

2024 - CENTRALE - MP - MPI - MATHÉMATIQUES 2

ENONCÉ

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d .
- On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Objectifs du problème

Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) = h(x). \quad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h) .

La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.

La partie II introduit la définition et établit quelques propriétés des fonctions entières.

La partie III définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h) , ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.

La partie IV étend la résolution de (E_h) au cas où h est une fonction entière.

I Etude de l'opérateur différence finie

On considère l'application Δ définie par

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

- Q1.** Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
Q2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .
Q3. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ .

- Q4.** Déterminer $\text{Ker}(\Delta_d)$ et $\text{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.
Q5. En déduire $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.
Q6. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h) .
Q7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme annulateur de Δ_d . L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable ?

II Fonctions entières

On note ω l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par $\omega(t) = e^{2i\pi t}$.

II.A - Généralités

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ développables en séries entières de rayon de convergence infini.

- Q8.** Justifier que si $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$ et $fg \in \mathcal{E}$.
Q9. Soit $f \in \mathcal{E}$ dont on note $\sum a_n z^n$ le développement en série entière.
 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^1 f(\omega(t))(\omega(t))^{-k} dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N}. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.B - Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt.$$

Q10. Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Q11. Montrer qu'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{E}$ et une constante $C \in]0, 1[$ telles que, pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$,

$$e^\zeta - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)) \quad \text{et} \quad |\beta(\zeta)| \leq C.$$

Q12. En déduire que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j.$$

Q13. Montrer que $I_0 = 1$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = 0$.

III Polynômes de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}} dt.$$

III.A - Lien avec l'équation (E_h)

Q14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} I_{k-n}.$$

En déduire que B_n est un polynôme unitaire de degré n .

Q15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B'_n = nB_{n-1}$.

Q16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}.$$

Q17. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

III.B - Unicité

Q18. Montrer que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant

$$\begin{cases} B_0 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1}. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0. \end{cases}$$

Q19. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = B_n$.

III.C - Une application analytique

Soit ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0. \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit de plus u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x, t) = \psi(x)e^{tx}.$$

Q20. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q21. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) = x \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + n \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x, t).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, t)$.

Q22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = B_n$.

IV Solution entière de l'équation (E_h)**IV.A - Une inégalité de contrôle**

On se propose dans cette partie de montrer par l'absurde la propriété $\mathcal{P}$:

$$\exists c > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^z - 1| \geq c \right).$$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

Q23. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et d'une suite de nombres complexes $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$e^{z_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad |z_p| = (2n_p + 1)\pi.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $a_p = \operatorname{Re}(z_p)$ et $b_p = \operatorname{Im}(z_p)$.

Q24. Montrer que $a_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $|z_p| - |b_p| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

Q25. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$\varepsilon_p = \begin{cases} +1 & \text{si } b_p \geq 0. \\ -1 & \text{si } b_p < 0. \end{cases}$$

En étudiant $\exp(z_p - i\varepsilon_p|z_p|)$, aboutir à une contradiction et conclure.

IV.B Une solution à (E_h)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit maintenant

$$\gamma_n : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (2n+1)\pi e^{2i\pi t} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, soit

$$Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n(t)^{n-1}} dt.$$

Q26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{E}$.

Q27. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z+1) - Q_n(z) = nz^{n-1}.$$

Q28. Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|Q_n(z)| \leq ae^{bn|z|}.$$

Q29. En déduire l'existence d'une solution dans $\mathcal{E}$ à l'équation (E_h) lorsque $h \in \mathcal{E}$.

I Etude de l'opérateur différence finie

Q1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\Delta(P)(X) + \mu\Delta(Q)(X).\end{aligned}$$

On a $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \quad \Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q).}$

Donc Δ est linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ et $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{K}[X].}$

Q2. Par la formule du binôme de Newton :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta(1) & = & 1 - 1 = 0. \\ \deg(\Delta(1)) & = & -\infty. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(X^n) & = & (X+1)^n - X^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right) - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg(\Delta(X^n)) & = & n-1. \end{array} \right.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg(P) \leq 0$, alors $P = a_0$ est un polynôme constant et $\Delta(P) = a_0\Delta(1) = 0$ donc $\deg(P) = -\infty$.

Si $d = \deg(P) \geq 1$, notons $P = \sum_{n=0}^d a_n X^n$, avec $a_d \neq 0$. Par linéarité de Δ :

$$\Delta(P) = \Delta\left(\sum_{n=0}^d a_n X^n\right) = \sum_{n=0}^d a_n \Delta(X^n) = 0 + \sum_{n=1}^d a_n \underbrace{\Delta(X^n)}_{\text{de degré } n-1}.$$

Les polynômes $\Delta(X^n)$ sont de degrés échelonnés donc $\deg(\Delta(P)) = d-1 = \deg(P) - 1$. Finalement,

$$\boxed{\deg(\Delta(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1. \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leq 0 \quad (P \text{ est constant}). \end{cases}}$$

Q3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathbb{K}_d[X]$ est stable par Δ .

Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \deg(P) \leq 0, \text{ alors } \Delta(P) = 0 \in \mathbb{K}_d[X]. \\ \text{Si } \deg(P) \geq 1, \text{ alors } \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \leq d-1 \leq d \text{ donc } \Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]. \end{array} \right.$$

D'où $\boxed{\forall P \in \mathbb{K}_d[X], \quad \Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]}$ et $\boxed{\mathbb{K}_d[X] \text{ est stable par } \Delta.}$

Donc $\boxed{\Delta \text{ induit un endomorphisme } \Delta_d \text{ sur } \mathbb{K}_d[X]}$ en posant $\Delta_d : \begin{vmatrix} \mathbb{K}_d[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_d[X] \\ P & \mapsto & \Delta(P) \end{vmatrix}.$

Q4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons le noyau de Δ_d .

On a montré que $\forall P \in \mathbb{K}_0[X], \Delta_d(P) = \Delta(P) = 0$. Donc $\mathbb{K}_0[X] \subset \text{Ker}(\Delta_d)$.

Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$ tel que $\deg(P) \geq 1$.

D'après la question **Q2.**, $\deg(\Delta_d(P)) = \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \geq 0$ donc $\Delta_d(P) \neq 0$ et $P \notin \text{Ker}(\Delta_d)$.

