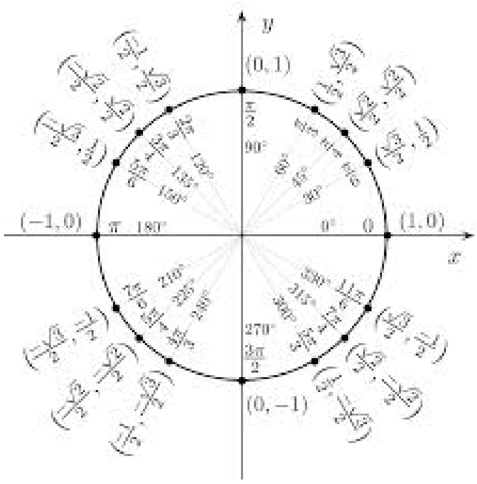


Cours de Mathématiques MP*

Denis FAVENNEC

Transcrit par Benjamin DUFOUR–JULES

Année scolaire 2014-2015

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre générale

Sommaire

1.1 Relation d'équivalence

1.1.1 Définitions

Relations binaires

Une relation binaire sur un ensemble E est une partie de E^2

Relations d'équivalences

Ce sont des relations binaires qui vérifient :

1. réflexivité : $\forall x \in, x\mathcal{R}x$
2. symétrique : $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
3. transitivité : $\forall (x,y,z) \in E^3, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Deux éléments sont en relation si et seulement si ils ont une valeur commune

Exemples

1. L'égalité
2. Les classes d'un lycée, tranches d'imposition
3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application :
$$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Congruences

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:
$$x \equiv y[n] \Leftrightarrow n \mid x - y$$

Relation caractéristique d'un groupe

Soit G un groupe et H un sous groupe de G, on définit la relation $\mathcal{R}$:
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

1. $x^{-1}x = e \in H : x\mathcal{R}x$
2. $x^{-1}y \in H \Leftrightarrow (yx^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ donc, $xRy \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
3. xRy et $yRz \Rightarrow (x^{-1}y, y^{-1}z) \in H \Rightarrow x^{-1}(yy^{-1})z \in H \Rightarrow x^{-1}z \in H$

1.1.2 Classes d'équivalences, ensemble quotient

Définition

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soit $x \in E$, on définit la classe de x :

$$\bar{x} = Cl(x) = \{y \in E/y\mathcal{R}x\}$$

Théorème

2 classes distinctes sont soient égales soient disjointes :

$$\forall (x,y) \in E^2, \bar{x} = \bar{y} \text{ ou } \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$$

Ensemble quotient

L'ensemble des classes d'équivalences s'appelle l'ensemble quotient, noté :

$$\frac{E}{\mathcal{R}}$$

Remarque : on peut définir une relation d'équivalence sur chaque partition

Étude de cas particulier

Soit $n \in \mathbb{N}*$, on note l'ensemble quotient de la relation congruences modulo n sur $\mathbb{Z}$ est noté :

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

On note $card(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}) = n$

Preuve : $n_0 \in \mathbb{Z}$, par division euclidienne :

$\exists!(q,r) \in \mathbb{Z} \times [| \ 0; n-1 \ |]/n_0 = qn + r \Rightarrow n_0 \in \bar{r}$

$r, r' \in [| \ 0; n-1 \ |], \bar{r} = \bar{r'} \Rightarrow r = \bar{r'}$

Théorème de Lagrange (HP)

Soit $(G, \cdot)$ et H un sous-groupe de G, G fini et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur G :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow \exists h \in H, x^{-1}y = h \Leftrightarrow \exists h \in H, y = xh$$

Il vient : $\bar{x} = \{xh/h \in H\} = xH$

Or : $\begin{array}{ccccc} \varphi & : & H & \to & xH \\ & & x & \mapsto & xh \end{array}$

est surjective et par définition de xH est injective car x est inversible.
On a donc : $card(xH) = card(\frac{G}{\mathcal{R}})card(H)$

> Il vient le corollaire suivant : si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G, alors :
>
> $$card(H) \mid card(G)$$
>
> Par conséquent un groupe de cardinal premier admet deux sous-groupe : e et lui même

1.1.3 Relation compatible avec une loi

Soit (E,*) un magma et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On souhaite définir une loi * sur $\frac{E}{R}$ telle que :

$$\bar{x} * \bar{y} = x \bar{*} y$$

Pour ce faire il faut que si $\bar{x} = \bar{x'}$ et $\bar{y} = \bar{y'}$ alors $\overline{x * y} = \overline{x' * y'}$, il y a indépendance du représentant choisit

