Xens - Maths A

Proposition de corrigé

Taoufiki said

Partie I : Bases symplectiques

1. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour $i = 1, ..., n$, on définit $e_i^* \in E^*$, par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} \ , \ j = 1, ..., n$$

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0$ alors $\forall j$, $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = 0$.
- Soit $f \in E^*$. Pour chaque $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a : $\forall j$, $e_j^*(x) = x_j$

donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*(x)$, d'où $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*$.

C/C : $(e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^* $\Longrightarrow$ $\dim E^* = n$.

2. Soit $\omega \in A(E)$. On a : $\forall (x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$
Si $x = y$, on écrit : $\omega(x, x) = -\omega(x, x)$ donc $\omega(x, x) = 0$, quelque soit $x \in E$.

3. (a) • On a : $\omega(x, y) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \omega(b_i, b_j)$, donc

$$\omega(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} (\omega(b_i, b_j))_{1 \le i,j \le n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $M = (\omega(b_i, b_j))_{1 \le i,j \le n}$ convient.

• Supposons qu'il existe une autre matrice N vérifiant la propriété.
À chaque couple $(X,Y)\in\mathbb{R}^n$, on associe $(x,y)\in E^2$ tel que

$$X = Mat_B(x) \quad \text{et} \quad Y = Mat_B(y)$$

On a ${}^tXNY = \omega(x,y) =^t XMY$ donc ${}^tX(M-N)Y = 0$, ceci pour tout X,Y
donc $\forall Y$, $(M-N)Y \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ (./. au produit scalaire canonique), puis $M - N = 0$.

(b) La version matricielle de l'antisymétrie s'écrit :

$$\forall (X,Y)\in(\mathbb{R}^n)^2 \ , \ {}^tXMY = -{}^tYMX$$

Comme ${}^tXMY \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ alors ${}^t({}^tXMY) =^t XMY$, donc :
$\forall (X,Y)\in(\mathbb{R}^n)^2$, ${}^tY.{}^tM.X = -{}^tYMX$, d'où ${}^tM = -M$.

(c) Ici $dim(E) = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Mat_B(\omega)$. On a : $b = -c$ car $M = -{}^tM$ et $a = d = 0$ car $\omega(b_1,b_1) = \omega_(b_2,b_2)$ donc $M = cJ_2$.
On vérifie que l'application $\varphi : A(E) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\omega \mapsto Mat_B(\omega)$ (Bien définie par $QI.3.a.$) est linéaire (facile) et injective ($\varphi(\omega) = 0 \ \Rightarrow \ \omega(b_1,b_2) = 0$)
comme $Im(\varphi) = vect(J_2)$ alors $dimA(E) = rg(\varphi) = 1$.

(d) $(\mathcal{E}_1) \ \Rightarrow \ (\mathcal{E}_2)$:
On a : φ_ω est injective, donc pour $x\neq 0$, on a : $\omega(x,0)\neq 0$, donc il existe $y\in E$, $\omega(x,y)\neq 0$.
$(\mathcal{E}_2) \ \Rightarrow \ (\mathcal{E}_3)$
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $MX = 0$. On écrit :
$0 =^t (MX) =^t X^tM = -{}^tXM$, donc $\forall Y\in\mathbb{R}^n$, ${}^tXMY = 0$.
Si $X\neq 0$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_ib_i \neq 0$,donc il existe $y = \sum_{i=1}^{n} y_ib_i$, $\omega(x,y)\neq 0$ c.à.d. ${}^tXMY \neq 0$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ce qui est absurde.

On en déduit que $\forall X \ , \ MX = 0 \implies X = 0$ i.e. M est inversible.

$(\mathcal{E}_3) \Rightarrow (\mathcal{E}_1)$

On a $\varphi_\omega \in L(E, E^*)$ et $dim(E) = dim(E^*)$, il suffit de montrer que φ_ω est injective :

Soit $x \in E$ tel que $\varphi_\omega(x) = 0$. On a : $\forall y \in E \ , \ \omega(x, y) = 0$, matriciellement, $\forall Y \in R^n \ , \ {}^tXMY = 0$.

donc $-{}^t(MX) = {}^t(-MX) = {}^t({}^tMX) = {}^tXM \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ puis $MX = 0$, ce qui implique $X = 0$ car M inversible, puis $x = 0$.