D'où $\boxed{\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X] = \{\text{polynômes constants de } \mathbb{K}[X]\}.}$

- Déterminons l'image de Δ_d . $\mathbb{K}_d[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^d)$ donc

$$\text{Im}(\Delta_d) = \Delta(\mathbb{K}_d[X]) = \text{Vect}(\Delta(1), \Delta(X), \Delta(X^2), \dots, \Delta(X^d)) = \text{Vect}(0, 1, \Delta(X^2), \dots, \Delta(X^d)) = \mathbb{K}_{d-1}[X].$$

En effet, la famille $(1, \Delta(X^2), \dots, \Delta(X^d))$ est une famille échelonnée en degrés, donc c'est une famille libre et de cardinal d de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ qui est de dimension d , donc c'est une base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$.

Donc $\boxed{\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X].}$

Q5. ★ • Déterminons le noyau de Δ .

On a $\forall P \in \mathbb{K}_0[X], \Delta(P) = 0$ donc $\mathbb{K}_0[X] \subset \text{Ker}(\Delta)$.

Réciproquement, soit $P \in \text{Ker}(\Delta)$ et $d = \deg(P)$. Alors $P \in \mathbb{K}_d[X]$ et $\Delta_d(P) = \Delta(P) = 0$, d'où $P \in \text{Ker}(\Delta_d)$.

D'après la question **Q4.**, $\text{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X]$ donc $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Ainsi $\text{Ker}(\Delta) \subset \mathbb{K}_0[X]$.

D'où $\boxed{\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X] = \{\text{polynômes constants de } \mathbb{K}[X]\}}.$

- Déterminons l'image de Δ . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si P est nul, alors $P = 0 = \Delta(0) \in \text{Im}(\Delta)$.

Si $P \neq 0$, posons $d = \deg(P) + 1 \geq 1$. Alors $\deg(P) = d - 1$ donc $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

D'après la question **Q4.**, $\mathbb{K}_{d-1}[X] = \text{Im}(\Delta_d)$ donc $P \in \text{Im}(\Delta_d) \subset \text{Im}(\Delta)$.

Ainsi $\mathbb{K}[X] \subset \text{Im}(\Delta)$. L'inclusion réciproque est immédiate, donc $\boxed{\text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]}.$

Finalement $\boxed{\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]}.$

- ★ On identifie dans la suite un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et sa fonction polynomiale associée $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto P(x) \end{cases}.$

Soit $h \in \mathbb{K}[X]$ une fonction polynomiale.

- **Existence de solutions polynomiales.**

D'après le début de la question **Q5.**, $h \in \mathbb{K}[X] = \text{Im}(\Delta)$ donc $\exists f \in \mathbb{K}[X]$, tel que $\Delta(f) = h$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = h(x).$$

f est solution de (E_h) donc l'équation (E_h) admet au moins une solution polynomiale.

- **Non unicité d'une solution polynomiale.**

Soit $g \in \mathbb{K}[X]$ une fonction polynomiale. Par linéarité de Δ :

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_h) &\Leftrightarrow \Delta(g) = h = \Delta(f_p) \\ &\Leftrightarrow \Delta(g - f_p) = 0 \\ &\Leftrightarrow (g - f_p) \in \text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X] \\ &\Leftrightarrow g \in f + \mathbb{K}_0[X]. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } h \text{ est une fonction polynomiale, alors il existe au moins une solution polynomiale } f \in \mathbb{K}[X] \text{ à l'équation } (E_h).}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions polynomiales de l'équation } (E_h) \text{ est } f + \mathbb{K}_0[X]}.$

- Remarque : une solution (E_h) n'est pas nécessairement polynomiale. Par exemple, si $h = 0$, on cherche $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) = 0. \quad (E_0)$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est égal à l'ensemble des fonctions 1-périodiques de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

Or il existe des fonctions 1-périodiques et non polynomiales.

Q6. On suppose dans cette question que $h : x \mapsto x$ est polynomiale.

D'après la question **Q5.**, (E_h) admet une infinité de solutions polynomiales.

- Cherchons une solution polynomiale f dans $\mathbb{K}_2[X]$. On écrit $f(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On a

$$\begin{cases} \Delta(1) &= 0. \\ \Delta(X) &= (X+1) - X = 1. \\ \Delta(X^2) &= (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1. \end{cases}$$

Donc

$$\Delta(aX^2 + bX + c) = a\Delta(X^2) + b\Delta(X) + c\Delta(1) = a(2X + 1) + b = 2aX + (a + b).$$

D'où

$$\Delta(f) = h \Leftrightarrow \Delta(aX^2 + bX + c) = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2a &= 1. \\ a + b &= 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2}. \\ b &= -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc $\boxed{f(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \text{ est une solution de } (E_h) \text{ dans } \mathbb{K}[X], \text{ pour } h : x \mapsto x.}$

- D'après la question **Q5.** :

$$\text{L'ensemble des solutions polynomiales de l'équation } (E_h) \text{ est } f + \mathbb{K}_0[X] = \left\{ \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c, \quad c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Q7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

- Montrons que X^{d+1} est un polynôme annulateur de Δ_d .
Méthode 1. Montrons par récurrence sur $k \geq 0$ que pour tout polynôme P non nul de degré k , $\Delta^{k+1}(P) = 0$.
Initialisation. Pour $k = 0$, si $\deg(P) = 0$, alors $\Delta(P) = 0$.
Hérédité. Supposons le résultat vrai au rang k et montrons-le au rang $k+1$.
 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $k+1 \geq 1$. D'après la question **Q2.**, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 = k$.
 Par hypothèse de récurrence, $\Delta^{k+2}(P) = \Delta^{k+1}(\Delta(P)) = 0$, ce qui termine la récurrence.

Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$. Si $P = 0$, alors $\Delta(P) = 0$ donc $\Delta^{d+1}(P) = 0$.

Si $P \neq 0$, soit $k = \deg(P) \leq d$. D'après ce qui précède, $\Delta^{d+1}(P) = \Delta^{d-k}(\Delta^{k+1}(P)) = 0$.

On a $\forall P \in \mathbb{K}_d[X]$, $\Delta^{d+1}(P) = 0$ donc X^{d+1} est un polynôme annulateur de Δ_d .

C'est même le polynôme minimal de Δ_d car

$$\deg((\Delta_d)^d(X^d)) = d - d = 0 \neq -\infty \text{ donc } (\Delta_d)^d(X^d) \neq 0.$$

Le polynôme minimal divise X^{d+1} mais n'est pas égal à X^d donc vaut $\pi_{\Delta_d}(X) = X^{d+1}$.

Méthode 2. On calcule le polynôme caractéristique de Δ_d .