Définition

> On dit que * est compatible avec R si et seulement si :
>
> $$\forall (x, x', y, y') \in E^4, x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{R}y' \Rightarrow x * y\mathcal{R}x' * y'$$
>
> Dans ce cas on peut définir la loi quotient sur $\frac{E}{R}$: $\bar{x} * \bar{y} = \overline{x * y}$

Théorème

> Si * possède un neutre e alors la loi quotient a pour neutre $\bar{e}$
>
> Si x est associative (resp. commutative) alors la loi quotient l'est aussi
>
> Si x est inversible pour * alors $\overline{x^{-1}} = \bar{x}^{-1}$
>
> Si (E,*) est un groupe alors ($\frac{E}{\mathcal{R}}$,*) l'est aussi

Cas de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

On peut munir $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ d'une loi de groupe notée $+$ pour :

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$
$$\bar{0} \text{ est le neutre}$$
$$-\bar{x} = \overline{-x} = \overline{n - x}$$

Exemple :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

1.2 Structure de groupes

1.2.1 Morphismes de groupes

Définition

Soient $(G, \cdot)$ et $(G', *)$ deux groupes. On dit qu'une application φ de G dans G' est un (homo)morphisme de groupe si :

$$\forall (x,y) \in G^2, \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

Dans ce cas : $\varphi(e) = e'$ et $\forall x \in G, \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

Preuve : $\varphi(e \cdot e) = \varphi(e)$ et $\varphi(e \cdot e) = \varphi(e)^2 \Rightarrow \varphi(e) = e'$
$\varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(x^{-1})$ et $\varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e) = e' \Rightarrow \varphi(x) * \varphi(x^{-1}) = e' \Rightarrow \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

Exemples

1. $x \in G$ et $\begin{array}{cccc} \varphi & : & (\mathbb{Z},+) & \to & (G,\cdot) \\ & & n & \mapsto & x^n \end{array}$
   $\varphi(n_1+n_2) = x^{n_1+n_2} = x^{n_1} \cdot x^{n_2} = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2)$
2. $\begin{array}{cccc} \ln & : & (\mathbb{R}_+^*,\times) & \to & (\mathbb{R},+) \\ & & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$
   $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
3. $\begin{array}{cccc} \varphi & : & (\mathbb{R}_+^*,+) & \to & (\mathbb{C}^*,\times) \\ & & \theta & \mapsto & exp(i\theta) \end{array}$
4. L'identité est un morphisme de groupe
5. Le morphisme trivial qui envoie tous les éléments sur le neutre est un morphisme de groupe

Isomorphismes

Ce sont des morphismes bijectifs de $(G, \cdot)$ dans $(G', *)$. Dans ce cas l'application réciproque est aussi un morphisme de groupes. On dit que G et G' sont isomorphes, un isomorphisme transporte fidèlement la structure de G sur celle de G', ils ont les mêmes propriétés

Preuve :

$\forall (x', y') \in G'^2, f(f^{-1}(x' * y')) = x' * y' = f(f^{-1}x') * f(f^{-1}y') = f(f^{-1}(x') * f^{-1}(y'))$
f étant bijective : $f^{-1}(x' * y') = f^{-1}(x') * f^{-1}(y')$

Exemples

1. $\ln : (\mathbb{R}_+^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ est bijectif, c'est un isomorphisme de groupe
2. Sa réciproque $\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est aussi un isomorphisme de groupe
3. Soit $\{e; a; b\}$ un groupe a 3 éléments, montrons que si $(G, \cdot)$ est un groupe , $\forall g \in G$ $\begin{array}{cccc} \tau & : & G & \rightarrow & G \\ & & x & \mapsto & gx \end{array}$ est bijective. Dans une table de groupe, chaque élément apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et chaque colonne :

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

est la seule loi possible, tout les groupes à 3 éléments sont isomorphes à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

Image et Image réciproque d'un morphisme

Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe

1. Soit H un sous-groupe de G alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'
2. Soit H' un sous-groupe de G' alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G
3. Lorsque H=G, $f(G)$ est un sous-groupe de G' appelé image de f noté $Im(f)$:
$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow Im(f) = G'$$
4. Lorsque $H' = \{e\}, f^{-1}(\{e\}) = \{x \in G / f(x) = e'\}$ est un sous-groupe de G, appelé noyau de f, noté $Ker(f)$.
$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow Ker(f) = \{e\}$$

Preuve :