4. Supposons l'existence d'une forme symplectique ω sur E et considérons une base B de E et $M = Mat_B(\omega)$.
   On a : ${}^tM = -M$ ($Q3b$), donc $\det(M) = \det({}^tM) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$ donc $(1 + (-1)^{n+1}) \det(M) = 0$, comme $M \in GL_n(\mathbb{R})$ ($Q3d \ : \ \mathcal{E}_1 \implies \mathcal{E}_3$) alors n est pair.
5. On pose : $n = 2p$. Observons que J_n est inversible, en effet
   $$\det(J_n) = \begin{vmatrix} O & -I_p \\ I_p & O \end{vmatrix} = (-1)^p \begin{vmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{vmatrix} = (-1)^{2p} = 1 \neq 0 \ (\forall i = 1, ..., p \ , \ C_i \leftrightarrow C_{i+p}),$$
   et antisymétrique car $J_n = -{}^tJ_n$.
   ω_0 est clairement bilinéaire et pour deux vecteurs arbitraires X et Y , on a :
   $$-\omega_0(X, Y) = -{}^tXJ_nY = {}^tX(-J_n)Y = {}^tX({}^tJ_n)Y = {}^t({}^tX({}^tJ_n)Y) = {}^tYJ_nX = \omega_0(Y, X)$$
   Soit $B = (e_1, ..., e_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $(i, j) \in \{1, ..., 2p\}^2$, on a :
   $$\omega_0(e_i, e_j) = {}^te_iJ_ne_j = \begin{cases} -\delta_{i+p,j} & \textbf{si} \quad i = 1, ..., p \\ \\ \delta_{i-p,j} & \textbf{si} \quad i = p+1, ..., 2p \end{cases}$$
   d'où $Mat_B(\omega_0) = J_n$ qui est inversible, d'où ω_0 est symplectique ($Q.3.d$).
6. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Par $Q.3.d.$, il existe $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.
   On pose $b_1 = x \ , \ b_2 = \frac{-1}{\omega(x,y)}y$. On a :
   $$\omega(b_1, b_2) = -1 = -\omega(b_2, b_1) \quad \text{et} \quad \omega(b_1, b_1) = \omega(b_2, b_2) = 0 \quad (Q.2.)$$
   Montrons que (b_1, b_2) est une base de E : Si $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $sb_1 + tb_2 = 0$ alors $0 = \omega(sb_1 + tb_2, b_1) = t$, donc $sb_1 = 0$ puis $s = 0$.
   La famille est libre, par raison de dimension, elle est base de E. Bien sûr, on a : $Mat_{(b_1,b_2)}(\omega) = J_2$.

7. (a) Soient $u \in F^*$ et G un supplémentaire de F dans E. On prolonge u en une application linéaire $\widetilde{u} : E \to \mathbb{R}$ qui est nulle sur G.
Pour vérifier la linéarité, on prend deux vecteurs quelconques de E :
$x = x_F + x_G$, $y = y_F + y_G$ et $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widetilde{u}(ax+y) = \widetilde{u}(ax_F+y_F)+\widetilde{u}(ax_G+y_G) = au(x_F)+u(y_F) = a(u(x_F)+u(x_G))+u(y_F)+u(y_G) = a\widetilde{u}(x)+\widetilde{u}(y)$$

(b) On pose : $\overline{\omega} = \omega_{F\times F}$.
- On a : $\omega \in A(E)$ donc $\overline{\omega} \in A(F)$.
- On a :

$$\begin{aligned} Ker(\varphi_{\overline{\omega}}) &= \{x \in F \mid \overline{\omega}(x,.) = 0\} \\ &= \{x \in F \mid \forall y \in F \ , \ \overline{\omega}(x,y) = 0\} \\ &= \{x \in F \mid \forall y \in F \ , \ \omega(x,y) = 0\} \\ &= F \cap F^{\omega} \end{aligned}$$

Puisque $dim(F) < \infty$ alors

$$\begin{aligned} \overline{\omega} \text{ est symplectique} &\iff \varphi_{\overline{\omega}} \text{ est injective} \\ &\iff F \cap F^{\omega} = \{0\} \end{aligned}$$

(c) • Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in Ker\psi_F &\iff \varphi_{\omega}(x)_{/F} = 0 \\ &\iff \omega(x,.)_{/F} = 0 \\ &\iff \forall y \in F \ , \ \omega(x,y) = 0 \\ &\iff x \in F^{\omega} \end{aligned}$$

d'où $\quad Ker\psi_F = F^{\omega}$.
• Pour tout $x \in E$, $\psi_F(x) = \varphi_{\omega}(x)_{/F} \in F^*$ donc $Im\psi_F \subset F^*$.
Réciproquement, si $u \in F^*$, alors il existe $\widetilde{u} \in E^*$ vérifiant :

$$\widetilde{u}_{/F} = u \qquad (Q7a)$$

comme ω est symplectique, alors φ_{ω} est surjective, donc, il existe $x \in E$ tel que $\widetilde{u} = \varphi_{\omega}(x)$, puis $u = \widetilde{u}_{/F} = (\varphi_{\omega}(x))_{/F} = (\psi_{\omega})_{/F}(x) \in Im\psi_F$.
On en conclut que : $\quad Im\psi_F = F^*$.

(d) En utilisant la formule du rang et les questions $Q7c$ et $Q1$, on écrit :

$$\begin{aligned} dimE &= dimIm\psi_F + dimKer\psi_F \\ &= dimF^* + dimF^\omega \\ &= dimF + dimF^\omega \end{aligned}$$

(e) • Supposons que $\omega_{/F\times F}$ est une forme symplectique sur F, donc, par $Q7b$, on a : $F \cap F^\omega = \{0\}$. La question précédente nous permet de conclure la décomposition : $E = F^\omega \oplus F$.

• On pose : $G = F^\omega$. Le même raisonnement précédent entraîne que :

$$dimE = dimG + dimG^\omega$$

Montrons que $G^\omega = F$:
Soit $x \in F$. On a : $\forall y \in G = F^\omega$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x) = 0$, donc $x \in G^\omega$.
D'où $F \subset G^\omega$. D'autre part, la formule du rang donne :

$$dimF = dimE - dimF^\omega = dimE - dimG = dimG^\omega$$

d'où l'égalité $F = G^\omega$, puis $G \oplus G^\omega = E = F \oplus F^\omega$.
Par suite $\omega_{/G\times G}$ est symplectique car $G \cap G^\omega = \{0\}$ (d'après $Q7b$).