Soit $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^d)$ la base canonique de $\mathbb{K}_d[X]$. Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{cases} \Delta(1) &= 1 - 1 = 0. \\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(X^j) &= (X+1)^j - X^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i. \end{cases}$$

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta_d)$ est une matrice triangulaire supérieure stricte :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & \binom{d}{0} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & \binom{d}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \binom{d}{d-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \left(\binom{j-1}{i-1} \delta_{i < j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket^2}.$$

En particulier, son polynôme caractéristique vaut $\chi_{\Delta_d}(X) = X^{d+1}$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_{\Delta_d}(X) = X^{d+1}$ annule Δ_d , ce qu'on voulait montrer.

- On vient de montrer que X^{d+1} est un polynôme annulateur de Δ_d donc $(\Delta_d)^{d+1} = 0$.

Donc Δ_d est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{K}_d[X]$.

Cet endomorphisme n'est pas nul car $X \in \mathbb{K}_d[X]$ (puisque $d \geq 1$) et $\Delta_d(X) = 1 \neq 0$.

Supposons par l'absurde Δ_d diagonalisable. Puisque Δ_d est nilpotent, on a $\text{Sp}(\Delta_d) = \{0\}$. Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}_d[X]$ dans laquelle la matrice de Δ_d est diagonale avec des 0 sur la diagonale, i.e. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta_d) = 0$ donc $\Delta_d = 0$, ce qui est absurde. Donc Δ_d n'est pas diagonalisable.

L'endomorphisme Δ_d n'est pas diagonalisable car c'est un endomorphisme nilpotent non nul de $\mathbb{K}_d[X]$.

II Fonctions entières

Q8. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. f et g sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$.

Notons $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les coefficients et $R_1 = +\infty$ le rayon de convergence du développement en série entière de f .

Notons $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les coefficients et $R_2 = +\infty$ le rayon de convergence du développement en série entière de g .

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

• **Combinaison linéaire de deux fonctions développables en série entière sur $\mathbb{C}$.**

D'après le cours, la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ est de rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2) = +\infty$, donc $R = +\infty$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_1, R_2) = +\infty$, c'est-à-dire pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) + \mu \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \lambda f(z) + \mu g(z) = (\lambda f + \mu g)(z).$$

Ainsi $\lambda f + \mu g$ est développable en série entière, avec des coefficients $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de rayon de convergence infini, d'où $(\lambda f + \mu g) \in \mathcal{E}$.

• **Produit de deux fonctions développables en série entière sur $\mathbb{C}$.**

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

D'après le cours, la série entière $\sum c_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2) = +\infty$, donc $R = +\infty$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_1, R_2) = +\infty$, c'est-à-dire pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = f(z)g(z) = (fg)(z).$$

Ainsi fg est développable en série entière, avec des coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et de rayon de convergence infini, d'où $fg \in \mathcal{E}$.

Si on a $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, alors $(\lambda f + \mu g) \in \mathcal{E}$ et $fg \in \mathcal{E}$.

Q9. • Soit $p \in \mathbb{Z}$. On calcule :

$$\text{Si } p = 0 : \quad \int_0^1 (\omega(t))^0 dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

$$\text{Si } p \neq 0 : \quad \int_0^1 (\omega(t))^p dt = \int_0^1 (e^{2i\pi t})^p dt = \int_0^1 e^{2i\pi p t} dt = \left[\frac{e^{2i\pi p t}}{2i\pi p} \right]_0^1 = \frac{e^{2i\pi p} - 1}{2i\pi p} = 0.$$

$$\text{Donc } \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^1 (\omega(t))^p dt = \delta_{p,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0. \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

• Soit $f \in \mathcal{E}$ dont on note $\sum a_n z^n$ le développement en série entière. On fixe $k \in \mathbb{Z}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f(\omega(t)) \omega(t)^{-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega(t)^n \right) \omega(t)^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega(t)^{n-k}.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f_n^{(k)}(t) = a_n \omega(t)^{n-k}$.

• $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \omega(t)^{n-k} = e^{2i\pi(n-k)t}$ est continue sur $[0, 1]$ par composition de fonctions continues.

Donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n^{(k)}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

•

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |f_n^{(k)}(t)| = |a_n \omega(t)^{n-k}| = |a_n|.$$

Donc $f_n^{(k)}$ est bornée sur $[0, 1]$ et sa norme infinie vaut : $\|f_n^{(k)}\|_{\infty, [0, 1]} = |a_n|$.

Or la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence infini, donc elle converge absolument en 1, donc la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n^{(k)}\|_{\infty, [0, 1]} = \sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)} = \sum_{n \geq 0} a_n \omega(t)^{n-k}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.

• Par le théorème d'interversion série-intégrale :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^1 f(\omega(t)) \omega(t)^{-k} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega(t)^{n-k} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n^{(k)}(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \omega(t)^{n-k} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta_{n-k, 0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta_{n, k}. \end{aligned}$$

Si $k < 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, k < 0 \leq n$ donc $\delta_{n, k} = 0$. Alors l'intégrale est nulle.

Si $k \geq 0$, alors tous les termes sont nuls sauf le terme $n = k$. Donc l'intégrale vaut a_k .

$$\text{D'où : } \forall f \in \mathcal{E}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^1 f(\omega(t)) \omega(t)^{-k} dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N}. \\ 0 & \text{si } k \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Q10. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On considère la fonction :

$$\left| \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} = \frac{e^{2i\pi(p+1)t}}{e^{\omega(t)} - 1}. \end{array} \right.$$

L'application $\omega : t \mapsto e^{2i\pi t}$ est continue sur $[0, 1]$ par composition de fonctions continues.

L'application $t \mapsto e^{2i\pi(p+1)t}$ est continue sur $[0, 1]$ par composition de fonctions continues.

L'application $t \mapsto e^{\omega(t)} - 1$ est continue sur $[0, 1]$ par composition et somme de fonctions continues.

$\forall t \in [0, 1], \quad |\omega(t)| = |e^{i2\pi t}| = 1$ donc $\omega(t) \neq 0$ donc $e^{\omega(t)} \neq 1$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

Donc $t \mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur $[0, 1]$ comme fraction de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

Enfin, $t \mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ donc son intégrale est bien définie.

Donc $\forall p \in \mathbb{Z}$, l'intégrale $I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt$ est bien définie.

Q11. On utilise le développement en série entière de $\exp$ sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (donc également pour tout $z \in \mathbb{U}$), on a les équivalences

$$e^z - 1 = z(1 + z\beta(z)) \Leftrightarrow z^2\beta(z) = e^z - 1 - z = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \Leftrightarrow \beta(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}.$$

On pose donc $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \beta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{(n+2)!} \neq 0$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{1}{n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par règle de D'Alembert pour les séries entières, cette série entière est de rayon de convergence infini, donc $\beta \in \mathcal{E}$. De plus, $\forall z \in \mathbb{U}, |z| = 1$ donc par inégalité triangulaire :

$$\forall z \in \mathbb{U}, |\beta(z)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{(n+2)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = -2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 2.$$

On pose $C = e - 2 \in]0, 1[$. Alors $\forall z \in \mathbb{U}, |\beta(z)| \leq C$.