1. $e \in H \Rightarrow e' = f(e) \in H$
Soit $(x', y') \in f(H)^2 : \exists (x, y) \in H^2$,
$$\begin{array}{rcl} x' & = & f(x) \\ y' & = & f(y) \end{array}$$
$x' \cdot (y')^{-1} = f(x) * f(y)^{-1} = f(x) * f(y^{-1}) = f(x \cdot y^{-1}) \in f(H)$
$$f(H) \text{ est un sous-groupe de G'}$$
2. $f(e) = e' \in H' \Rightarrow e \in f^{-1}(H')$, soit $(x, y) \in f^{-1}(H')^2, f(xy^{-1}) = f(x) * f(y)^{-1} \in H'$
$$f^{-1}(H') \text{ est un sous-groupe de G}$$
3. Si f est injective : $x \in Ker(f) \Rightarrow f(x) = e' \Rightarrow f(x) = f(e) \Rightarrow x = e$
$$Ker(f) = \{e\}$$
Si $Ker(f) = \{e\}$: $(x, y) \in G^2$
$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(y) & \Leftrightarrow & f(x)f(y)^{-1} = e \\ & \Leftrightarrow & f(xy^{-1}) = e \\ & \Leftrightarrow & xy^{-1} = e \\ & \Leftrightarrow & x = y \end{array}$$
$$f \text{ est injective}$$

Remarque

Si f est un morphisme de groupes quelconque. Soit $(x_1, x_2) \in G^2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in Ker(f) \Leftrightarrow x_1^{-1} x_2 \in Ker(f)$$

Si la loi de G est notée $+$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Ker(f) \Leftrightarrow x_2 = x_1 + Ker(f)$$

Décomposition canonique d'un morphisme (HP)

Soit $f : (G, \cdot) \longrightarrow (G', *)$ est un morphisme de groupes. La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur G par :

$$\forall (x, y) \in G^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow xy^{-1} \in Ker(f)$$

Cette relation d'équivalence est compatible avec la loi $\cdot$. On peut alors munir l'ensemble quotient, noté $\frac{G}{Ker(f)}$ d'une structure de groupe. De plus, l'application

$$\begin{array}{cccc} \overline{f} & : & \frac{G}{Ker(f)} & \to & Im(f) \\ & & \overline{x} & \mapsto & \overline{f}(\overline{x}) = f(x) \end{array}$$

est bien définie et est un isomorphisme de $\frac{G}{Ker(f)}$ sur $Im(f)$

Preuve : soit $(x, x', y, y') \in G^4 x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$ on a : $xy\mathcal{R}x'y'$
Soit $(x, x') \in G^2$, telle que $\overline{x} = \overline{x'}$ alors $f(x) = f(x')$, on peut donc définir :

$$\overline{f}(\overline{x}) = f(x) \text{ indépendamment du représentant choisi}$$

De plus soit $(x, y) \in G^2$:

$$\overline{f}(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \overline{f}(\overline{x \cdot y}) = f(x \cdot y) = f(x) * f(y) = \overline{f}(\overline{x}) * \overline{f}(\overline{y})$$

$$\overline{f} \text{ est un morphisme de } \frac{G}{Ker(f)} \text{ dans } Im(f)$$

$\overline{f}$ est surjective, car on réduit l'ensemble d'arrivée à l'ensemble des images

$\overline{f}$ est injective car :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in G, \overline{x} \in Ker(\overline{f}) & \Leftrightarrow & \overline{f}(\overline{x}) = e' \\ & \Leftrightarrow & f(x) = e' \\ & \Leftrightarrow & x \in Ker(f) = \overline{e} \\ & \Leftrightarrow & \overline{x} = \overline{e} \end{array}$$

$$Ker(\overline{f}) = \{e\}$$

1.2.2 Sous-groupes, groupes engendrés par une partie

Définition

Soit (G, $\cdot$) un groupe, une partie H de G est un sous-groupe si et seulement si :

1. $H \subset G$
2. $e \in H$
3. $\forall (x, y) \in H^2, xy^{-1} \in H$

Alors H est un groupe. De plus toute intersection de sous-groupe de G est un sous-groupe de G

⚠Soit H_1, H_2 deux sous-groupes de G, tel que $H_1 \not\subseteq H_2$ et $H_2 \not\subseteq H_1$. Soit alors $x \in H_1 \setminus H_2$ et $y \in H_2 \setminus H_1$.
Si $H_1 \cup H_2$ était un sous-groupe de G, on aurait :

$$\begin{aligned} xy \in H_1 \cup H_2 &\Rightarrow xy \in H_1, xy \in H_2 \\ &\Rightarrow x = (xy)y^{-1} \in H_2 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde

Sous-groupe engendré

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, $\mathcal{A}$ une partie quelconque de G. On appelle sous-groupe engendré par $\mathcal{A}$ et on notre $gr(\mathcal{A})$, l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant $\mathcal{A}$, on a :

$gr(\mathcal{A})$ est un sous-groupe de G, contenant $\mathcal{A}$
Tout sous-groupe de G contenant $\mathcal{A}$ contient $gr(\mathcal{A})$

Cette propriété caractérise $gr(\mathcal{A})$, le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de G contenant $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est génératrice de G si et seulement si $gr(\mathcal{A}) = G$

Exemples

1. $gr(\varnothing) = \{e\}$, intersection de tous les sous-groupes de G
2. $\mathcal{A}$ est un sous-groupe de de G $\Leftrightarrow gr(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$
3. Soit $x \in G$, $gr(\mathcal{A}) = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}$
   Preuve : $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{Z} & \rightarrow & G \\ & & n & \mapsto & x^n \end{array}$ est un morphisme de groupe
   $\{x^n / n \in \mathbb{Z}\} = Im(f)$ est un sous-groupe de G, il contient x.
   Soit H un sous-groupe de G contenant x, la loi $\cdot$ étant interne alors $\forall n \in \mathbb{Z}, x^n \in H$ donc $\{x^n / n \in \mathbb{Z}\} \subset H$, d'où :
   $$gr(\mathcal{A}) = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}$$

Remarque

Généralement on vérifie que :

$$gr(\mathcal{A}) = \{a_1^{\varepsilon_1} ... a_n^{\varepsilon_n} / n \in \mathbb{N}, (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n, \varepsilon_k \in \{-1; 1\}$$

Dans σ_n, l'ensemble des transpositions est générateur
Dans le groupe des isométries du plan, l'ensemble des symétries orthogonales par rapport à une droite est générateur

1.2.3 Groupes monogènes, groupes cycliques

Définitions

Un groupe monogène est engendré par un seul élément :

$$G = \{x^n/n \in \mathbb{Z}\} \text{ ou } \{nx/n \in \mathbb{Z}\}$$

Un groupe cyclique est monogène et fini

Exemples

1. $(\mathbb{Z}, +) = gr\{1\}$ est monogène
2. $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +) = gr\{1\}$ est cyclique
3. Tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène. En effet, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ alors $H = n\mathbb{Z} = gr\{n\}$

Théorème de structure

Soit $G = gr\{x\}$ un groupe monogène,l'application : $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{Z} & \to & G \\ & & n & \mapsto & x^n \end{array}$ est un morphisme de groupe injectif.
$Ker(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}, \exists! n \in \mathbb{N}, Ker(f) = n\mathbb{Z}$
Si n=0 alors $Ker(f) = \{0\}$, f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, \cdot)$ infini
Si n >0 alors $\begin{array}{cccc} \overline{\varphi} & : & \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} & \to & G \\ & & \overline{k} & \mapsto & x^k \end{array}$ alors card(G) = card($\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$) = n. On définit un isomorphisme de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ dans G

Preuve : n=0 , $Ker(f) = \{0\}$ et f est bijective : c'est un isomorphisme
n>0 : $\overline{f}$ est bien définie, car si $\overline{k} = \overline{k'}$ alors $n \mid k - k' \Rightarrow k - k' \in n\mathbb{Z} = Ker(f))$
Par conséquent $f(k - k') = e = x^{k-k'} \Rightarrow x^k = x^{k'}$
Par construction $\overline{f}$ est surjective et c'est un morphisme car :

$$\begin{aligned} \forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2, \overline{f}(\overline{k} + \overline{k'}) &= \overline{f}(\overline{k + k'}) \\ &= f(k + k') \\ &= \overline{f}(\overline{k}) \cdot \overline{f}(\overline{k'}) \end{aligned}$$

Enfin, $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = e \Leftrightarrow \overline{f}(\overline{k}) = e \Leftrightarrow \overline{k} = \bar{0}$

$$\overline{f} \text{ est bijective}$$

Exemples

Soit $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in [|0; n-1|]\} = gr\{e^{\frac{2i\pi}{n}}\}$ C'est un groupe monogène fini, il est cyclique. On peut définir le morphisme :

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} & \rightarrow & \mathbb{U}_n \\ & & \overline{k} & \mapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array}$$