8. Soit $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.
   - Le cas $p = 1$ n'est que $Q6$.
   - $\mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(p+1)$:

   Soit E un $R-$ev de dimension $2p+2$. De la même façon vue en $Q6$, on montre qu'il existe $\widetilde{B_1} = (b_1, b_2) \in E^2$, une famille libre telle que :

$$\omega(b_1, b_1) = \omega(b_2, b_2) = 0 \quad , \quad \omega(b_2, b_1) = -\omega(b_1, b_2) = 1$$

   On pose $F = vect(b_1, b_2)$ et $\widetilde{\omega} = \omega_{/F}$. Montrons que : $\widetilde{\omega}$ est symplectique sur F :
   On a : $\widetilde{\omega} \in A(F)$ car $\omega \in A(E)$. Il reste à vérifier que $\varphi_{\widetilde{\omega}} : F \to F^*$ est un isomorphisme.
   Soit $x \in Ker\varphi_{\widetilde{\omega}}$. On pose $x = \alpha b_1 + \beta b_2$:
   $\forall y \in F$, $\widetilde{\omega}(x, y) = 0$, donc $\alpha = \widetilde{\omega}(x, b_1) = 0 = \widetilde{\omega}(x, b_2) = \beta$ donc $x = 0$.
   L'injectivité et l'égalité de dimensions $dimF = dimF^*$ entraînent que $\varphi_{\widetilde{\omega}}$ est un

isomorphisme puis que $\tilde{\omega}$ est symplectique sur F.
D'après la question $Q7e$, on a : $\omega_{/F^\omega \times F^\omega}$ est une forme symplectique sur F^ω et $F \oplus F^\omega = E$.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\widetilde{B_2}$ de F^ω telle que :

$$Mat_{\widetilde{B_2}}(\omega_{F^\omega \times F^\omega}) = diag(J_2, ..., J_2) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$$

On pose : $\widetilde{B} = \widetilde{B_1} \cup \widetilde{B_2}$. On a :

$$Mat_{\widetilde{B}}(\omega) = diag(J_2, ..., J_2) \in \mathcal{M}_{2p+2}(\mathbb{R})$$

car pour tout $x \in F$ et tout $y \in F^\omega$, $\omega(x, y) = 0 = \omega(y, x)$.

9. Soit $\widetilde{B} = (e_1, ..., e_{2p})$ une base de E telle que $Mat_{\widetilde{B}}(\omega) = diag(J_2, ..., J_2)$.
Pour $i = 1, ..., p$, on a : $\omega(e_{2i-1}, e_{2i}) = -1 = -\omega(e_{2i}, e_{2i-1})$
et pour $|i - j| \neq 1$, on a : $\omega(e_i, e_j) = 0$.
On pose : $B = (-e_2, -e_4, ..., -e_{2p}, e_1, e_3, ..., e_{2i-1})$. On a bien $Mat_B(\omega) = J_n$.
Soit $J \in L(E)$ tel que $Mat_B(J) = -J_n$.
On a : $(-J_n)^2 = -I_n$ donc $J^2 = -Id$.
Et pour $x \in E \setminus \{0\}$, $X = Mat_B(x)$ et $Y = Mat_B(J(x)) = -J_n X$, on a :

$$\omega(x, J(x)) =^t X.J_n.(-J_n.X) =^t X.X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \quad \text{où} \quad (x_1, ..., x_n) =^t X$$

On en déduit que ω dompte au moins une structure complexe sur E.

Partie II : Deux outils sur les polynômes

10. La linéarité de $L_{P,Q}$ est triviale, donc par raison de dimension, on a :

$$\begin{aligned} L_{P,Q} \text{ est un isomorphisme} &\iff L_{P,Q} \text{ est surjective} \\ &\iff L_{P,Q} \text{ est injective} \end{aligned}$$

Soit $D = P \wedge Q$.
• Si $\deg(D) \geq 1$, on écrit : $P = P_1 D$, $Q = Q_1 D$ avec $(P_1, Q_1) \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{q-1}[X]$ deux polynômes non nuls. On a : $L_{P,Q}(Q_1, P_1) = Q_1 P - P_1 Q = Q_1 P_1 Q - P_1 Q_1 D = 0$

donc $KerL_{P,Q} \neq \{0\}$ puis $L_{P,Q}$ n'est pas un isomorphisme.
• Si $D = 1$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $AP + BQ = 1$. Montrons la surjectivité de $L_{P,Q}$:
Soit $T \in \mathbb{R}_{p+q-1}$. Écrivons les divisions euclidiennes :

$$TA = RQ + \widetilde{V} \quad \text{avec} \quad \deg(\widetilde{V}) \leq q - 1$$
$$TB = SP + \widetilde{W} \quad \text{avec} \quad \deg(\widetilde{W}) \leq p - 1$$

On a : $T = T(AP + BQ) = \widetilde{V}P + \widetilde{W}Q + (R + S)QP$, si $R + S \neq 0$ alors $\deg(T) = \deg((R + S)PQ) \geq p + q > \deg(T)$, ce qui est impossible, donc $R + S = 0$ et par suite : $T = \widetilde{V}P + \widetilde{W}Q = L_{P,Q}(\widetilde{V}, \widetilde{W})$.