Finalement, il existe une fonction $\beta \in \mathcal{E}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C}, \beta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$ et une constante $C = e - 2 \in]0, 1[$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{U}, e^z - 1 = z(1 + z\beta(z)) \quad \text{et} \quad |\beta(z)| \leq C.$$

Q12. Soit $z \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Puisque $z \in \mathbb{U}$, on a $|z| = 1$ et $|\beta(z)| \leq C < 1$ d'après la question **Q11.**.

Donc $|-z\beta(z)| < 1$ et la série $\sum_{j \geq 0} (-z\beta(z))^j$ géométrique de raison $-z\beta(z)$ converge absolument. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{z^p}{e^z - 1} &= z^p \frac{1}{z(1 + z\beta(z))} = z^{p-1} \frac{1}{1 + z\beta(z)} = z^{p-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-z\beta(z))^j \\ &= z^{p-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j z^j (\beta(z))^j = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j z^{j+p-1} (\beta(z))^j. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \frac{z^p}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j z^{j+p-1} \beta(z)^j.$$

Q13. • Pour $t \in [0, 1]$, $\omega(t) = e^{2i\pi t} \in \mathbb{U}$. D'après la question **Q12.** appliquée en $z = \omega(t) \in \mathbb{U}$ et en $p + 1$:

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \omega(t)^{j+p} \beta^j(\omega(t)).$$

On pose :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad g_j^{(p)}(t) = (-1)^j \omega(t)^{j+p} \beta^j(\omega(t)).$$

- ★ La fonction $\omega : t \mapsto e^{2i\pi t}$ est continue sur $[0, 1]$, par composition de fonctions continues.
- ★ Par produit de fonctions continues, la fonction $t \mapsto \omega(t)^{j+p}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.
- ★ β est la somme d'une série entière avec $R = +\infty$, donc β est continue sur $\mathbb{C}$ (car la série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé de rayon $r > 0$ quelconque).
- ★ Par produit de fonctions continues, β^j est continue sur $\mathbb{C}$.
- ★ Par composition de fonctions continues, $t \mapsto \beta^j(\omega(t))$ est continue sur $[0, 1]$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}$, la fonction $g_j^{(p)}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

- D'après la question **Q11.**, puisque $\omega(t) \in \mathbb{U}$, on a $|\omega(t)| = 1$ et $|\beta(\omega(t))| \leq C$. On obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| g_j^{(p)}(t) \right| = \left| (-1)^j \omega(t)^{j+p} \beta^j(\omega(t)) \right| = |\beta^j(\omega(t))| \leq C^j.$$

Donc $g_j^{(p)}$ est bornée sur $[0, 1]$ et sa norme infinie est majorée par : $\|g_j^{(p)}\|_{\infty, [0, 1]} \leq C^j$.

D'après la question **Q11.**, $C \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum C^j$ de raison C avec $|C| < 1$ converge.

Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{j \geq 0} \|g_j^{(p)}\|_{\infty, [0, 1]}$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{j \geq 0} g_j^{(p)} = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \omega(t)^{j+p} \beta^j(\omega(t))$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.

- Par le théorème d'interversion série-intégrale :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt &= \int_0^1 \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \omega(t)^{j+p} \beta^j(\omega(t)) dt = \int_0^1 \sum_{j=0}^{+\infty} g_j^{(p)}(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \int_0^1 g_j^{(p)}(t) dt = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \int_0^1 \beta^j(\omega(t)) \omega(t)^{j+p} dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_p = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \int_0^1 \beta^j(\omega(t)) \omega(t)^{j+p} dt.$$

- D'après la question **Q8.**, $\mathcal{E}$ est stable par le produit : $\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2, fg \in E$.

Par une récurrence immédiate sur $j \in \mathbb{N}^*$, puisque $\beta \in \mathcal{E}$, on a $\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \beta^j \in \mathcal{E}}$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Notons $\left(a_k^{(j)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ les coefficients du développement en série entière de $\beta^j \in \mathcal{E}$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \beta^j(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(j)} z^k.$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on a $j + p \geq 1$ donc $-(j + p) \leq -1$ donc $-(j + p) \notin \mathbb{N}$. D'après la question **Q9.** :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \beta^j(\omega(t)) \omega(t)^{j+p} dt = 0.$$

- Dans la somme permettant de calculer I_p , il ne reste que le terme $j = 0$:

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt \underset{(\text{terme } j=0)}{=} \int_0^1 \omega(t)^p dt \underset{\mathbf{Q9.}}{=} \delta_{p,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0. \\ 0 & \text{si } p \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

III Polynômes de Bernoulli

Q14. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

- On développe $\exp$ en série entière :

$$\frac{B_n(z)}{n!} = \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{(e^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \omega(t)^k}{k!} \right) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \omega(t)^{k-n+1}}{k! e^{\omega(t)} - 1} dt.$$

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \boxed{h_k(t) = \frac{z^k \omega(t)^{k-n+1}}{k! e^{\omega(t)} - 1}}.$$

- On a montré dans la question **Q10.** que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la fonction $t \mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur $[0, 1]$.
Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } h_k \text{ est continue sur } [0, 1].}$
- D'après la question **Q11.** :

$$\forall \zeta \in \mathbb{U}, \quad \frac{\zeta^{k-n+1}}{e^\zeta - 1} = \frac{\zeta^{k-n+1}}{\zeta(1 + \zeta\beta(\zeta))} = \frac{\zeta^{k-n}}{1 + \zeta\beta(\zeta)}.$$

On applique, pour $t \in [0, 1]$, en $\zeta = \omega(t) \in \mathbb{U}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad h_k(t) = \frac{z^k \omega(t)^{k-n+1}}{k! e^{\omega(t)} - 1} = \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n}}{1 + \omega(t)\beta(\omega(t))}.$$

D'après la question **Q11.**, pour $t \in [0, 1]$, puisque $\omega(t) \in \mathbb{U}$, on a $|\beta(\omega(t))| \leq C$ avec $C \in]0, 1[$.
Par inégalité triangulaire de gauche :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |1 + \omega(t)\beta(\omega(t))| \geq |1| - |\omega(t)\beta(\omega(t))| = 1 - |\beta(\omega(t))| \geq 1 - C.$$

On passe au module :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |h_k(t)| = \frac{|z|^k}{k!} \frac{1}{|1 + \omega(t)\beta(\omega(t))|} \leq \frac{1}{1 - C} \frac{|z|^k}{k!}.$$

Donc h_k est bornée sur $[0, 1]$ et sa norme infinie est majorée par : $\|h_k\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{1 - C} \frac{|z|^k}{k!}$.

