Corrigé X-ENS 2020, épreuve B , MP .

MUSTAPHA LAAMOUM
m.laamoum@gmail.com

Première partie :

1 . On remarque que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\{-1,1\} \subset X_k(\Omega)$ et pour tout $h \in X_k(\Omega) \setminus \{-1,1\}$ on a $\mathbb{P}[X_k = h] = 0$ et $\mathbb{E}(X_k) = 0$.
Par le théorème de transfert on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(\lambda Z)] &= \sum_{z \in Z(\Omega)} e^{\lambda z} \mathbb{P}(Z = z) \\ &\geq \sum_{\substack{z \in Z(\Omega) \\ z \geq t}} e^{\lambda z} \mathbb{P}(Z = z) \\ &\geq e^{\lambda t} \sum_{\substack{z \in Z(\Omega) \\ z \geq t}} \mathbb{P}(Z = z) = e^{\lambda t} \mathbb{P}(Z \geq t) \end{aligned}$$

ce qui donne $\mathbb{P}(Z \geq t) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}[\exp(\lambda Z)]$.

2 . On a $[S_n < 0] = \overline{[S_n \geq 0]}$, et $X_1 + .. + X_n < 0 \Rightarrow \exists i \in \{1, .., n\}$, $X_i < 0$, donc $[S_n < 0] \subset [X_i < 0]$ et $\mathbb{P}[S_n < 0] \leq \mathbb{P}[X_i < 0]$,
or $\mathbb{P}[X_i < 0] \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ donc $\mathbb{P}[S_n < 0] \leq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}[S_n \geq 0] \geq \frac{1}{2}$.

3 . De la question 1. on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n &\geq t] = \mathbb{P}[nS_n \geq nt] \\ &\leq \exp(-\lambda nt) \mathbb{E}[\exp(\lambda n S_n)] \end{aligned}$$

comme $X_1, .., X_n$ sont indépendantes alors $\exp(\lambda X_1), .., \exp(\lambda X_n)$ le sont aussi donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(\lambda n S_n)] &= \mathbb{E}[\exp(\lambda(X_1 + .. + X_n))] \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(\lambda X_k] \end{aligned}$$

et par le théorème de transfert on a $\mathbb{E}[\exp(\lambda X_k)] = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$ ce qui donne :

$$\mathbb{P}[S_n \geq t] \leq \exp(-\lambda nt) \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \right)^n = \exp(n(\psi(\lambda) - \lambda t))$$

donc $\frac{1}{n} \log \mathbb{P}[S_n \geqslant t] \leqslant (\psi(\lambda) - \lambda t)$ pour tout $\lambda \geq 0$, *(éventuelement valable si* $\mathbb{P}[S_n \geqslant t] = 0$), ce qui donne le résultat.

4 . Soit $\lambda \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}\left[X_1 \exp(\lambda X_1)\right] = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}$ et $\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_1)\right] = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$ donc $m(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} = th(\lambda)$ qui est strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ vers $[0, 1[$ donc bijective, d'où pour tout $t \in [0, 1[$ il existe un unique $\lambda \geqslant 0$ tel que $m(\lambda) = t$.

5 a . Soit $n \geqslant 2$ et $\lambda \geqslant 0$, on a

$$(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda)) D_n(\lambda) = \left[\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda))\right] \left[\exp(\lambda X_2)(X_2 - m(\lambda))\right] \exp\left(\lambda T_n - n\psi(\lambda)\right)$$

avec $T_n = X_3 + .. + X_n$.
Les variables X_i sont indépendantes donc X_1, X_2, T_n le sont , d'où l'indépendance des variables

$$\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda)) \text{ , } \exp(\lambda X_2)(X_2 - m(\lambda)) \text{ et } \exp\left(\lambda T_n - n\psi(\lambda)\right)$$

donc

$$\mathbb{E}\left[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda)) D_n(\lambda)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda))\right] . \mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_2)(X_2 - m(\lambda))\right] . \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda T_n - n\psi(\lambda)\right)\right]$$

de plus $\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda))\right] = e^{\lambda}(1 - m(\lambda)) + e^{-\lambda}(-1 - m(\lambda)) = 0$ d'où le résultat.