11. On vérifie d'abord que

$$\text{les racines de } P \text{ sont simples si, et seulement si} \quad P \wedge P' = 1$$

On pose $D = P \wedge P'$.
• Si $\deg(D) \geq 1$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $D(\lambda) = 0$ (Théorème de D'Alembert), en particulier $(X - \lambda)$ divise P et P' par transitivité, ce qui signifie que P admet λ pour racine multiple.
• Si $D = 1$, on écrit l'identité de Bezout : $UP + VP' = 1$. Si P admet un racine multiple $\lambda \in \mathbb{C}$, on aura :

$$0 = U(\lambda)P(\lambda) + V(\lambda)P'(\lambda) = 1$$

Ce qui est absurde, donc les racines complexes de P sont toutes simples.
On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} r & : & \mathbb{R}_d[X] & \rightarrow & R \\ & & P & \mapsto & \det(L_{P,P'}) \end{array}$$

On a bien $r(P) \neq 0$ implique que $L_{P,P'}$ est un isomorphisme puis $P \wedge P' = 1$ qui entraîne que les racines de P sont simples.

12. Posons $Z = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\}$ et montrons par l'absurde que l'intérieur de Z est vide. Supposons qu'il existe un point intérieur $a = (a_1, ..., a_d)$, il existe donc un réel $r > 0$ vérifiant : $B_\infty(a, r) \subset Z$ (c'est la boule relative à la norme $\|.\|_\infty$ pour avoir ce qui suit). En particulier, on a : $\prod_{i=1}^{d}]a_i - r, a_i + r[\subset B_\infty(a, r)$.

On écrit $f(x_1,...,x_d)=\sum_{i=0}^{n_d} P_i(x_1,...,x_{d-1})x_d^i$ (où chaque P_i ne dépend pas de x_d).
Pour $(b_1,...,b_{d-1})\in\prod_{i=1}^{d-1}]a_i-r,a_i+r[$, la fonction polynomiale $t\mapsto f(b_1,...,b_{d-1},t)$ admet une infinité de racines (tous les éléments de $]a_d-r,a_d+r[$), donc elle est nulle, ce qui implique que,

$$\forall i=0,...,n_d \ , \ \forall(b_1,...,b_{d-1})\in\prod_{i=1}^{d-1}]a_i-r,a_i+r[\quad , \quad P_i(b_1,...,b_{d-1})=0$$

En itérant ce procédé, on obtient que f est nulle, ce qui est contredit l'hypothèse sur f.
Maintenant, pour justifie la densité énoncée, on écrit

$$Adh(f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}))=Adh(\mathbb{R}^d\setminus Z)=\mathbb{R}^d\setminus Int(Z)=\mathbb{R}^d$$

Partie III : Réduction simultanée

13. • Pour $x\in E$, on définit $u(x)$ comme étant l'unique antécédant de $\omega_1(x,.)\in E^*$ par l'isomorphisme φ_ω, autrement dit $\forall x\in E$, $\omega_1(x,.)=\omega(u(x),.)$ donc

$$\forall x\in E \ , \ \forall y\in E \ , \ \omega_1(x,y)=\omega(u(x),y)$$

• Montrons que $u\in L(E)$. Soient $(x_1,x_2,y)\in E^3$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\omega(u(\alpha x_1+x_2),y) &= \omega_1(\alpha x_1+x_2,y)\\ &= \alpha\omega_1(x_1,y)+\omega_1(x_2,y)\\ &= \alpha\omega(u(x_1),y)+\omega(u(x_2),y)\\ &= \omega(\alpha u(x_1)+u(x_2),y)\end{aligned}$$

ceci est pour tout $y\in E$ donc $\omega(u(\alpha x_1+x_2),.)=\omega(\alpha u(x_1)+u(x_2),.)$ puis $u(\alpha x_1+x_2)=\alpha u(x_1)+u(x_2)$ par injevtivité de φ_ω.
• Montrons que $u\in GL(E)$:

Comme la dimension finie, il suffit de montrer l'injectivité.
Soit $x \in Ker(u)$. On a : $u(x) = 0$ donc

$$\omega_1(0,.) = \omega(u(0),.) = \omega(0,.) = \omega(u(x),.) = \omega_1(x,.)$$

Par injectivité de φ_{ω_1}, on a : $x = 0$.
• Montrons que u est unique :
Soit $v \in GL(E)$ tel que : $\forall x, y$, $\omega(v(x), y) = \omega_1(x, y)$.
on a donc $\forall x \in E$, $\omega(u(x),.) = \omega(v(x),.)$ ce qui donne $\forall x$, $u(x) = v(x)$
par injectivité de φ_ω.
• Montrons que $u \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E \ , \ \omega(x, u(y)) &= -\omega(u(y), x) \\ &= -\omega_1(y, x) \\ &= \omega_1(x, y) \\ &= \omega(u(x), y) \end{aligned}$$

d'où $u \in \mathcal{S}$.

14. (a) On a $u \in \mathcal{S}$, donc $\forall (x, y) \in E^2$, $\omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y)$.
Matriciellement, $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})^2$, ${}^tXJ_4UY =^t (UX)J_4Y =^t X^tUJ_4Y$. d'où :

$$J_4U =^t UJ_4$$

(b) Posons $U = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 4}$. On a :

$$J_4U =^t UJ_4 \iff \left\{ \begin{array}{c} a_{1,3} = a_{3,1} = a_{4,2} = a_{2,4} = 0 \\ a_{1,1} = a_{3,3} \ , \ a_{2,2} = a_{4,4} \ , \ a_{1,2} = a_{4,3} \ , \ a_{2,1} = a_{3,4} \\ a_{3,2} = -a_{4,1} \ , \ a_{1,4} = -a_{2,3} \end{array} \right.$$

On pose : $N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $\alpha = a_{2,3}$, $\beta = a_{4,1}$.
On a bien : $U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^tN \end{pmatrix}$.