La série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{|z|^k}{k!}$ converge absolument.

Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 0} \|h_k\|_{\infty, [0, 1]}$ converge.

Donc la série de fonctions $\boxed{\sum_{k \geq 0} h_k = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k \omega(t)^{k-n+1}}{k! e^{\omega(t)} - 1} \text{ converge normalement donc uniformément sur } [0, 1].}$

- Par le théorème d'interversion série-intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{B_n(z)}{n!} &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \omega(t)^{k-n+1}}{k! e^{\omega(t)} - 1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 h_k(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{z^k \omega(t)^{k-n+1}}{k! e^{\omega(t)} - 1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} I_{k-n}. \end{aligned}$$

En effet, si $k \geq n + 1$, alors $k - n \in \mathbb{N}^*$ donc $I_{k-n} = 0$ d'après la question **Q13.**

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad B_n(z) = n! \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} I_{k-n}.$$

D'après la question **Q13.**, on a $I_0 = 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} I_{k-n} X^k.$$

Donc B_n est un polynôme unitaire de degré n .

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **Q14.** :

$$B_n(X) = n! \sum_{k=0}^n \frac{I_{k-n}}{k!} X^k.$$

Dérivons le polynôme B_n . On utilise un changement d'indice :

$$\begin{aligned} B'_n(X) &= n! \sum_{k=1}^n \frac{I_{k-n}}{k!} k X^{k-1} &= n! \sum_{k=1}^n \frac{I_{k-n}}{(k-1)!} X^{k-1} &= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1-n}}{k!} X^k \\ &= n \times (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k-(n-1)}}{k!} X^k &= n B_{n-1}(X). \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B'_n = n B_{n-1}$.

Q16. La fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. Montrons que la fonction $F_z : t \mapsto e^{zt}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$:

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad F_z(t) = e^{zt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(zt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) t^n \text{ en posant } \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n(z) = \frac{z^n}{n!}.$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, F_z : (t \mapsto e^{zt}) \in \mathcal{E}$ et les coefficients de son développement en série entière valent $A_n(z) = \frac{z^n}{n!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Par linéarité de l'intégrale, et d'après la question **Q9.** :

$$\begin{aligned} B_n(z+1) - B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1) \omega(t)^{n-1}} dt - n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1) \omega(t)^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 \frac{(e^{\omega(t)} - 1) e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1) \omega(t)^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 e^{z\omega(t)} \omega(t)^{-(n-1)} dt \\ &= n! \int_0^1 F_z(\omega(t)) \omega(t)^{-(n-1)} dt \\ &\stackrel{\text{Q9.}}{=} n! A_{n-1}(z) = n! \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = n z^{n-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1}.$$

Q17. Soit h une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$, de degré d et de coefficients $(c_n)_{0 \leq n \leq d} \in \mathbb{C}^{d+1} : \forall z \in \mathbb{C}, \quad h(z) = \sum_{n=0}^d c_n z^n$.

Posons

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{d+1} \frac{c_{n-1}}{n} B_n(z).$$

B_n est un polynôme donc f est une fonction polynomiale.

D'après la question **Q16.** :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z+1) - f(z) &= \sum_{n=1}^{d+1} \frac{c_{n-1}}{n} B_n(z+1) - \sum_{n=1}^{d+1} \frac{c_{n-1}}{n} B_n(z) = \sum_{n=1}^{d+1} \frac{c_{n-1}}{n} (B_n(z+1) - B_n(z)) \\ &\stackrel{\text{Q16.}}{=} \sum_{n=1}^{d+1} \frac{c_{n-1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{d+1} c_{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^d c_n z^n = h(z). \end{aligned}$$

Donc f vérifie l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$.

Si $h : z \mapsto \sum_{n=0}^d c_n z^n$ est polynomiale, alors $f : z \mapsto \sum_{n=1}^{d+1} \frac{c_{n-1}}{n} B_n(z)$ est une fonction polynomiale vérifiant (E_h) sur $\mathbb{C}$.

Q18. • D'après la question **Q14.**, pour $n = 0$, on obtient $B_0(X) = 1$.

• D'après la question **Q15.**, on a $B'_n = nB_{n-1}$.

• D'après la question **Q16.** évaluée en $z = 0 : \forall n \geq 2, B_n(1) - B_n(0) = n0^{n-1} = 0$ donc $\forall n \geq 2, B_n(1) = B_n(0)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 B_n(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{n+1} B'_{n+1}(t) dt = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(t)]_0^1 = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)) = 0.$$

Donc la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les trois conditions demandées.

• Réciproquement, soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} P_0 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P'_n = nP_{n-1}. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 P_n(t) dt = 0. \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = B_n$.

Initialisation : cas $n = 0$. On a $P_0 = 1 = B_0$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons-le au rang n .

Par hypothèse de récurrence, $P_{n-1} = B_{n-1}$. Il vient

$$P'_n(X) = nP_{n-1}(X) = nB_{n-1}(X) = B'_n(X).$$

Donc $\exists K \in \mathbb{K}, P_n(X) - B_n(X) = K$. Or

$$K = \int_0^1 K dt = \int_0^1 (P_n - B_n)(t) dt = \int_0^1 P_n(t) dt - \int_0^1 B_n(t) dt = 0.$$

Donc $K = 0$ et $P_n = B_n$, ce qui achève la récurrence.

Ainsi $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} B_0 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B'_n = nB_{n-1}. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 B_n(t) dt = 0. \end{cases}$$

Q19. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

• Puisque $B_0(X) = 1$, on a $H_0(X) = B_0(1-X) = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $H'_n(X) = (-1)^n (-1) B'_n(1-X) = (-1)^{n+1} B'_{n-1}(1-X) = nH_{n-1}(X)$.

• On effectue le changement de variables $u = 1-t$, $du = -dt$:

$$\int_0^1 H_n(t) dt = \int_0^1 (-1)^n B_n(1-t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u) du = 0.$$

Donc la suite de polynômes $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie :

$$\begin{cases} H_0 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & H'_n = nH_{n-1}. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \int_0^1 H_n(t) dt = 0. \end{cases}$$

D'après la question **Q18.**, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant ces conditions, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, H_n = B_n}$.