b. On a aussi pour $i \neq j$, $\mathbb{E}\left[(X_i - m(\lambda))\left(X_j - m(\lambda)\right) D_n(\lambda)\right] = 0$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - m(\lambda)\right)^2 D_n(\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} (X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right]
\end{aligned}$$

Par indépendance des X_i on obtient :

$$\mathbb{E}\left[(X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] = e^{-n\psi(\lambda)}\mathbb{E}\left[(X_k - m(\lambda))^2 \exp(\lambda X_k)\right]\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sum_{i\neq k} X_i\right)\right]$$

et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_k - m(\lambda))^2 \exp(\lambda X_k)\right] &= \frac{1}{2}(1 - m(\lambda))^2 e^{\lambda} + \frac{1}{2}(1 + m(\lambda))^2 e^{-\lambda} \\
&= \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sum_{i\neq k} X_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_1)\right]^{n-1} = \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^{n-1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] &= \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^{-n} \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right)^2}
\end{aligned}$$

finalement : $\mathbb{E}\left[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] = \frac{1}{n}\frac{4}{\left(e^{\lambda}+e^{-\lambda}\right)^2} \leq \frac{1}{n}$ (sauf erreur de calcul on trouve une meilleure majoration !)

6.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_n(\lambda,\varepsilon)\exp\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)\right] &= \sum_{\substack{s\in S_n(\Omega)\\ |s-m(\lambda)|\leqslant\varepsilon}} e^{\lambda n(s-m(\lambda)-\varepsilon)}\mathbb{P}[S_n = s] \\
&\leq \sum_{\substack{s\in S_n(\Omega)\\ |s-m(\lambda)|\leqslant\varepsilon}} \mathbb{P}[S_n = s] = \mathbb{P}[|S_n - m(\lambda)| \leqslant \varepsilon] \quad (\text{car } s - m(\lambda) - \varepsilon \leq 0)
\end{aligned}$$

7. Ecrivons $(S_n - m(\lambda))^2 = (1 - I_n(\lambda,\varepsilon))(S_n - m(\lambda))^2 + I_n(\lambda,\varepsilon)(S_n - m(\lambda))^2$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] &\geq \mathbb{E}\left[(1 - I_n(\lambda,\varepsilon))(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] \\
&\geq \varepsilon^2\mathbb{E}\left[(1 - I_n(\lambda,\varepsilon))D_n(\lambda)\right]
\end{aligned}$$

on vérifie facilement que $\mathbb{E}[D_n(\lambda)] = 1$ et on a $\mathbb{E}\left[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right] \leq \frac{4}{n}$, ce qui donne le résultat.

8a. Puisque $[\,|s - m(\lambda)| \leqslant \varepsilon] = [S_n \geqslant m(\lambda) - \varepsilon] \cap [S_n \leq m(\lambda) + \varepsilon]$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_n \geqslant m(\lambda) - \varepsilon]) &\geq \mathbb{P}([|s - m(\lambda)| \leqslant \varepsilon]) \\
&\geq \mathbb{E}\left[I_n(\lambda,\varepsilon)\exp\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)\right] \\
&\geq \mathbb{E}[(I_n(\lambda,\varepsilon)D_n(\lambda)].e^{n\psi(\lambda)-\lambda nm(\lambda)-\varepsilon n\lambda} \\
&\geq (1 - \frac{4}{n\varepsilon^2})e^{n\psi(\lambda)-\lambda nm(\lambda)-\varepsilon n\lambda}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[S_n \geqslant m(\lambda)-\varepsilon\right] \geqslant \psi(\lambda)-\lambda m(\lambda)-\lambda\varepsilon+u_n(\varepsilon)$$

avec $u_n(\varepsilon)=\frac{1}{n}\log(1-\frac{4}{n\varepsilon^2})$

b. D'après 3. on a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[S_n \geqslant t\right] \leqslant \inf_{\lambda\geqslant 0}(\psi(\lambda)-\lambda t)$$