(c) On a : $T(X) = X^2 - tr(N)X + \det(N) + \alpha\beta$.
On a $N^2 - tr(N)N + \det(N)I_2 = O_2$ et on vérifie que $J_2N +^t NJ_2 = tr(N)J_2$

et $NJ_2 + J_2^t N = tr(N)J_2$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} U^2 &= \begin{pmatrix} N^2 - \alpha\beta I_2 & \alpha(NJ_2 + J_2^t N) \\ \beta(J_2 N +^t NJ_2) & ({}^tN)^2 - \alpha\beta I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} tr(N)N - (\det(N) + \alpha\beta)I_2 & \alpha tr(N)J_2 \\ \beta tr(N)J_2 & tr(N)^t N - (\det(N) + \alpha\beta)I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(U) &= U^2 - tr(N)U + (\det(N) + \alpha\beta)I_4 \\ &= U^2 - tr(N)\begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^tN \end{pmatrix} + (\det(N) + \alpha\beta)\begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix} \\ &= O_4 \end{aligned}$$

15. Le polynôme caractéristique χ_U est scindé dans $\mathbb{C}$. Par hypothèse, ses racines sont toutes dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En plus, comme χ_U est réelle alors

$$\lambda \in sp(U) \iff \overline{\lambda} \in sp(U) \text{ avec } \lambda \text{ et } \overline{\lambda} \text{ ont même ordre de multiplicité}$$

Deux cas sont possibles : ou bien il y a quatre racines simples ou bien il y en a deux racines doubles .

• Si χ_U admet quatre racines simples, la matrice U sera diagonalisable comme on veut mais aussi son polynôme minimale sera $\pi_U = \chi_U$ ce qui est contredit le fait que $T(U) = O_4$.

• Nécessairement, $\chi_U(X) = (X-\lambda)^2(X-\overline{\lambda})^2$. Puisque π_U divise T , $\pi_U(\lambda) = \pi_U(\overline{\lambda})$ et π_U est unitaire alors $\pi_U(X) = T(X) = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ puis U est diagonalisable.

• On a : $dim(E_\lambda(U) = m(\lambda) = 2$ donc il existe deux vecteurs Z et Y de $\mathbb{C}^4$ linéairement indépendants tels que :

$$\begin{cases} UZ = \lambda Z \\ UY = \lambda Y \end{cases}$$

16. Posons $\lambda = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (car $\lambda \notin \mathbb{R}$). Par raison de dimension, il suffit de démontrer que $\widetilde{B}$ est libre, ce qui revient à montrer que la famille des représentations matricielles dans la base B est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Y_1 - \delta Y_2 = 0 \quad (*)$$

On a :

$$UZ = \lambda Z \iff \begin{cases} UZ_1 = aZ_1 - bZ_2 \\ UZ_2 = aZ_2 + bZ_1 \end{cases}$$

$$UY = \lambda Y \iff \begin{cases} UY_1 = aY_1 - bY_2 \\ UY_2 = aY_2 + bY_1 \end{cases}$$

En multipliant $(*)$ par U, on obtient :

$$a(\alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Y_1 - \delta Y_2) + b(\beta Z_1 - \alpha Z_2 - \gamma Y_2 - \delta Y_1) = 0$$

L'égalité $(*)$ et le fait que $b \neq 0$ entraînent

$$\beta Z_1 - \alpha Z_2 - \gamma Y_2 - \delta Y_1 = 0$$

par suite $\quad \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Y_1 - \delta Y_2 - i(\beta Z_1 - \alpha Z_2 - \gamma Y_2 - \delta Y_1) = 0$
ce qui donne : $\quad (\alpha - i\beta)(Z_1 + iZ_2) + (\gamma + i\delta)(Y_1 + iY_2) = 0$ puis $\alpha - i\beta = \gamma + i\delta = 0$ car la famille (Y, Z) est libre, d'où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et la famille énoncée est libre.

17. D'après les calculs de la question précédente, on a :

$$u(z_1) = az_1 - bz_2 \quad , \quad u(z_2) = az_2 + bz_1 \quad , \quad u(y_1) = ay_1 - by_2 \quad , \quad u(y_2) = ay_2 + by_1$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1(z_1, z_1) = \omega(u(z_1), z_1) = \omega(az_1 - bz_2, z_1) \\ &= a\omega(z_1, z_1) - b\omega(z_2, z_1) = b\omega(z_1, z_2) \end{aligned}$$

comme $b \neq 0$ alors $\omega(z_1, z_2) = 0$; De même $\omega(y_1, y_2) = 0$.
D'autre part

$$\omega(u(z_1), y_1) = \omega_1(z_1, y_1) = -\omega_1(y_1, z_1) = -\omega(u(y_1), z_1)$$

donc $\omega(az_1 - bz_2, y_1) = -\omega(ay_1 - by_2, z_1)$ puis $b\omega(z_2, y_1) = -b\omega(y_2, z_1)$,
puisque $b \neq 0$ alors $\omega(z_1, y_2) = \omega(z_2, y_1)$.
De même façon $\omega(u(z_2), y_1) = \omega(z_2, u(y_1))$ entraîne $a\omega(z_2, y_1) + b\omega(z_1, y_1) = a\omega(z_2, y_1) - b\omega(zy_2, y_2)$, puis $\omega(z_1, y_1) = \omega(z_2, y_2)$ car $b \neq 0$.

18. On a $\omega(z_1,y_1)^2+\omega(z_1,y_2)^2 \neq 0$ car sinon, on aura $Mat_{\widetilde{B}}(\omega)=O_4$, ce qui est contredit son inversibilité.