Ordre d'un élément

1. Soit G un groupe et $x \in G$, si $gr\{x\}$ est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que x est d'ordre fini n, noté : $\omega(x) = n$, cette notation n'est pas universelle
2. Par définition $x = min\{k \in \mathbb{N}^* / x^k = e\}$. n est caractérisé par : $Ker(f) = n\mathbb{Z}$, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, x^k = e \Leftrightarrow n | k$$

Exemples

1. $\omega(e) = 1$, e est le seul élément d'ordre 1
2. $\omega((i,j)) = 2$ car $(i,j)^2 = id$. En effet l'ordre divise 2 mais n'est pas 1 car ce n'est pas l'identité
3. Il en découle que l'ordre d'un p-cycle est p
4. Dans $(\mathcal{O}, \circ)$ une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite est d'ordre 2
5. Soit $\theta \in \mathbb{R} / \frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. On considère $\mathcal{R}_\theta$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (\theta)^n = \mathcal{R}_{n\theta} = id \Leftrightarrow n \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$$

Ce qui est absurde, donc cette rotation n'est pas d'ordre fini

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$, on recherche l'ordre de $\overline{m}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{rcl} k \in \mathbb{Z}, k\overline{m} = \bar{0} & \Leftrightarrow & \overline{km} = \bar{0} \\ & \Leftrightarrow & n | km \\ & \Leftrightarrow & n_1(n \wedge m) | km_1(n \wedge m), \ n_1 \wedge m_1 = 1 \\ & \Leftrightarrow & n_1 | km_1, \ \wedge m_1 = 1 \end{array}$$

D'après le théorème de Gauss : $n_1 | k$, ainsi :

$$\omega(\overline{m}) = n_1 = \frac{n}{n \wedge m}$$

Il vient pour n=6 :

$$\begin{array}{c} gr\{\bar{0}\} = \bar{0} \\ gr\{\bar{1}\} = \bar{1} \\ gr\{\bar{2}\} = \{\bar{0}; \bar{2}; \bar{4}\} \\ gr\{\bar{3}\} = \{\bar{0}; \bar{3}\} \\ gr\{\bar{4}\} = \{\bar{0}; \bar{4}; \bar{2}\} \\ gr\{\bar{5}\} = \{\bar{0}; \bar{5}; \bar{4}; \bar{3}; \bar{2}; \bar{1}\} = \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \end{array}$$

7. (ENS) Soit G un groupe abélien fini, on définit l'exposant de G, $m = \bigvee_{x \in G} \omega(x)$
   $\forall x \in G, \omega(x)|m$ donc $x^m = e$. Montrer que :

$$\exists x_0 \in G/\omega(x) = m$$

Indication : on pourra considérer la décomposition en produit de facteurs premiers de m. Définissons tout d'abord la valuation p-adique : $\nu_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de m :

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(n)}$$

On observe les propriétés suivantes :

$$a|b \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}, \nu_p(a) \leq \nu_p(b)$$
$$\nu_p(a \wedge b) = min(\nu_p(a), \nu_p(b))$$
$$\nu_p(a \vee b) = max(\nu_p(a), \nu_p(b))$$

donc, $\nu_p(m) = max_{x \in G}(\nu_{p_i}(\omega(x)))$
$\exists y_i \in G/\nu_{p_i}(\omega(y_i)) = \alpha_i$ et $\exists k_i \in \mathbb{N}/\omega(k_i) = p_i^{\alpha_i} k_i$
Posons : $x_i = y_i^{k_i}$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}, x_i^n = e &\Leftrightarrow y_i^{nk_i} = e \\ &\Leftrightarrow p_i^{\alpha_i} k_i | nk_i \\ &\Leftrightarrow p_i^{\alpha_i} | n \end{aligned}$$

Par conséquent $\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}$. Soit $x = x_1 ... x_r$:

$$\begin{aligned} n \in x^n = e &\Rightarrow x_1^n ... x_r^n = e \\ &\Rightarrow x_1^{np_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}} (x_2^n ... x_r^n)^{p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}} = e \\ &\Rightarrow x_1^{np_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}} = e \\ &\Rightarrow p_1^{\alpha_i} | np_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} \\ &\Rightarrow p_1^{\alpha_i} | n, \text{théorème de Gauss} \end{aligned}$$

De même pour les autres facteurs, d'où :

$$m = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r} | n$$

Si m|n alors $x^n = e$ car $x^m = e$ donc $\omega(x) = m$. Ce résultats devient faux si G n'est pas abélien, par exemple : σ_3

