

Mines 1 MP 2023 – Corrigé

Rédigé par Frédéric Denizet, professeur au lycée Fénélon

Remarque : la notion de produit scalaire sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel n'est pas au programme de MP, le sujet est donc hors programme dès la première phrase. Ce problème est manifeste à la question 12 où il faut manipuler, en les différenciant, les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Il est ainsi difficile d'envisager qu'un candidat, même bien préparé en conformité au programme de MP, puisse traiter correctement cette question.

A l'inverse, les normes subordonnées sont au programme de MP depuis cette session 2023, les questions 1 à 3 relèvent donc de pures questions de cours.

1. Remarque : il faut évidemment supposer que $E \neq \{0\}$ pour que les questions 1, 2 et 3 soient cohérentes.

Notons $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, S est une sphère de E donc un fermé borné de E et donc un compact de E (car E est de dimension finie).

u est continue sur E car linéaire (et E de dimension finie), donc $x \mapsto \|u(x)\|$ est continue (la norme est lipschitzienne donc continue), le théorème des bornes atteintes assure que cette fonction admet un maximum sur S .

On a donc justifié l'existence de $\sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\|$ (et c'est un maximum).

Par ailleurs pour tout $y \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|u(y)\|}{\|y\|} = \left\| u \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\|$ où $\frac{y}{\|y\|} \in S$

donc $\frac{\|u(y)\|}{\|y\|} \leq \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\|$.

On a donc justifié l'existence de $\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ et l'inégalité $\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\|$.

Enfin, pour tout $y \in S$, $\|u(y)\| = \frac{\|u(y)\|}{\|y\|} \leq \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$,

d'où $\sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\| \leq \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ et finalement $\sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

2. $\|\cdot\|$ est définie de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}_+$, vérifions qu'elle satisfait aux propriétés d'une norme :

Séparation : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| = 0$.

On a $\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0$ donc, pour tout $x \in E$, $u(x) = 0$ (immédiat pour $x = 0$) ce qui assure $u = 0$.

Homogénéité : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\lambda = 0$ on a $\|\lambda u\| = 0 = |\lambda| \|u\|$.

Si $\lambda \neq 0$, pour tout $x \in S$, $\|\lambda u(x)\| = |\lambda| \|u(x)\| \leq |\lambda| \|u\|$ d'où $\|\lambda u\| \leq |\lambda| \|u\|$.

Réciproquement, pour tout $x \in S$, $\|u(x)\| = \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda u(x)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda u\|$ d'où

$\|u\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda u\|$ i.e. $|\lambda| \|u\| \leq \|\lambda u\|$ et finalement $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

Inégalité triangulaire : soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Pour tout $x \in S$, $\|(u+v)(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|$,

d'où $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

En conclusion, $||| \cdot |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3. On remarque que par définition de $||| \cdot |||$, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ on a, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq |||u||| \|x\|$ (u est $|||u|||$ -lipschitzienne).

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Pour tout $x \in S$, $\|(uv)(x)\| = \|u(v(x))\| \leq |||u||| \|v(x)\| \leq |||u||| |||v|||$.

On a donc $|||uv||| \leq |||u||| |||v|||$.

Une récurrence simple assure alors que, pour tous $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, $|||u^k||| \leq |||u|||^k$.

4. *Remarque : il faut définir les E_i tels qu'ils soient distincts de $\{0\}$ pour que la suite soit cohérente.*

Le polynôme caractéristique χ_a de a est scindé donc s'écrit sous la forme

$$\chi_a = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k} \text{ où } \lambda_1, \dots, \lambda_r \text{ sont les valeurs propres de } a \text{ d'ordres } m_1, \dots, m_r.$$

Par théorème de Cayley–Hamilton et lemme de décomposition des noyaux (les $(X - \lambda_k)^{m_k}$

sont premiers entre eux) on alors $E = \ker(\chi_a(a)) = \bigoplus_{k=1}^r \ker(a - \lambda_k Id)^{m_k}$.