On pose : $\xi=\frac{-\omega(z_1,y_1)+i\omega(z_1,y_2)}{\omega(z_1,y_1)^2+\omega(z_1,y_2)^2} \in \mathbb{C}^*$ et $Y'=\xi Y=Y_1'+iY_2'$ (en particulier (Z,Y') est $\mathbb{C}-$libre. On considère $(y_1',y_2') \in E^2$ tel que :

$$Mat_B(y_1')=Y_1' \ , \ Mat_B(y_2')=Y_2'$$

On vérifie comme précédemment que $\widetilde{B'}=(z_1,z_2,y_1',-y_2')$ est une base de E et que $\omega(z_1,y_1')=-1$ et $\omega(z_1,y_2')=0$.

Bien sûr, on aura aussi les relations de $Q.17$ (où y_1 et y_2 seront replacés respectivement par y_1' et y_2').

Quitte à remplacer Y par ξY et $\widetilde{B}$ par $\widetilde{B'}$, on peut supposer que $\omega(z_1,y_1)=-1$ et $\omega(z_1,y_2)=0$, ce qui entraîne que :

$$Mat_{\widetilde{B}}(\omega)=J_4$$

19. On pose $r=|\lambda|=\sqrt{a^2+b^2}>0$ et $\theta=-\arccos(\frac{a}{r}) \in]0,\pi[$ car sinon, on aura $\frac{b}{r}=-\sin\theta=0$ ce qui est absurde ($\lambda \notin \mathbb{C}$).

On a :

$$u(z_1)=az_1-bz_2=r(\cos(\theta)z_1+\sin(\theta)z_2$$

$$u(z_2)=bz_1+az_2=r(-\sin(\theta)z_1+\cos(\theta)z_2$$

$$u(y_1)=ay_1-by_2=r(\cos(\theta)y_1-\sin(\theta)(-y_2)$$

$$u(-y_2)=-by_1-ay_2=r(\sin(\theta)y_1+\cos(\theta)(-y_2)$$

D'où

$$Mat_{\widetilde{B}}(\omega)=r\begin{pmatrix} R_\theta & O_2 \\ O_2 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$$

Maintenant, on pose : $M=Mat_{\widetilde{B}}(\omega_1)$ et $N=Mat_{\widetilde{B}}(u)=r\begin{pmatrix} R_\theta & O_2 \\ O_2 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$.

On a $\quad M={}^tNJ_4$ (l'interprétation matricielle de $\forall x,y \ , \ \omega_1(x,y)=\omega(u(x),y)$).

donc $M=r\begin{pmatrix} R_\theta & O_2 \\ O_2 & R_{-\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_2 & -I_2 \\ I_2 & O_2 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} O_2 & -R_\theta \\ R_{-\theta} & O_2 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} O_2 & -R_{-\theta'} \\ R_{\theta'} & O_2 \end{pmatrix}$ avec $\quad \theta'=-\theta$.

20. On a : $P(u) = 0_{L(E)}$, par lemme de noyaux :

$$E = Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

Soient $j \in \{1, ..., r\}$ et $x \in F_j$. On pose : $y = u(x)$. On a :

$$P_j(u)(y) = P_j(u) \circ u(x) = u \circ P_j(u)(x) = u(0_E) = 0_E$$

donc $y \in F_j$, ceci pour tout $x \in F_j$, d'où F_j est stable par u.

21. Soient $(j, k) \in \{1, ..., r\}^2$ tel que $j \neq k$, $x \in F_k$ et $y \in F_j$. On a : $P_j(u)(y) = 0$. Comme $P_j \wedge P_k = 1$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, $AP_k + BP_j = 1$. En utilisant cette identité, l'appartenance de u à S et le fait que deux polynômes d'un endomorphisme commutent, on aura :

$$\begin{aligned}
\omega(x, y) &= \omega(x, [A(u) \circ P_k(u) + B(u) \circ P_j(u)](y)) \\
&= \omega(x, A(u) \circ P_k(u)(y)) + \omega(x, B(u) \circ P_j(u)(y)) \\
&= \omega(x, P_k(u) \circ A(u)(y)) \\
&= \omega(P_k(u)(x), A(u)(y)) \\
&= \omega(0_E, A(u)(y)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ceci pour tout $y \in F_j$, donc $x \in F_j^{\omega}$.
Montrons que $x \in F_j^{\omega_1}$. Soit $y \in F_j$. On a $u(y) \in F_j$ car F_j stable par u, donc

$$\omega_1(x, y) = \omega(u(x), y) = \omega(x, u(y)) = 0 \qquad \text{car } x \in F_j^{\omega} \ , \ u(y) \in F_j$$

ceci pour tout $y \in F_j$, d'où $x \in F_j^{\omega_1}$.
On en conclut $F_k \subset F_j^{\omega}$ et $F_k \subset F_j^{\omega_1}$.

22. Soit $j \in \{1, ..., r\}$. Montrons que : $F_j \cap F_j^{\omega} = \{0_E\}$.
Soit $x \in F_j \cap F_j^{\omega}$. Pour tout $y \in F_j$, $\omega(x, y) = 0$ car $x \in F_j^{\omega}$
pour tout $k \neq j$ et pour tout $y \in F_k$, $\omega(x, y) = 0$ car $x \in F_j \subset F_k^{\omega}$
par suite, pour tout $y \in E$, $\omega(x, y) = 0$ (d'après $Q.20$), donc $\omega(x, .) = 0$ puis $x = 0$ car ω est symplectique sur E.
D'où $\omega_{/F_j \times F_j}$ est symplectique sur F_j (d'après $Q.7.b$).
De même, on montre en utilisant $Q.21$,$Q.7.b$ et $Q.20$ que $\omega_{1/F_j \times F_j}$ est symplectique sur F_j.