Théorème

Soit G un groupe fini de cardinal n non nul et $x \in G$:

1. $\omega(x)|n$
2. $x^n = e$

Preuve :

1. Découle du théorème de Lagrange
2. $\omega(x)|n \Rightarrow x^n = e$
   Dans le cas où G est abélien on peut considérer :
   Soit $x_0 \in G$ l'application : $\tau_{x_0} : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ \overline{x} & \mapsto & x_0 x \end{array}$ est bijective :

$$a = \prod_{x \in G} x_0 x = x_0^n \prod_{x \in G} x$$

$$x_0^n = e$$

Exemple

Soit $(\mathbb{U}, \times)$ et G un sous-groupe fini de cardinal n :

$$x^n = 1 \text{ et } card(G) = n \Rightarrow G \subset \mathbb{U}_n \Rightarrow G = \mathbb{U}_n$$

En outre,les sous-groupes de $\mathbb{U}_n$, H sont des sous-groupes de $\mathbb{U}$ fini :

$$\exists d \in \mathbb{N}^*, H = \mathbb{U}_d$$

$$d|n \text{ d'après le théorème de Lagrange}$$

Les sou-groupes de $\mathbb{U}_n$ sont donc cyclique de cardinal d|n . Tout groupe cyclique a n éléments est isomorphe à $\mathbb{U}_n$: les sous-groupes d'un groupe cyclique sont cycliques.

$\forall d/d|n, \exists!$ un unique sous-groupe de cardinal ("ordre") d dans un groupe cyclique à n éléments

Dans $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ l'unique sous-groupe à d éléments est :

$$gr\{\overline{\tfrac{n}{d}}\}$$

Théorème

1. Soit x un élément d'ordre fini nm alors :

$$\omega(x^n) = m$$

2. Soit $f : G \mapsto G'$ un morphisme de groupes, on a :

$$\forall x \in G, \omega(f(x))|\omega(x)$$

   Si de plus f est injective alors $\omega(f(x)) = \omega(x)$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned} \text{Soit} k \in \mathbb{Z}, (x^n)^k &\Leftrightarrow x^{nk} = e \\ &\Leftrightarrow nm|nk \\ &\Leftrightarrow m|k \end{aligned}$$

$$\omega(x^n) = m$$

2. $f(x^{\omega(x)}) = e' \Leftrightarrow f(x)^{\omega(x)}|e \Leftrightarrow \omega(f(x))|\omega(x)$
   Si f est injective :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, f(x)^k = e' &= f(x^k) = e' \\ &= x^k = e \\ &= \omega(x)|k \end{aligned}$$

$$\omega(f(x)) = \omega(x)$$

Exemple

Combien y a-t-il de morphismes de $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}}$?
Soit f un tel morphisme : il est entièrement déterminé par $\bar{1}$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(\bar{k}) = kf(\bar{1})$$

$f(\bar{1}) \in \frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}} \Rightarrow \omega(f(\bar{1}))|14$ et $\omega(f(\bar{1}))|\omega(\bar{1}) = 6$ Il vient :

$$\begin{gathered} \omega(f(\bar{1})) = 1 \Rightarrow f \text{ est le morphisme trivial} \\ \omega(f(\bar{1})) = 2 \Rightarrow f(\bar{1}) = \tilde{7} \\ f(\bar{k}) = \tilde{7k} \end{gathered}$$

1.2.4 Groupe produit

Définition

Soit $(G_i)_{i\in[|1;n|]}$ une famille de groupe. On définit une loi produit sur $G_1 \times ... \times G_n$:

$$\begin{gathered} \forall((x_1;...;x_n),(y_1;...;y_n)) \in (G_1 \times ... \times G_n)^2 \\ (x_1;...;x_n)\cdot(y_1;...;y_n) = (x_1y_1;...;x_ny_n) \end{gathered}$$

Théorème

Muni de cette loi, $G_1 \times ... \times G_n$ est un groupe, dit groupe produit.
Son neutre est : $(e_1;...;e_n)$ et on a : $(x_1;...;x_n)^{-1} = (x_1^{-1};...;x_n^{-1})$.
De plus si chacun des groupes G_i est abélien, alors le groupe produit l'est aussi.

Groupe de Klein

$K = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

C'est un groupe de cardinal 4 non isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, tel que chaque élément a son propre inverse. C'est le groupe qui laisse invariant la molécule d'éthylène.