Q20. • La fonction $(x, t) \mapsto e^{tx}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, car ses dérivées partielles de tout ordre existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell} e^{tx} = x^k t^\ell e^{tx}.$$

• La fonction $\left(z \mapsto \frac{1}{\psi(z)}\right) \in \mathcal{E}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, car

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{1}{\psi(z)} = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ où } a_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Cette égalité est encore valable pour $z = 0$.

Montrons que ψ est développable en série entière sur un voisinage de 0.

On suppose qu'il existe une série entière $\sum b_n z^n$ de rayon $R > 0$ telle que

$$\forall z \in D(0, R), \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = 1 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 z^n.$$

Si une telle série entière existe, alors par théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières, le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égal à la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $c_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, c_n = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a_0 b_0. \\ \forall n \geq 1, \quad 0 = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}. \end{cases}$$

On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence en posant

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_0} = 1. \\ \forall n \geq 1, \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{1}{(n+1-k)!}. \end{cases}$$

Montrons par récurrence forte sur $n \geq 0$ que $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq 1$.

Initialisation : cas $n = 0$. On a : $|b_0| = 1 \leq 1$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai **jusqu'au rang** $n - 1$ et montrons-le au rang n .

$$|b_n| = \left| -\sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{1}{(n+1-k)!} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1-k)!} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 2 < 1,$$

ce qui termine la récurrence. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq 1$.

La suite $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc $R \geq 1$ et $R > 0$. Alors

$$\forall z \in D(0, R), \quad 1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \frac{1}{\psi(z)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) \quad \text{donc} \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Donc ψ est développable en série entière sur $D(0, R)$. Alors ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, donc sur $] -1, 1[$.

De plus $\psi : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement, ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- u est le produit de deux fonctions $(x, t) \mapsto e^{tx}$ et $(x, t) \mapsto \psi(x)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Donc $\boxed{u \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

Q21. • On a $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, t) = \psi(x)e^{tx}$. D'où

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = x\psi(x)e^{tx} = xu(x, t).} \quad (*)$$

- Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) = x \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + n \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x, t).$$

Initialisation : cas $n = 1$. On dérive par rapport à x l'égalité $(*)$ et on utilise le lemme de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \underset{\text{lemme de Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(xu)(x, t) = x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + u(x, t),$$

ce qui est le résultat annoncé au rang $n = 1$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai au rang n et montrons-le au rang $n + 1$. Par hypothèse de récurrence,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) = x \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + n \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x, t).$$

On dérive par rapport à x et on utilise le lemme de Schwarz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x, t) &\underset{\text{lemme de Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + n \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right)(x, t) \\ &= x \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x, t) + \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + n \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) \\ &= x \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x, t) + (n+1) \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t), \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) = x \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + n \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x, t).}$$

Q22. On note $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad A_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, t)$.

- Pour $n = 0$: $\forall t \in \mathbb{R}, A_0(t) = u(0, t) = \psi(0)e^0 = 1$. Donc $\boxed{A_0 = 1.}$
- D'après la question **Q21.**, en évaluant l'égalité en $x = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad A'_n(t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, t) = n \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(0, t) = n A_{n-1}(t).$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A'_n = n A_{n-1}.}$

- Montrons enfin que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 A_n(t) dt = 0$.

★ **Méthode 1.**

$$\begin{cases} \text{Pour } x = 0 : \int_0^1 u(0, t) dt = \int_0^1 1 dt = 1. \\ \text{Pour } x \neq 0 : \int_0^1 u(x, t) dt = \int_0^1 \psi(x)e^{tx} dt = \psi(x) \left[\frac{e^{tx}}{x} \right]_0^1 = \psi(x) \frac{e^x - 1}{x} = 1. \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 u(x, t) dt = 1$. Par dérivation par rapport à x , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 u(x, t) dt = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **Q20.**, u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto u(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

Hypothèse de domination sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La fonction $(x, t) \mapsto \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur le compact $[a, b] \times [0, 1]$, donc bornée et atteint ses bornes. Donc il existe une constante $C_k > 0$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C_k.$$

Or $t \mapsto C_k$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Par le théorème de dérivation n fois des intégrales à paramètre, $x \mapsto \int_0^1 u(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 A_n(t) dt = \int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) dt = \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 u(x, t) dt = 0.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 A_n(t) dt = 0$.

Par l'unicité démontrée à la question **Q18.**, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = B_n$.

★ **Méthode 2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(x, t) = \psi(x)e^{tx}.$$

Par la formule de Leibniz à l'ordre n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^{(k)}(x) \frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}(e^{tx}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^{(k)}(x) t^{n-k} e^{tx}.$$

Pour $x = 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^{(k)}(0) t^{n-k}.$$

$$\begin{cases} \text{Pour } t = 0 : & A_n(0) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, 0) = \psi^{(n)}(0). \\ \text{Pour } t = 1 : & A_n(1) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, 1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^{(k)}(0). \end{cases}$$

En reprenant les notations de la question **Q20.**, où les suites (a_n) et (b_n) sont de produit de Cauchy $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad A_n(1) - A_n(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(0) = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \frac{1}{((n-1)-k+1)!} = n! \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{(n-1)-k} = c_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, on a $n+1 \geq 2$ donc $A_{n+1}(1) = A_{n+1}(0)$. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 A_n(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{n+1} A'_{n+1}(t) dt = \frac{1}{n+1} [A_{n+1}(t)]_0^1 = \frac{1}{n+1} (A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0)) = 0.$$

IV Solution entière de l'équation (E_h)

Q23. On suppose par l'absurde que la propriété $\mathcal{P}$ suivante est fausse :

$$\mathcal{P} : \quad \exists c > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^z - 1| \geq c \right).$$

Alors la négation de $\mathcal{P}$ (notée $\neg\mathcal{P}$) est vraie :

$$\neg\mathcal{P} : \quad \forall c > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists z \in \mathbb{C}, \quad |z| = (2n+1)\pi \quad \text{et} \quad |e^z - 1| < c.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on applique $\neg\mathcal{P}$ avec le réel $c = \frac{1}{p+1} > 0$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists n_p \in \mathbb{N}, \quad \exists z_p \in \mathbb{C}, \quad |z_p| = (2n_p+1)\pi \quad \text{et} \quad |e^{z_p} - 1| < \frac{1}{p+1}.$$

En particulier, $|e^{z_p} - 1| < \frac{1}{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, donc $e^{z_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$.

On a montré que si $\mathcal{P}$ est fausse, il existe deux suites $(n_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(z_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\boxed{e^{z_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad |z_p| = (2n_p+1)\pi.}$$

Q24. On écrit $\forall p \in \mathbb{N}, \quad z_p = a_p + ib_p$ avec $a_p \in \mathbb{R}$ et $b_p \in \mathbb{R}$.