23. Par théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de χ_u annule u. On sait que χ_u s'écrit sous la forme $\chi_u = P_1 ... P_r$ avec $P_1, ..., P_r$ sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$, en effet, chaque P_i est sous l'une des formes suivantes :

- $(X-\lambda)^{m(\lambda)}(X-\overline{\lambda})^{m(\lambda)} = (X^2 - 2Re(\lambda_i)X + |\lambda_i|^2)^{m(\lambda)}$ où λ est une valeur propre non réelle de u et $m(\lambda) = 1$ ou 2.
- $(X-\alpha)^{m(\alpha)}$ où α est une valeur propre réelle de u et $m(\alpha) = 1$ ou 2.

On conserve les notations précédentes. Un sous-espace F_i est de dimension 2 ou 4 s'il s'agit de premier type ou de dimension 1 ou 2 s'il est sous-espace propre associé à un réel; Pour déduire ce qu'on cherche en utilisant les questions précédentes, il suffit de vérifier que le cas où $dim F_i = 1$ est impossible, et c'est vraiment le cas, car la question $Q.22$ permet de dire que la restriction de ω sur $F_i \times F_i$ est symplectique sur F_i, ce qui entraîne que la dimension de F_i est paire donc $\forall i$, $dim F_i = 2$ ou 4.

On en conclut que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ avec $\forall i = 1, ..., r$, $dim F_i = 2$ ou 4, les F_i sont deux à deux orthogonaux par ω et ω_1, avec les restrictions de $\omega_{/F_i \times F_i}$ et $\omega_{1/F_i \times F_i}$ sont symplectiques.

Partie IV : Structures complexes domptées simultanément

24. Commençons par démontrer l'indication :

Soient $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul. On a : ${}^tX R_\alpha X = (a^2+b^2)\cos(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Il existe $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\theta+\varphi) > 0$, car sinon, on aura, par négation et continuité de cosinus :

$$\forall \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ , \ \cos(\theta+\varphi) \leq 0$$

ce qui implique que $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ (puisque la fonction cosinus garde un signe constant sur un intervalle de longueur maximale π qui est atteinte lorsque les extrémités

sont dans $\pi\mathbb{Z}$.
On a donc l'existence de $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\theta+\varphi) > 0$, donc il vérifie :

$$^{t}XR_{\varphi}X = (a^2+b^2)\cos(\varphi) > 0 \quad , \quad {}^{t}XR_{\theta+\varphi}X = (a^2+b^2)\cos(\theta+\varphi) > 0$$

Revenons à la question :
D'après $Q.23$, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ avec $\forall i = 1, ..., r$, $dimF_i = 2$ ou 4, les F_i sont deux à deux orthogonaux par ω et ω_1, avec les restrictions de $\omega_{/F_i\times F_i}$ et $\omega_{1/F_i\times F_i}$ sont symplectiques.
Soit $i \in \{1, ..., r\}$. On pose $\omega_i = \omega_{/F_i\times F_i}$ et $\omega_i^1 = \omega_{1/F_i\times F_i}$.
Si $dimF_i = 4$, alors, il existe une base B_i de F_i telle que :

$$Mat_{B_i}(\omega_i) = J_4 \text{ et } N_i := Mat_{B_i}(\omega_i^1) = r_i \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta_i} \\ R_{\theta_i} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ d'après } \; Q.19)$$

avec $\theta_i \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et $r_i > 0$. Pour ce réel θ_i, il existe $\varphi_i \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \; , \; {}^{t}XR_{\varphi_i}X > 0 \; , \; {}^{t}XR_{\theta_i+\varphi_i}X > 0$$

On considère $M_i = \begin{pmatrix} 0 & R_{\varphi_i} \\ -R_{-\varphi_i} & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que

$$M_i^2 = -I_4 \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathbb{R}^4\setminus\{0\} \; , \; {}^{t}XJ_4M_iX > 0 \; , \; {}^{t}XN_iM_iX > 0$$

Si $dimF_i = 2$, alors $A(F_i) = 1$ $\quad$ $(Q.3.c)$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$, $\omega_i = a\omega_i^1$. Ce réel a est non nul car ω_i est symplectique sur F_i. On montre qu'il est strictement positif. Si $a < 0$, on pose : $t = \frac{1}{1-a} \in]0,1[$, $\omega_t = (1-t)\omega + t\omega_1$ (qui est symplectique sur E par hypothèse), donc sa restriction sur $F_i \times F_i$ l'est aussi (voir $Q.8$), mais $\omega_{t/F_i\times F_i} = (1-t)\omega_i + t\omega_i^1 = (1-t+ta)\omega_i = 0$, ce qui est absurde.
Soient B_i une base de F_i sur la quelle les matrice de ω_i et ω_i^1 sont respectivement J_2 et $N_i = aJ_2$ et $J \in L(F_i)$ tel que $M_i := Mat_{B_i}(J) = -J_2$. On a bien :

$$M_i^2 = -I_2 \; , \; \forall X \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \; , \; {}^{t}XJ_2M_iX = {}^{t}XX > 0 \text{ et } {}^{t}X(aJ_2)M_iX = a\,{}^{t}XX > 0$$