5. *Remarque : pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, p_i et q_i sont des applications linéaires mais pas des endomorphismes, on peut noter que $q_i p_i$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et est plus précisément le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$, ce qui sera plus explicite à la question 7.*

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, posons $C_i = |||q_i p_i|||_c$.

Soient $u \in \mathcal{L}(E_i)$ et $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\| = 1$, alors :

$$\|q_i u p_i(x)\| = \|u(p_i(x))\| \leq |||u|||_i \|p_i(x)\| = |||u|||_i \|q_i p_i(x)\| \leq |||u|||_i |||q_i p_i|||_c \leq C_i |||u|||_i.$$

On a donc $|||q_i u p_i|||_c \leq C_i |||u|||_i$.

6. Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, E_i est le noyau d'un polynôme en a qui commute avec a donc E_i est stable par a .
7. Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, par définition p_i est nul sur $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ ce qui assure que pour tout $j \neq i$,

$$p_i q_j = 0, \text{ par ailleurs pour tout } x \in E_i, p_i q_i(x) = p_i(x) = x \text{ i.e. } p_i q_i = Id_{E_i}.$$

Soit $x \in E$ qu'on décompose comme $x = x_1 + \dots, x_r$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $x_i \in E_i$, alors

$$\sum_{i=1}^r q_i p_i(x) = \sum_{i=1}^r q_i(x_i) = \sum_{i=1}^r x_i = x, \text{ i.e. } \sum_{i=1}^r q_i p_i = Id_{\mathbb{C}^n}.$$

8. Soit $x \in E$, alors : $\sum_{i=1}^r q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^r a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^r p_i a q_i p_i(x) = \sum_{i=1}^r p_i(a(q_i p_i(x)))$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $a(q_i p_i(x)) \in E_i$ donc $p_i(a(q_i p_i(x))) = a(q_i p_i(x))$, et ainsi :

$$\sum_{i=1}^r q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^r a(q_i p_i(x)) = a \left(\sum_{i=1}^r q_i p_i(x) \right) = a(x).$$

On a bien $a = \sum_{i=1}^r q_i a_i p_i$.

9. Montrons par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k = \sum_{i=1}^r q_i a_i^k p_i$.

Initialisation : pour $k = 0$, $a^0 = Id_{C^n} = \sum_{i=1}^r q_i p_i = \sum_{i=1}^r q_i a_i^0 p_i$

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k = \sum_{i=1}^r q_i a_i^k p_i$, alors :

$$a^{k+1} = a^k a = \left(\sum_{i=1}^r q_i a_i^k p_i \right) \left(\sum_{j=1}^r q_j a_j p_j \right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r q_i a_i^k p_i q_j a_j p_j.$$

À l'aide de 7 on a donc $a^{k+1} = \sum_{i=1}^r q_i a_i^k a_i p_i = \sum_{i=1}^r q_i a_i^{k+1} p_i$, ce qui achève la récurrence.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $e^{ta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t^k}{k!} \sum_{i=1}^r q_i a_i^k p_i \right).$

Par continuité de l'application (linéaire en dimension finie) $u \in \mathcal{L}(E_i) \mapsto \sum_{i=1}^r q_i u p_i$ on a

donc
$$e^{ta} = \sum_{i=1}^r q_i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} a_i^k p_i = \sum_{i=1}^r q_i e^{ta_i} p_i.$$

10. Soient $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$, alors puisque $t\lambda_i Id_{E_i}$ et $t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})$ commutent on a :

$$e^{ta_i} = e^{t\lambda_i Id_{E_i} + t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})} = e^{t\lambda_i Id_{E_i}} e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})} = e^{t\lambda_i} e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})};$$

$$\text{d'où } |||e^{ta_i}|||_i = |e^{t\lambda_i}| |||e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})}|||_i.$$

Par définition on a $(a_i - \lambda_i Id_{E_i})^{m_i} = 0$ donc $e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})} = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (a_i - \lambda_i Id_{E_i})^k$ puis :

$$|||e^{ta_i}|||_i \leq |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||(a_i - \lambda_i Id_{E_i})^k|||_i \leq |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i Id_{E_i}|||_i^k.$$

11. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, posons $P_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|||a_i - \lambda_i Id_{E_i}|||_i^k}{k!} X^k$.