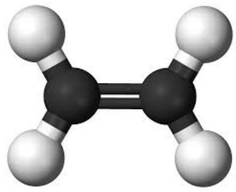


FIGURE 1.1 – Molécule d'éthylène

1.2.5 Groupes de cardinal premier

Soit $p \in \mathbb{P}$, où $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Tout groupe de cardinal p est cyclique et isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

Preuve : $x \in G \setminus \{e\}, \omega(x) \neq 1$ et $\omega(x)|p$, donc :

$$\omega(x) = p$$
$$G = gr\{x\}$$

1.2.6 Groupe symétrique

Définition

Pour $n \geq 2$, on note $(\sigma_n, \circ)$ le groupe symétrique, l'ensemble des permutations de $[|1;n|]$. Il est non commutatif dès que $n \geq 3$.
Soit $\sigma \in \sigma_n$ et $l \in [|1;n|]$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sigma^k(l) \in [|1;n|]$$
$$\exists i < j \in [|1;n|]^2 / \sigma^i(l) = \sigma^j(l)$$
$$\text{d'où, } \sigma^{j-i}(l) = l, j - i \in [|1;n|]$$

On peut donc considérer $m = \min\{k \in \mathbb{N}^* / \sigma^k(l) = l\}$. Alors $\{l; \sigma(l); ...; \sigma^{m-1}(l)\}$ sont distincts et $\sigma^m(l)$ est appelé l'orbite de σ .

Orbites sur σ

Les orbites sur σ sont les classes d'équivalence de la relation définie sur $[|1;n|]$ par :

$$i\mathcal{R}j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / j = \sigma^k(i)$$

Exemple

Soit pour $\sigma \in \sigma_{10}$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 9 & 10 & 8 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Il vient :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

On en déduit les orbites :

$$\{1; 5; 9\}; \{2; 6; 10\}; \{3; 7; 8\}; \{4\}$$

Théorème

Pour chaque orbite de cardinal m, σ agit comme un cycle de longueur m. Rappelons qu'on note $(a_1; ...; a_m)$ le cycle tel que :

$(a_1; ...; a_m)(a_i) = a_{i+1}$ si $1 \leq i \leq m-1$
$(a_1; ...; a_m)(a_m) = a_1$
$\forall k \notin \{a_1; ...; a_n\}, (a_1; ...; a_m)(k) = k$

Propriétés

1. Toute permutation peut se décomposer de manière unique à l'ordre des facteurs près en un produit de cycles à support disjoints
2. $(a_1; ...; a_m) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ ... \circ \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_m \end{pmatrix}$
3. Soit $\sigma \in \sigma_n$, $\sigma \circ (a_1; ...; a_m) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1); ...; \sigma(a_m))$, cette opération est la conjugaison
4. Deux m-cycles sont conjugués dans σ_n

Preuve :

1. découle du théorème des orbites
2. $\forall i \in [|1; n-1|], \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ ... \circ \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_m \end{pmatrix} (a_i) = a_{i+1}$
   $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ ... \circ \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_m \end{pmatrix} (a_m) = a_1$
   $\forall k \notin \{a_1; ...; a_m\}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ ... \circ \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_m \end{pmatrix} (k) = k$
3. $\sigma \circ (a_1; ...; a_m) \circ \sigma^{-1}(\sigma(a_i)) = \sigma \circ (a_1; ...; a_m)(a_i) = \sigma(a_{i+1})$
   $$\sigma \circ (a_1; ...; a_m) \circ \sigma^{-1}(\sigma(a_m)) = \sigma(a_1)$$
   $\sigma \circ (a_1; ...; a_m) \circ \sigma^{-1}(k) = k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{a_1; ...; a_m\}$
4. $\sigma \circ (a_1; ...; a_m) \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & ... & \sigma(a_m) \end{pmatrix}$, il suffit de choisir σ telle que : $\sigma(a_i) = \sigma(b_i)$

Remarques

1. Pour $i \in [|1; n|], \sigma = [i+1, i+2] = \sigma^{-1}$. Il vient que l'on peut écrire toute transposition comme produit de transpositions de la forme $[k, k+1]$
2. L'ordre d'une permutation est le PPCM des longueurs des cycles qui interviennent dans la décomposition (à supports disjoints)
3. Généralement dans un groupe G, pour x_0 fixé, l'application : $\begin{array}{cccc} f & : & G & \rightarrow & G \\ & & x & \mapsto & x_0^{-1} x x_0 \end{array}$ est un automorphisme
4. $\forall (x, y) \in G^2, f(xy) = x_0^{-1} xy x_0 = x_0^{-1} x x_0^{-1} x_0 y x_0 = f(x) f(y)$