Soit $t\in[0,1[$ et ε tel que $t+\varepsilon\in[0,1[$, d'après 4. $\exists\lambda\geq 0$ tel que $m(\lambda)=t+\varepsilon$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[S_n \geqslant t\right] &= \frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[S_n \geqslant m(\lambda)-\varepsilon\right]\\ &\geqslant \psi(\lambda)-\lambda t+u_n(\varepsilon)\\ &\geq \inf_{\lambda\geqslant 0}(\psi(\lambda)-\lambda t)+u_n(\varepsilon)\end{aligned}$$

finalement

$$\inf_{\lambda\geqslant 0}(\psi(\lambda)-\lambda t)+u_n(\varepsilon)\leq \frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[S_n \geqslant t\right] \leqslant \inf_{\lambda\geqslant 0}(\psi(\lambda)-\lambda t)$$

ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[S_n\geqslant t\right]=\inf\limits_{\lambda\geqslant 0}(\psi(\lambda)-\lambda t)$.

c. Ecrivons

$$\mathbb{P}\left[S_n\geqslant 1\right]=\mathbb{P}\left(\left[S_n\geqslant 1\right]\cap\left[X_n=1\right]\right)+\mathbb{P}\left(\left[S_n\geqslant 1\right]\cap\left[X_n=-1\right]\right)+\mathbb{P}\left(\left[S_n\geqslant 1\right]\cap\left[X_n\notin\{1,-1\}\right]\right)$$

on a $\mathbb{P}\left(\left[S_n\geqslant 1\right]\cap\left[X_n=-1\right]\right)=\mathbb{P}\left[X_1+..+X_{n-1}\geqslant n+1\right]=0$ car $\exists i$ tel que $\left[X_1+..+X_{n-1}\geqslant n+1\right]\subset\left[X_i>1\right]$, et $\mathbb{P}\left(\left[S_n\geqslant 1\right]\cap\left[X_n\notin\{1,-1\}\right]\right)=0$
Donc $\mathbb{P}\left[S_n\geqslant 1\right]=\mathbb{P}\left(\left[S_{n-1}\geqslant 1\right]\cap\left[X_n=1\right]\right)$ ainsi par récurrence on a

$$\mathbb{P}\left[S_n\geqslant 1\right]=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left[X_i=1\right]\right)=\frac{1}{2^n}$$

et $\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[S_n\geqslant 1\right]=-\log 2$. La fonction $\varphi(\lambda)=\psi(\lambda)-\lambda=\log ch(\lambda)-\lambda$ est décroissante sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varphi(\lambda)=-\log 2$.
Donc le résultat est valable pour $t=1$.

Deuxième partie :

9. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, f admet un maximum en $x_0\in]a,b[$ donc $f'(x_0)=0$ et $\exists\alpha>0$ tel que

$$]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\subset]a,b[\text{ et }\forall x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[,\ f(x)\leq f(x_0),$$

la formule de Taylor Mac-Laurin donne : $f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(x_0)+o((x-x_0)^2)\leq 0$ et $f''(x_0)+o(1)\leq 0$ donc $f''(x_0)<0$.

10. Soit $\delta>0$ tel que $\delta<\min(x_0-a,b-x_0)$,soit $x_1\in[a,x_0-\delta]\cup[x_0+\delta,b]$ tel que $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,x_0-\delta]\cup[x_0+\delta,b]}f(x)$, on a :

$$0\leq\int_a^{x_0-\delta}e^{tf(x)}\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b}e^{tf(x)}\mathrm{d}x\leq 2(b-a)e^{tf(x_1)}$$

comme $x_0$est l'unique maximum de f sur $[a,b]$ alors $f(x_1)<f(x_0)$ par suite

$$\int_a^{x_0-\delta}e^{tf(x)}\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b}e^{tf(x)}\mathrm{d}x\underset{t\to+\infty}{=}o(e^{tf(x_0)}).$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ assez petit vérifiant $f(x_0) - \varepsilon > f(x_1)$, soit le réel $\delta_0 > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\ f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$, posons $\alpha = \min(\delta, \delta_0)$,nous avons alors

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \geq 2\alpha e^{t(f(x_0)-\varepsilon)}$$

ce qui donne

$$\int_a^{x_0-\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{t(f(x_0)-\varepsilon)})$$

et

$$\int_a^{x_0-\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{=} o(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x)$$

d'où $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_a^b e^{tf(x)}\mathrm{d}x$.