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}, e^{ta} = \sum_{i=1}^r q_i e^{ta_i} p_i \text{ donc } |||e^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^r |||q_i e^{ta_i} p_i|||_c \leq \sum_{i=1}^r C_i |||e^{ta_i}|||_i.$$

$$\text{Ainsi à l'aide de 10 : } |||e^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^r C_i |e^{t\lambda_i}| P_i(|t|).$$

Posons alors $P = \sum_{i=1}^r C_i P_i$ (c'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$), on a pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $C_i \geq 0$ et $P_i(x) \geq 0$ donc $C_i P_i(x) \leq P(x)$.

$$\text{Ainsi } |||e^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^r |e^{t\lambda_i}| P(|t|) = P(|t|) \sum_{i=1}^r |e^{t\lambda_i}| = P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}.$$

12. **Question hors programme**

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on a :

— pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|u_M(X)\| = \|MX\| = X^T M^T M X$ donc :

$$|||u_M|||_r = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, X^T X = 1} (X^T M^T M X);$$

— pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $\|u_M(X)\| = \|MX\| = \overline{X}^T M^T M X$ donc :

$$|||v_M|||_c = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \overline{X}^T X = 1} (\overline{X}^T M^T M X);$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ pouvant être considéré dans $\mathbb{C}^n$ on a donc $|||u_M|||_r \leq |||v_M|||_c$.

Il suffit alors de remarquer que e^{tA} est à la fois la matrice canoniquement associée à e^{tu_A} dans $\mathbb{R}^n$ et à e^{tv_A} dans $\mathbb{C}^n$ (c'est au programme et cela découle directement de la continuité de l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé) pour obtenir que $|||e^{tu_A}|||_r \leq |||e^{tv_A}|||_c$.

13. Montrons cette équivalence par double implication, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A d'ordres $m_1, \dots, m_r$.

$\Leftarrow$: on suppose que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_{x_0}(t) = e^{tu}(x_0) = e^{tu_A}(x_0)$ donc :

$$\|g_{x_0}(t)\| \leq |||e^{tu_A}|||_r \|x_0\| \leq |||e^{tv_A}|||_c \|x_0\|.$$

On applique alors la question 12 pour « $a = v_A$ » : $\|g_{x_0}(t)\| \leq \|x_0\| P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)}$.

Par hypothèse on a, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ ce qui assure par croissances comparées que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|g_{x_0}(t)\|) = 0$.

$\Rightarrow$: par contraposée, on suppose donc qu'il existe $\lambda \in Sp(A)$ avec $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$.

Soit $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à λ on a $AZ = \lambda Z$ ce qui assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k Z = \lambda^k Z$ puis $e^{tA} Z = e^{t\lambda} Z$.

De plus $A\overline{Z} = \overline{AZ} = \overline{\lambda Z} = \overline{\lambda} \overline{Z}$ puis $e^{tA} \overline{Z} = e^{t\overline{\lambda}} \overline{Z}$.

— Premier cas : $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut considérer $X_0 = Z$ vecteur propre réel de A associé à λ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g_{X_0}(t) = e^{tA} X_0 = e^{t\lambda} X_0$ donc $\|g_{X_0}(t)\| = e^{t\lambda} \|X_0\| \geq \|X_0\|$ ce qui assure que $\|g_{X_0}(t)\|$ ne tend pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

— Second cas : $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Posons $X_0 = Z + \overline{Z}$ on a $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} g_{X_0}(t) &= e^{tA} X_0 = e^{tA} Z + e^{tA} \overline{Z} = e^{t\lambda} Z + e^{t\overline{\lambda}} \overline{Z} = e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} (e^{it \operatorname{Im}(\lambda)} Z + e^{-it \operatorname{Im}(\lambda)} \overline{Z}) \\ &= 2e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} \operatorname{Re}(e^{it \operatorname{Im}(\lambda)} Z). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|g_{X_0}(t)\| \geq 2 \|\operatorname{Re}(e^{it \operatorname{Im}(\lambda)} Z)\|.$$