Calculons le module de e^{z_p} :

$$|e^{z_p}| = |e^{a_p + ib_p}| = e^{a_p}.$$

Or $e^{z_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ donc par continuité du module dans $\mathbb{C}$, $e^{a_p} = |e^{z_p}| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$.

Par continuité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$: $a_p = \ln(e^{a_p}) \rightarrow \ln(1) = 0$. D'où $\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} a_p = 0.}$

De plus, $|z_p|^2 = |a_p|^2 + |b_p|^2$, donc

$$|z_p|^2 - |b_p|^2 = (|z_p| - |b_p|)(|z_p| + |b_p|) = |a_p|^2.$$

Il vient, en utilisant $|z_p| + |b_p| \geq |z_p|$ et $a_p \rightarrow 0$:

$$|z_p| - |b_p| = \frac{|a_p|^2}{|z_p| + |b_p|} \leq \frac{|a_p|^2}{|z_p|} = \frac{|a_p|^2}{(2n_p+1)\pi} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} (|z_p| - |b_p|) = 0.}$

Q25. On note $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_p = \begin{cases} +1 & \text{si } b_p \geq 0. \\ -1 & \text{si } b_p < 0. \end{cases}$ On remarque que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_p b_p = |b_p|.$$

D'après la question **Q24.**, quand $p \rightarrow +\infty$, on a $a_p \rightarrow 0$ et $|z_p| - |b_p| \rightarrow 0$. Par continuité de l'exponentielle :

$$\exp(z_p - i\varepsilon_p |z_p|) = \exp(a_p + ib_p - i\varepsilon_p |z_p|) = \exp(a_p) \exp(-i\varepsilon_p (|z_p| - \varepsilon_p b_p)) = \underbrace{\exp(a_p)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\exp(-i\varepsilon_p (|z_p| - |b_p|))}_{\rightarrow 1}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} \exp(z_p - i\varepsilon_p |z_p|) = 1.}$$

D'autre part, puisque $|z_p| = (2n_p+1)\pi$ et $\varepsilon_p = \pm 1$:

$$\exp(z_p - i\varepsilon_p |z_p|) = \exp(z_p) \underbrace{\exp(-i\varepsilon_p (2n_p+1)\pi)}_{=-1} = -\exp(z_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} -1.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} \exp(z_p - i\varepsilon_p |z_p|) = -1.}$$

On obtient $1 = -1$, ce qui est absurde.

On a démontré par l'absurde que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

Q26. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

- On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \gamma_n(t) = (2n+1)\pi \times \omega(t) \quad \text{donc} \quad |\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi.$$

- On développe exp en série entière :

$$\frac{Q_n(z)}{n!} = \int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n(t)^{n-1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n(t)^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \gamma_n(t)^k}{k!} \right) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} dt.$$

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad H_k(t) = \frac{z^k}{k!} \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1}.$$

- L'application $\gamma_n : t \mapsto (2n+1)\pi e^{2i\pi t}$ est continue sur $[0, 1]$ par composition de fonctions continues.
L'application $t \mapsto \gamma_n(t)^{k-n+1} = ((2n+1)\pi)^{k-n+1} e^{2i\pi(k-n+1)t}$ est continue sur $[0, 1]$ par composition de fonctions continues.
L'application $t \mapsto e^{\gamma_n(t)} - 1$ est continue sur $[0, 1]$ par composition et somme de fonctions continues.
De plus, $\forall t \in [0, 1], \quad |\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi \neq 0$ donc $\gamma_n(t) \neq 0$ donc $e^{\gamma_n(t)} \neq 1$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Donc $t \mapsto \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1}$ est continue sur $[0, 1]$ comme fraction de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

Alors $t \mapsto \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, et en particulier son intégrale sur $[0, 1]$ est bien définie.

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } H_k \text{ est continue sur } [0, 1].}$

- D'après la question **Q25.**, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie donc

$$\exists c > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^z - 1| \geq c \right).$$

Or $\forall t \in [0, 1], \quad |\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |e^{\gamma_n(t)} - 1| \geq c \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{|e^{\gamma_n(t)} - 1|} \leq \frac{1}{c}}.$$

On passe au module dans l'expression de H_k :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |H_k(t)| = \frac{|z|^k}{k!} \frac{|\gamma_n(t)|^{k-n+1}}{|e^{\gamma_n(t)} - 1|} \leq \frac{1}{c} \frac{|z|^k}{k!} \left((2n+1)\pi \right)^{k-n+1} = \frac{\left((2n+1)\pi \right)^{-n+1}}{c} \frac{\left(|z|(2n+1)\pi \right)^k}{k!}.$$

Posons $C_0 = \frac{\left((2n+1)\pi \right)^{-n+1}}{c} > 0$ qui est une constante car n est fixé.

Alors H_k est bornée sur $[0, 1]$ et sa norme infinie est majorée par : $\|H_k\|_{\infty, [0, 1]} \leq C_0 \frac{\left(|z|(2n+1)\pi \right)^k}{k!}$.

La série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{\left(|z|(2n+1)\pi \right)^k}{k!}$ converge absolument.

Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 0} \|H_k\|_{\infty, [0, 1]}$ converge.

Donc la série de fonctions $\boxed{\sum_{k \geq 0} H_k = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1}}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.

- Par le théorème d'interversion série-intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{n!} &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 H_k(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{z^k}{k!} \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} dt. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} dt \right) z^k.$$

Donc Q_n est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n \in \mathcal{E}.}$

Les coefficients du développement en série entière de Q_n valent $\boxed{\left(\frac{n!}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} dt \right)_{k \in \mathbb{N}}}$.