11 . La formule de Taylor Mac-Laurin donne :

$$f(x) - f(x_0) = -\frac{1}{2}(x-x_0)^2(\left|f''(x_0)\right| + \alpha(x-x_0)) \text{ et } \alpha(x-x_0) \underset{x\to x_0}{\to} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, considérons $\varepsilon_1 > 0$, qu'on précisera par la suite , et $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\subset [a,b], |\alpha(x-x_0)| \leq \varepsilon_1 \left|f''(x_0)\right|$$

donc

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x = e^{tf(x_0)} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{t}{2}(x-x_0)^2(\left|f''(x_0)\right|+\alpha(x-x_0))}\mathrm{d}x$$

On pose $s = (x-x_0)\sqrt{\frac{t\left|f''(x_0)\right|}{2}}$ et $c = \delta\sqrt{\frac{t\left|f''(x_0)\right|}{2}}$ on obtient

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{t}{2}(x-x_0)^2(\left|f''(x_0)\right|-\alpha(x-x_0))}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{t\left|f''(x_0)\right|}}\int_{-c}^{c} e^{-s^2(1+\alpha'(s))}\mathrm{d}s$$

et $\left|\alpha'(s)\right| \leq \varepsilon_1$ donc

$$\int_{-c}^{c} e^{-s^2(1+\varepsilon_1)}\mathrm{d}s \leq \int_{-c}^{c} e^{-s^2(1+\alpha'(s))}\mathrm{d}s \leq \int_{-c}^{c} e^{-s^2(1-\varepsilon_1)}\mathrm{d}s$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}\int_{-c\sqrt{1+\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1+\varepsilon_1}} e^{-s^2}\mathrm{d}s \leq \int_{-c}^{c} e^{-s^2(1+\alpha'(s))}\mathrm{d}s \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}}\int_{-c\sqrt{1-\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1-\varepsilon_1}} e^{-s^2}\mathrm{d}s$$

On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}$ donc il existe $A > 0$ tel que $t \geq A$,

$$\left|\int_{-c\sqrt{1+\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1+\varepsilon_1}} e^{-s^2}\mathrm{d}s - \sqrt{\pi}\right| \leq \varepsilon_1 \text{ et } \left|\int_{-c\sqrt{1-\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1-\varepsilon_1}} e^{-s^2}\mathrm{d}s - \sqrt{\pi}\right| \leq \varepsilon_1$$

donc

$$\frac{\sqrt{\pi}-\varepsilon_1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \leq \int_{-c}^{c} e^{-s^2(1+\alpha'(s))}\mathrm{d}s \leq \frac{\sqrt{\pi}+\varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}}$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{\pi}-\varepsilon_1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \leq e^{-tf(x_0)}\sqrt{\frac{t\left|f''(x_0)\right|}{2}}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{\sqrt{\pi}+\varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}}$$

On sait que $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_a^b e^{tf(x)}\mathrm{d}x$ donc $\exists A'>0$ tel que

$$(1-\varepsilon_1)\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x \leq \int_a^b e^{tf(x)}\mathrm{d}x \leq (1+\varepsilon_1)\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\mathrm{d}x$$

donc si $t \geq \max(A, A')$ on a

$$(1-\varepsilon_1)\frac{\sqrt{\pi}-\varepsilon_1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \leq e^{-tf(x_0)}\sqrt{\frac{t\left|f''(x_0)\right|}{2}}\int_a^b e^{tf(x)}\mathrm{d}x \leq (1+\varepsilon_1)\frac{\sqrt{\pi}+\varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}}$$

comme $(1-x)\frac{\sqrt{\pi}-x}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to0}{\to} \sqrt{\pi}$ alors $\exists\eta>0$ tel que $|x|\leq\eta$ donne $\left|(1-x)\frac{\sqrt{\pi}-x}{\sqrt{1+x}}-\sqrt{\pi}\right| \leq \varepsilon$, on choisit $\varepsilon_1$vérifiant : $\sqrt{\pi}-\varepsilon \leq (1-\varepsilon_1)\frac{\sqrt{\pi}-\varepsilon_1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}$ et $(1+\varepsilon_1)\frac{\sqrt{\pi}+\varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}} \leq \sqrt{\pi}+\varepsilon$. Donc pour $t \geq \max(A, A')$

$$\left|e^{-tf(x_0)}\sqrt{\frac{t\left|f''(x_0)\right|}{2}}\int_a^b e^{tf(x)}\mathrm{d}x - \sqrt{\pi}\right| \leq \varepsilon$$

d'où le résultat.