Z a au moins une coordonnée z_k non nulle dont on note θ un argument on a alors :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re}(e^{it \operatorname{Im}(\lambda)} Z)\| &\geq |\operatorname{Re}(e^{it \operatorname{Im}(\lambda)} z_k)| = |\operatorname{Re}(e^{i(t \operatorname{Im}(\lambda) + \theta)} |z_k|)| = |z_k| |\cos(t \operatorname{Im}(\lambda) + \theta)|, \\ \text{où } \operatorname{Im}(\lambda) &\neq 0 \text{ ce qui assure que } \|g_{X_0}(t)\| \text{ ne tend pas vers 0 quand } t \text{ tend vers } +\infty. \end{aligned}$$

14. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A d'ordres $m_1, \dots, m_r$.

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^{tu} = e^{tu_A}$ donc :

$|||e^{tu}|||_r = |||e^{tu_A}|||_r \leq |||e^{tv_A}|||_c \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}$ (on a de nouveau appliqué la question 12 pour « $a = v_A$ »).

Posons alors $\gamma = \min \{-\operatorname{Re}(\lambda_i) \mid i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$, par hypothèse $\gamma > 0$ et on a, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $t\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\gamma t$ donc $|||e^{tu}|||_r \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{-\gamma t} = rP(|t|)e^{-\gamma t}$.

Posons alors $\alpha \in]0, \gamma[$, on a $|||e^{tu}|||_r \leq e^{-\alpha t}(rP(|t|)e^{(\alpha-\gamma)t})$.

Or $\alpha - \gamma < 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (rP(|t|)e^{(\alpha-\gamma)t}) = 0$, par continuité de la fonction

$h : t \mapsto rP(|t|)e^{(\alpha-\gamma)t}$ et théorème des bornes atteintes, on en déduit que cette fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (exercice classique que je ne détaille pas), on note alors C_2 un majorant de h sur $\mathbb{R}_+$ et on a bien : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |||e^{tu}|||_r \leq C_2 e^{-\alpha t}$.

On obtient directement : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|g_{x_0}(t)\| = \|e^{tu}(x_0)\| \leq |||e^{tu}|||_r \|x_0\| \leq C_2 e^{-\alpha t} \|x_0\|$.

15. Montrons que la fonction b est bien définie, on pose x et y dans $\mathbb{R}^n$.

Par inégalité de Cauchy-Schwartz et en utilisant la question 14 on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \rangle| \leq \|e^{ta}(x)\| \|e^{ta}(y)\| \leq C_2^2 \|x\| \|y\| e^{-2\alpha t}, \text{ où } \alpha > 0 \text{ donc } e^{-2\alpha t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

ce qui assure l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \rangle$ (qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ par composition) et donc la bonne définition de $b(x, y)$.

Vérifions que b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

symétrie : immédiat par symétrie du produit scalaire $\langle . | . \rangle$;

bilinéarité : immédiat par linéarité de l'intégrable, linéarité de e^{ta} et bilinéarité de $\langle . | . \rangle$;

positivité : soit $x \in \mathbb{R}^n$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(x) \rangle \geq 0$ donc $b(x, x) \geq 0$;

caractère défini : soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(x, x) = 0$, la fonction $t \mapsto \langle e^{ta}(x) | e^{ta}(x) \rangle$ étant continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(x) \rangle = 0$ donc $e^{ta}(x) = 0$, notamment pour $t = 0$ on obtient $x = 0$.

En conclusion, b est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$q(x+h) = b(x+h, x+h) = b(x, x) + 2b(x, h) + b(h, h) = q(x) + 2b(x, h) + b(h, h).$$

b étant bilinéaire sur un espace de dimension finie, il existe une constante Δ telle que, pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|b(u, v)| \leq \Delta \|u\| \|v\|$ et donc $|b(h, h)| \leq \Delta \|h\|^2$ ce qui assure que $b(h, h) = o_{h \rightarrow 0}(h)$.

