paramètres $\theta \leftarrow \theta + \theta_1$ et $\theta' \leftarrow \theta' + \theta_2$, on obtient $\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\sigma(e^{ix}) - (\frac{e^{i\theta}}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{e^{i\theta'}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}) / \theta, \theta' \in \mathbb{R}\}$

Soit $\zeta \in \mathbb{C}$, on a $\zeta \in \mathcal{L}(e^{ix})$ si, et seulement si, ils existent $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $\sigma(e^{ix}) - \zeta = \frac{e^{i\theta}}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{e^{i\theta'}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}$ si, et seulement si, ils existent $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $|\sigma(e^{ix}) - \zeta| = |\frac{e^{i\theta}}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{e^{i\theta'}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}|$ (en effet, pour la réciproque, les deux complexes ont même module donc ils sont égaux modulo un complexe de module 1 et quitte à changer les paramètres on obtient...), maintenant on a

$$\{|\sigma(e^{ix}) - \zeta| / \zeta \in \mathcal{L}(e^{ix})\} = \{|\frac{1}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{e^{i(\theta' - \theta)}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|} / \theta, \theta' \in \mathbb{R}\} = \{|\frac{1}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{e^{i\theta}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|} / \theta \in \mathbb{R}\}$$

Il reste à démontrer que pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, il existent r_1 et r_2 tels $0 < r_1 < r_2$ et $\{|\sigma(e^{ix}) - \zeta| / \zeta \in \mathcal{L}(e^{ix})\} = [r_1, r_2]$

On considère la fonction de $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = |\frac{1}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{e^{i\theta}}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}|$, la fonction g est continue et on a $g(0) = |\frac{1}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{1}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}| = \frac{1}{|1 - e^{ix}|} + \alpha \frac{1}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}$ et $g(\pi) = |\frac{1}{|1 - e^{ix}|} - \alpha \frac{1}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}|$, et pour $\alpha > 0$ suffisamment petit on a $\frac{1}{|1 - e^{ix}|} > \alpha \frac{1}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}$ donc $g(\pi) = \frac{1}{|1 - e^{ix}|} - \alpha \frac{1}{|1 - e^{i(\lambda+x)}|}$. on pose $r_1 = g(\pi)$ et $r_2 = g(0)$, par les inégalités triangulaires on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $g(\pi) \leq g(\theta) \leq g(0)$, par la continuité de g , $g(\mathbb{R}) = [r_1, r_2]$ d'où $\{|\sigma(e^{ix}) - \zeta| / \zeta \in \mathcal{L}(e^{ix})\} = g(\mathbb{R}) = [r_1, r_2]$ et remarquons que $0 < r_1 < r_2$

Fin