Q27. On a montré dans la question **Q16.** que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $F_z : (t \mapsto e^{zt}) \in \mathcal{E}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad F_z(t) = e^{zt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(zt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) t^n \text{ en posant } \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n(z) = \frac{z^n}{n!}.$$

On utilise la question **Q9.** :

$$\begin{aligned} Q_n(z+1) - Q_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1) \gamma_n(t)^{n-1}} dt - n! \int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1) \gamma_n(t)^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 \frac{(e^{\gamma_n(t)} - 1) e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1) \gamma_n(t)^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 e^{z\gamma_n(t)} \gamma_n(t)^{-(n-1)} dt \\ &= n! \left((2n+1)\pi \right)^{-(n-1)} \int_0^1 F_{z(2n+1)\pi}(\omega(t)) \omega(t)^{-(n-1)} dt \\ &\stackrel{\text{Q9.}}{=} n! \left((2n+1)\pi \right)^{-(n-1)} A_{n-1}(z(2n+1)\pi) \\ &= n! \left((2n+1)\pi \right)^{-(n-1)} \frac{(z(2n+1)\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= nz^{n-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z+1) - Q_n(z) = nz^{n-1}.}$$

Q28. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n(t)^{n-1}} dt.$$

- D'après la question **Q25.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| \frac{1}{e^{\gamma_n(t)} - 1} \right| \leq \frac{1}{c}.$$

- On a $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z_0) \leq |\operatorname{Re}(z_0)| \leq |z_0|$ donc par croissance de l'exponentielle :

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \quad |\exp(z_0)| = \exp(\operatorname{Re}(z_0)) \leq \exp(|z_0|).$$

D'où $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1] :$

$$\left| e^{z\gamma_n(t)} \right| = \left| \exp\left((2n+1)\pi z \omega(t)\right) \right| \leq \exp\left(|(2n+1)\pi z \omega(t)|\right) = \exp\left((2n+1)\pi |z|\right) \leq \exp\left(4\pi n |z|\right).$$

On pose $b = 4\pi$. Alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| e^{z\gamma_n(t)} \right| \leq \exp(bn|z|).$$

- On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |\gamma_n(t)^{n-1}| = \left| (2n+1)\pi \omega(t) \right|^{n-1} = ((2n+1)\pi)^{n-1}.$$

- D'où $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1] :$

$$n! \left| \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n(t)^{n-1}} \right| \leq e^{bn|z|} \frac{1}{c} \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}.$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}} > 0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{(n+1)!}{((2n+3)\pi)^n} \frac{((2n+1)\pi)^{n-1}}{n!} = \frac{(n+1)}{\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n \\ &= \frac{(n+1)}{\pi(2n+1)} \left(1 - \frac{2}{2n+3} \right)^n = \frac{(n+1)}{\pi(2n+1)} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \exp\left(-\frac{2n}{2n+3} + o(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi e} < 1. \end{aligned}$$

D'après la règle de D'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0. Toute suite convergente est bornée, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

Donc il existe une constante $a > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{c} u_n \leq a$.

- Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| n! \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n(t)^{n-1}} \right| \leq a e^{bn|z|}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, par inégalité triangulaire dans l'intégrale :

$$\boxed{\exists a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{telles que} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |Q_n(z)| \leq a e^{bn|z|}.$$

Q29. Soit $h \in \mathcal{E}$. h est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Notons

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

- (1) Soit $r > 0$. Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z)$ converge normalement sur $D'(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

D'après la question **Q28.**, et avec la majoration $|z| \leq r$:

$$\forall z \in D'(0, r), \quad \left| \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z) \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{n} a e^{bn|z|} \leq \frac{|a_{n-1}|}{n} a e^{nbr} = a \frac{|a_{n-1}|}{n} (e^{br})^n.$$

Donc la fonction $z \mapsto \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z)$ est bornée sur $D'(0, r)$ et

$$\left\| z \mapsto \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z) \right\|_{\infty, D'(0, r)} \leq a \frac{|a_{n-1}|}{n} (e^{br})^n.$$

Puisque $h \in \mathcal{E}$, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence infini. D'après le cours, les trois séries

entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ sont de même rayon de convergence, donc de rayon infini.

Donc pour tout $r > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} (e^{br})^n$ converge absolument.

Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \left\| z \mapsto \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z) \right\|_{\infty, D'(0, r)}$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z)$ converge normalement donc simplement sur $D'(0, r)$, $\forall r > 0$.

- (2) En particulier, cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{C}$. On pose alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z).$$

- (3) Montrons que f est solution de (E_h) sur $\mathbb{C}$. D'après la question **Q27.** :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z+1) - f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} Q_n(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (Q_n(z+1) - Q_n(z)) \\ &\stackrel{\text{Q27.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = h(z). \end{aligned}$$

Donc f est une solution de l'équation (E_h) .

- (4) On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad S_n(z) = \sum_{p=1}^n \frac{a_{p-1}}{p} Q_p(z).$$

On a montré que pour tout $r > 0$, la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge normalement vers f sur $D'(0, r)$. D'après la question **Q26.**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{E}$.

D'après la question **Q8.**, une combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{E}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \in \mathcal{E}$.

On écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(n)} z^k.$$

- (5) Montrons que f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

★ Montrons un résultat préliminaire.

Soit $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme g sur $D(0, R)$.

Soit $r \in [0, R]$, $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. La fonction $\theta \mapsto b_k r^k e^{i(k-n)\theta}$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad |b_k r^k e^{i(k-n)\theta}| = |b_k| r^k.$$

Or la série $\sum_{k \geq 0} |b_k| r^k$ converge absolument. Donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} b_k r^k e^{i(k-n)\theta}$ converge normalement donc uniformément sur $D'(0, r)$. On peut intervertir somme et intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k r^k e^{ik\theta} \right) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} b_k r^k e^{i(k-n)\theta} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k r^k 2\pi \delta_{n,k} = 2\pi b_n r^n. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall r \in [0, R[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.}$$

★ On fixe $r > 0$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge normalement donc uniformément vers f sur $D'(0, r)$. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N$, $\|S_n - f\|_{\infty, D'(0, r)} \leq \varepsilon$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On a :} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k^{(n)} = \frac{1}{r^k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta. \\ \text{On pose :} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \frac{1}{r^k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta. \end{array} \right.$$

Par inégalité triangulaire et puisque $re^{i\theta} \in D'(0, r) : \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N$,

$$\left| b_k^{(n)} - c_k \right| r^k = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_n - f)(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|S_n - f\|_{\infty, D'(0, r)} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta = \varepsilon.$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite $(b_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers c_k .

★ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$. La série $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{|z|}{r} \right)^k$ est géométrique de raison $\frac{|z|}{r} < 1$, donc est convergente.

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad \left| \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(n)} z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (b_k^{(n)} - c_k) z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |b_k^{(n)} - c_k| |z|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{r^k} |z|^k \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{r} \right)^k = \varepsilon \frac{1}{1 - |z|/r}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(n)} z^k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ sur le disque ouvert

$D(0, r)$. Par unicité de la limite simple d'une suite de fonctions, $\boxed{\forall z \in D'(0, r), \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k.}$

Donc f est développable en série entière sur $D(0, r)$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Donc les coefficients $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne dépendent pas du réel $r > 0$ choisi. Le raisonnement précédent est valable pour tout $r > 0$, d'où :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k.$$

Donc f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et $\boxed{f \in \mathcal{E}.}$