Par ailleurs $h \mapsto b(x, h)$ est linéaire, on a donc justifié que q était différentiable en x avec $dq(x) : h \mapsto 2b(x, h)$.

On a donc : $dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x))$.

Par ailleurs la fonction $\phi : t \mapsto e^{ta}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\phi' : t \mapsto e^{ta}a(x)$; cela assure que la fonction $\psi : t \mapsto \langle e^{ta}(x) | e^{ta}(x) \rangle$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\psi' : t \mapsto 2 \langle e^{ta}(x) | e^{ta}a(x) \rangle$.

$$\text{On a donc } 2b(x, a(x)) = \int_0^{+\infty} 2 \langle e^{ta}(x) | e^{ta}a(x) \rangle = \int_0^{+\infty} \psi'(t) = [\psi(t)]_0^{+\infty}.$$

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t)) = 0$ (cf 15) et $\psi(0) = \|x\|^2$, on obtient finalement :

$$dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

17. *Remarque : la notation utilisée par le sujet est abusive puisque $q(f_{x_0})$ n'est pas défini, il faudrait utiliser $q \circ f_{x_0}$.*

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ par différenciation d'une composée d'applications différentiables on a :

$$(q \circ f_{x_0})'(t) = dq(f_{x_0}(t))(f'_{x_0}(t)) = 2b(f_{x_0}(t), f'_{x_0}(t)), \text{ où par définition de } f_{x_0} \text{ on a } f'_{x_0}(t) = \varphi(f_{x_0}(t)) \text{ donc } (q \circ f_{x_0})'(t) = 2b(f_{x_0}(t), \varphi(f_{x_0}(t))).$$

Or $\varphi(f_{x_0}(t)) = \varepsilon(f_{x_0}(t)) + a(f_{x_0}(t))$ donc :

$$(q \circ f_{x_0})'(t) = 2b(f_{x_0}(t), a(f_{x_0}(t))) + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))) \text{ où on a } 2b(f_{x_0}(t), a(f_{x_0}(t))) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 \text{ (cf 16) ce qui donne finalement } \boxed{(q \circ f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t)))}.$$

18. $\|\cdot\|$ et $\sqrt{q}$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie, elles sont donc équivalentes, on peut ainsi poser μ et ν dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{\mu\sqrt{q(x)} \leq \|x\| \leq \nu\sqrt{q(x)}}$. (On conservera ces notations pour toutes les questions suivantes).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$b(x, \phi(x) - a(x)) \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(\phi(x) - a(x))}$$

Or $\phi(x) - a(x) = \phi(x) - (\phi(0) + d\phi(0)(x)) = \|x\|\theta(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0}(\theta(x)) = 0$ (développement limité en 0),

$$\text{donc } \sqrt{q(\phi(x) - a(x))} = \sqrt{q(\|x\|\theta(x))} = \|x\|\sqrt{q(\theta(x))} \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0}(q(\theta(x))) = 0,$$

enfin $\|x\| \leq \nu\sqrt{q(x)}$, on obtient finalement :

$$b(x, \phi(x) - a(x)) \leq \nu q(x)\sqrt{q(\theta(x))} \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0}(q(\theta(x))) = 0.$$

On en déduit que :

$$-\|x\|^2 + 2b(x, \phi(x) - a(x)) \leq -\mu^2 q(x) + 2\nu q(x)\sqrt{q(\theta(x))} \leq q(x)(-\mu^2 + 2\nu\sqrt{q(\theta(x))})$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0}(q(\theta(x))) = 0$ donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour $\|x\| \leq \alpha_0$, on ait :

$$-\mu^2 + 2\nu\sqrt{q(\theta(x))} < -\frac{\mu^2}{2}.$$

Posons $\beta = \frac{\mu^2}{2}$ on a $\beta > 0$ et on a montré que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| \leq \alpha_0, -\|x\|^2 + 2b(x, \phi(x) - a(x)) \leq -\beta q(x)}.$$