12 a . Par récurrence

b . Dans $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\mathrm{d}t$ on fait le changement $x=\frac{t}{n}$ on obtient: $n! = n^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{n(\log x - x)}\mathrm{d}x$.
la fonction $\varphi : x \to \log x - x$, admet un maximum unique en $x=1$ et $\varphi''(1) = -1$.
On remarque que $\forall x>0$, $\log x \leq \frac{x}{2}$ donc $\varphi(x) \leq \frac{-x}{2}$ et $\int_2^{+\infty} e^{n(\log x - x)}\mathrm{d}x \leq \int_2^{+\infty} e^{-nx/2}\mathrm{d}x = \frac{2e^{-n}}{n}$.
Par application du résultat de la question 11.

$$\int_0^2 e^{n(\log x - x)}\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\sim} e^{n\varphi(1)}\sqrt{\frac{2\pi}{n\left|\varphi''(1)\right|}} = e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{n(\log x - x)}\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ ce qui donne $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Trosième Partie :

13 . On a $\int_0^a \left|\sin\left(x^2\right)\right|\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{t}}{=} \int_0^{a^2}\frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Posons $N = E(\frac{a^2}{\pi})$ (E est la partie entière), on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^a \left|\sin\left(x^2\right)\right|\mathrm{d}x &\geq \int_0^{N\pi}\frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(t+k\pi)|}{2\sqrt{t+k\pi}}\mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2\sqrt{\pi(1+k)}}\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

finalement $\int_0^a \left|\sin\left(x^2\right)\right|\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{1+k}}$, la série $\sum\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ diverge donc $\int_0^a \left|\sin\left(x^2\right)\right|\mathrm{d}x \underset{a\to+\infty}{\to} +\infty$

14 . Par le théorème d'intégration des séries entières sur un segment.

15. $\displaystyle\int_1^a \sin\left(x^2\right) dx = \int_1^a \frac{-1}{2x}\left(\cos\left(x^2\right)\right)' dx = \left[\frac{-\cos\left(x^2\right)}{2x}\right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{2x^2}\cos\left(x^2\right) dx$

on a $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{\cos(a^2)}{2a} = 0$ et la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^2)}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty}\displaystyle\int_1^a \frac{\cos\left(x^2\right)}{x^2} dx$ existe , d'où l'existence de $\lim\limits_{a\to+\infty}\displaystyle\int_0^a \sin\left(x^2\right) dx$.

De même on a l'existence de $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a \cos\left(x^2\right) dx$.

16. On a $\displaystyle\int_0^a \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \int_a^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$, trois intégrations par parties donnent:

$$\int_0^a \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\cos\left(a^2\right)}{2a} - \frac{\sin\left(a^2\right)}{4a^3} - \frac{3}{12}\frac{\cos\left(a^2\right)}{a^5} + \frac{15}{8}\int_a^{+\infty}\frac{\cos\left(x^2\right)}{x^6}$$

et on a $\displaystyle\left|\int_a^{+\infty}\frac{\cos\left(x^2\right)}{x^6} dx\right| \leq \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^6} dx = \frac{1}{5a^5}$; d'où

$$\int_0^a \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\cos\left(a^2\right)}{2a} - \frac{\sin\left(a^2\right)}{4a^3} + O\left(\frac{1}{a^5}\right)$$

De même on a

$$\int_0^a \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{\sin\left(a^2\right)}{2a} - \frac{\cos\left(a^2\right)}{4a^3} + O\left(\frac{1}{a^5}\right)$$

.