On démontré que pour tout $i = 1, ..., r$ il existe $M_i \in M_{d_i}(\mathbb{R})$ où $d_i = dim(F_i)$ vérifiant :

$$M_i^2 = -I_{d_i} \; , \; \forall X \in \mathbb{R}^{d_i}\setminus\{0\} \; , \; {}^{t}XJ_{d_i}M_iX > 0 \text{ et } {}^{t}XN_iM_iX > 0$$

Posons $M = diag(M_1, ..., M_r)$ et $B = B_1 \cup ... \cup B_r$ (base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$), et considérons l'endomorphisme J' de E dont la matrice dans B est M. On vérifie matriciellement que $J'^2 = -Id_E$ et que

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \ , \ \omega(x, J'(x)) > 0 \ , \ \omega_1(x, J'(x)) > 0$$

25. Pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$, de polynôme caractéristique $P = \chi_M(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on sait que chaque coefficient a_k s'obtient comme somme des produit des $m_{i,j}$.

Puisque $P' = nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1}$, $P'' = n(n-1)X^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) a_k X^{k-2}$, alors :

$$\begin{aligned} r(P') &= \det(L_{P',P''}) \\ &= \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & n(n-1) & 0 & \cdots & 0 \\ (n-1)a_{n-1} & n & \ddots & \vdots & (n-1)(n-2)a_{n-1} & n(n-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & (n-1)a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 2a_2 & \vdots & \ddots & n & 2a_2 & & \ddots & n(n-1) \\ a_1 & & & (n-1)a_{n-1} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_1 & 2a_2 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 2a_2 \end{vmatrix} \\ &= f[(m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}] \end{aligned}$$

où f est polynomiale à n^2 variables, non nulle (car $f[diag(1, 2, ..., n)] \neq 0$).

On pose :

$\Sigma = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \ , \ J_n M = {}^t M J_n\}$, $\Gamma = \{M \in \Sigma \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} \ , \ (X - \lambda)^3 \text{ divise } \chi_M\}$

D'après la question $Q.12$, l'ensemble Γ est d'intérieur vide, ce qui entraîne la densité de son complèmentaire

$$\Sigma' = \{M \in \Sigma \mid \chi_M \text{ est à racines au plus doubles dans } \mathbb{C}\}$$

dans Σ. D'où le résultat cherché.

26. • Montrons que $(\mathcal{F}_1) \Longrightarrow (\mathcal{F}_2)$:

Soit $J \in L(E)$ tel que : $J^2 = -Id_E$ et $\forall x \in E\backslash\{0\}$, $\omega(x, J(x)) > 0$ et $\omega_1(x, J(x)) > 0$.
Soit $\theta \in]0,1[$. On pose $\omega_2 = (1-\theta)\omega + \theta\omega_1$. On a bien ω_2 est bilinéaire et antisymétrique, on vérifie qu'elle est symplectique.
Soient $x \in E \setminus \{0\}$ et $y = J(x)$. On a :

$$\omega_2(x, y) = (1-\theta)\omega(x, y) + \theta\omega_1(x, y) > 0$$

donc $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\omega_2(x, .) \neq 0_{E^*}$, d'où φ_{ω_2} est un isomorphisme de E vers E^*, par suite ω_2 est symplectique sur E.

• Montrons que $(\mathcal{F}_2) \Longrightarrow (\mathcal{F}_1)$:

Soit u l'endomorphisme défini en $Q.13$. Par densité, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N} \ , \ \chi_{u_k} \text{ est à racines au plus doubles dans } \mathbb{C}$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on pose $\omega_{1,k}(x, y) = \omega(u_k(x), y)$. Par $Q.24$, il existe $J_{1,k} \in L(E)$, vérifiant :

$$J_{1,k}^2 = -Id_E \quad , \quad \forall x \in E \setminus \{0\} \ , \ \omega(x, J_{1,k}(x)) > 0 \text{ et } \omega_{1,k}(x, J_{1,k}(x)) > 0$$

La suite $(J_{1,k})_k$ est bien bornée donc elle admet une suite extraite $(J_{1,k_p})_p$ qui converge vers $J \in L(E)$.
On a : $J^2 = \lim\limits_{p\to+\infty} J_{1,k_p}^2 = -Id_E$ (par continuité de $M \mapsto M^2$: composantes polynomiales).
Soit $x \in E$ non nul. Par continuité de $\omega(x, .)$ (linéaire , $dim(E) < +\infty$), on a :

$$\omega(x, J(x)) = \lim_{p\to+\infty} \omega(x, J_{1,k_p}(x)) \geq 0$$

Si $\omega(x, J(x)) = 0$, on vérifie facilement que $(x, J(x))$ est libre, puis on trouve que la restriction de ω sur le sous espace $vect(x, J(x))$ est nulle, ce qui est absurde. D'où $\omega(x, J(x)) > 0$.
En utilisant l'égalité $\omega_{1,k_p}(x, J_{1,k_p}(x)) = \omega(u_{k_p}(x), J_{1,k_p}(x))$ et la continuité de la forme bilinéaire ω, on obtient par passage à la limite lorsque $p \to +\infty$, que $\omega_1(x, J(x)) = \omega(u(x), J(x)) \geq 0$, puis que ce réel est non nul car ω_1 est symplectique et $(x, J(x))$ est libre. Ceci pour tout $x \in E$ non nul , d'où la propriété $\mathcal{F}_1$.

• On en conclut que deux propriétés $(\mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{F}_2)$ sont équivalentes.

Pour vos remarques , merci de me contacter sur
taoufiki–maths@hotmail.fr