Posons alors $\alpha = \left(\frac{\alpha_0}{\nu}\right)^2$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $q(x) \leq \alpha$:

$$\|x\| \leq \nu\sqrt{q(x)} \leq \nu\sqrt{\alpha} \leq \alpha_0 \text{ et donc } -\|x\|^2 + 2b(x, \phi(x) - a(x)) \leq -\beta q(x).$$

On a ainsi notamment pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$q(f_{x_0}(t)) \leq \alpha \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \phi(f_{x_0}(t)) - a(f_{x_0}(t))) \leq -\beta q(f_{x_0}(t));$$

c'est-à-dire avec la définition de ε :

$$\boxed{q(f_{x_0}(t)) \leq \alpha \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))) \leq -\beta q(f_{x_0}(t))}.$$

19. Supposons que $q(x_0) < \alpha$, on rappelle que $f_{x_0}(0) = x_0$ on a donc $q(f_{x_0}(0)) < \alpha$.

Par continuité de $q \circ f_{x_0}$ il existe $u > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, u]$, $q(f_{x_0}(t)) < \alpha$.

Posons alors $I = \{u \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall t \in [0, u], q(f_{x_0}(t)) < \alpha\}$.

Soit $u \in I$ on a, pour tout $t \in [0, u]$, $q(f_{x_0}(t)) < \alpha$ et donc d'après les questions 17 et 18 :

$$(q \circ f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))) \leq -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

En posant $h : t \mapsto q \circ f_{x_0}(t)$ on a donc : $\forall t \in [0, u]$, $h'(t) \leq -\beta h(t)$ i.e. $h'(t) + \beta h(t) \leq 0$; posons alors $k : t \mapsto h(t)e^{\beta t}$ on a $\forall t \in [0, u]$, $k'(t) = (h'(t) + \beta h(t))e^{\beta t} \leq 0$ et donc k est décroissante sur $[0, u]$, ce qui assure que : $\forall t \in [0, u]$, $k(t) \leq k(0)$ où $k(0) = h(0) = q(x_0)$.

On a donc montré que pour $u \in I$ on a : $\boxed{\forall t \in [0, u], q \circ f_{x_0}(t) = h(t) \leq q(x_0)e^{-\beta t}}$.

I est une partie non vide de $\mathbb{R}_+^*$, montrons qu'elle n'est pas majorée par l'absurde, supposons donc qu'elle est majorée et notons v sa borne supérieure.

Pour tout $t \in [0, v[$, il existe $u \in I$ tel que $t \in [0, u]$ donc $q \circ f_{x_0}(t) \leq q(x_0)e^{-\beta t} \leq q(x_0)$.

Par continuité de $q \circ f_{x_0}$ on a donc $q \circ f_{x_0}(v) \leq q(x_0) < \alpha$.

Mais alors toujours par continuité, il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $t \in [v, v + \gamma]$, $q \circ f_{x_0}(t) < \alpha$.

On a donc, pour tout $t \in [0, v + \gamma]$, $q \circ f_{x_0}(t) < \alpha$ i.e. $v + \gamma \in I$, ce qui contredit la définition de v et achève la démonstration par l'absurde.

I n'est pas majoré donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $u \in I$ tel que $t \in [0, u]$ et ainsi :

$$\boxed{q(f_{x_0}(t)) \leq q(x_0)e^{-\beta t}}.$$

20. Posons $\tilde{\alpha} = \mu\sqrt{\alpha}$ alors, pour tout $x_0 \in B(0, \tilde{\alpha})$ on a $q(x_0) \leq \frac{1}{\mu^2} \|x_0\|^2 < \frac{1}{\mu^2} \tilde{\alpha}^2 = \alpha$.

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en appliquant le 19 :

$$\|f_{x_0}(t)\| \leq \nu \sqrt{q(f_{x_0}(t))} \leq \nu \sqrt{q(x_0)} e^{\frac{-\beta}{2}t} \leq \frac{\nu}{\mu} \|x_0\| e^{\frac{-\beta}{2}t}.$$

On a bien le résultat voulu en posant $C = \frac{\nu}{\mu}$.