17. Ecrivons $\displaystyle\int_{x_0}^1 g(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x = g(x_0)\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 (g(x)-g(x_0))\sin(tf(x))\mathrm{d}x.$

Posons $\varphi : [x_0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(x_0)}{f'(x)} & \text{si } x \in]x_0, 1] \\ \frac{g'(x_0)}{f''(x_0)} & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

φ admet un développement limitée en x_0 d'ordre 1 donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x_0, 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^1 (g(x)-g(x_0))\sin(tf(x))\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^1 \varphi(x)\, f'(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{\varphi(x)}{t}\cos(tf(x))\right]_{x_0}^1 + \int_{x_0}^1 \frac{\varphi'(x)}{t}\cos(tf(x))\mathrm{d}x \end{aligned}$$

φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x_0, 1]$ donc φ et φ' sont bornées sur $[x_0, 1]$ ce qui donne

$$\int_{x_0}^1 (g(x)-g(x_0))\sin(tf(x))\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

18 a. On a f est $\mathscr{C}^\infty$sur $[0,1]$, $f''(x_0) > 0$ donc $f''(x) > 0$ pour tout x dans un voisinage de x_0 de la forme $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, f' est strictement croissante sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ et $f'(x_0) = 0$ donc $f'(x) > 0$ pour tout x dans $]x_0, x_0+\alpha]$, or f' s'annule uniquement en x_0 donc $f'(x) > 0$ pour tout x dans $]x_0, 1]$ et f est strictement croissante sur $]x_0, 1]$ donc strictement croissante sur $[x_0, 1]$.
Donc $h(x) = \sqrt{\left|f(x)-f(x_0)\right|} = \sqrt{f(x)-f(x_0)}$, h est strictement croissante ,de $[x_0, 1]$ sur $[0, h(1)]$, comme composée de deux fonctions strictement croissantes, donc elle est bijective.

b. soit $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{h(x_0+t)-h(x_0)}{t} &= \frac{\sqrt{f(x_0+t)-f(x_0)}}{t} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)t^2 + o(t^2)}}{t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0) + o(1)} \end{aligned}$$

donc h est dérivable en x_0 à droite, et $h'(x_0) = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$.

19 . On admet que $h^{-1}:[0,h(1)]\to[x_0,1]$ est infiniment dérivable.
Par le changement $s=h(x)$ on obtient :

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\mathrm{d}x=\int_0^{h(1)} \sin(t(s^2+f(x_0)))\ (h^{-1}(s))'\mathrm{d}s$$

d'après la question 17 on a :

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\mathrm{d}x=(h^{-1})'(0)\int_0^{h(1)} \sin(t(s^2+f(x_0)))\ \mathrm{d}s+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

avec $(h^{-1})'(0)=\frac{1}{h'(x_0)}=\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}$,et

$$\int_0^{h(1)} \sin(t(s^2+f(x_0)))\ \mathrm{d}s=\frac{\cos(tf(x_0))}{\sqrt{t}}\int_0^{\sqrt{t}h(1)} \sin(s^2)\mathrm{d}s+\frac{\sin(tf(x_0))}{\sqrt{t}}\int_0^{\sqrt{t}h(1)} \cos(s^2)\mathrm{d}s$$

d'après la question 16 on a : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}h(1)} \sin(s^2)\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}+O(\frac{1}{\sqrt{t}})$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}h(1)} \cos(s^2)\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}+O(\frac{1}{\sqrt{t}})$, ce qui donne

$$\int_0^{h(1)} \sin(t(s^2+f(x_0)))\ \mathrm{d}s=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin(tf(x_0)+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{t}}+O(\frac{1}{t})$$

finalement

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\mathrm{d}x=\sin\left(tf(x_0)+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}}+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

20 . Supposons que $x_0\in]0,1[$ écrivons

$$\int_0^1 g(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x=\int_0^{x_0} g(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1 g(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x$$

d'après ce qui précède on a $\displaystyle\int_{x_0}^1 g(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x=g(x_0)\sin\left(tf(x_0)+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}}+O\left(\frac{1}{t}\right)$,

par le changement $s=1+\frac{x_0-1}{x_0}x$ on ramène l'autre intégrale à une intégrale, dans $[x_0,1]$, ce qui donne aussi

$\displaystyle\int_0^{x_0} g(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x=g(x_0)\sin\left(tf(x_0)+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}}+O\left(\frac{1}{t}\right)$,d'où

$$\int_0^1 g(x)\sin(tf(x))\mathrm{d}x=g(x_0)\sin\left(tf(x_0)+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{tf''(x_0)}}+O\left(\frac{1}{t}\right).$$