   Sa réciproque est l'application : $\begin{array}{cccc} f^{-1} & : & G & \rightarrow & G \\ & & x & \mapsto & x_0 x x_0^{-1} \end{array}$ On dit que f est une conjugaison, elle mesure le défaut de commutativité d'un groupe

Signature d'une permutation

Soit $\sigma \in \sigma_n$, on définit la signature :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

1. $\varepsilon(\sigma) \in \{-1; 1\}$
2. La signature est un morphisme de groupe surjectif
3. $\mathcal{A}_n = Ker(\varepsilon) = \{\sigma \in \sigma_n / \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe de σ_n de cardinal $\frac{n!}{2}$

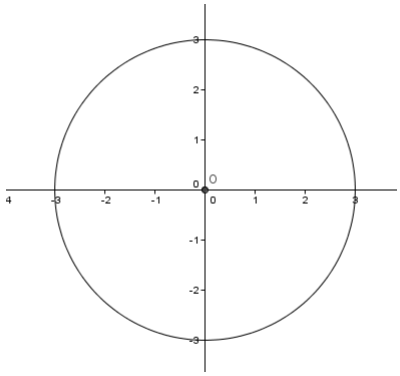
Preuve : Lemme : soit $\Delta_n = \{(i,j) \in [|1;n|]^2 / i \neq j\}$.
L'application $\begin{array}{cccc} \sigma^* & : & \Delta_n & \to & \Delta_n \\ & & (i,j) & \mapsto & (\sigma(i), \sigma(j)) \end{array}$ est bijective. En effet σ^* est bien définie car σ est injective, sa réciproque est : $\begin{array}{cccc} (\sigma^{-1})^* & : & \Delta_n & \to & \Delta_n \\ & & (i,j) & \mapsto & (\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)) \end{array}$

1. D'après le lemme, $(\sigma(j) - \sigma(i))_{1 \leq i < j \leq n}$ décrit exactement $(j-i)_{1 \leq i < j \leq n}$ au changement de signe près (i.e inversions) : il vient,
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^m \text{ où m est le nombre d'inversions de } \sigma$$
2. Soit $(\sigma, \sigma') \in \sigma_n^2$:
$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma \circ \sigma') &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma \circ \sigma')(j) - (\sigma \circ \sigma')(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \times \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma \circ \sigma')(j) - (\sigma \circ \sigma')(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \varepsilon(\sigma') \times \prod_{1 \leq i' < j' \leq n} \frac{\sigma(j') - \sigma(i')}{j' - i'} \\ &= \varepsilon(\sigma') \times \varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$
$\varepsilon(id) = +1$
$\tau = [i_0; j_0] \Rightarrow \varepsilon(\tau) = -1$ preuve par disjonction des cas sur i_0 et j_0
3. Par décomposition canonique $\frac{\sigma_n}{\mathcal{A}_n}$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(\varepsilon)$, d'après le théorème de Lagrange :
$$card(\sigma_n) = card(\mathcal{A}_n) card(\tfrac{\sigma_n}{\mathcal{A}_n})$$
$$\text{d'où } card(\mathcal{A}_n) = \tfrac{n!}{2}$$
Une preuve ne faisant appel à aucun résultats hors programme consiste à étudier l'application : $\begin{array}{cccc} \tau & : & \mathcal{A}_n & \to & \frac{\sigma_n}{\mathcal{A}_n} \\ & & x & \mapsto & x_0 x x_0^{-1} \end{array}$, et montrer que c'est un morphisme bijectif

1.2.7 Groupes et géométries

On s'intéresse à l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariante une figure plane : c'est un sous-groupe des isométries vectorielles du plan.

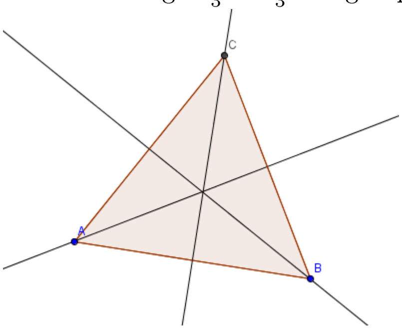
Cercle



Toutes les isométries laissent le cercle invariant

Triangle équilatéral

Une telle symétrie réalise une permutation des points A, B et C. Il y en a au plus $6! = 3$. Ainsi ces isométries sont les symétrie orthogonales par rapport aux médianes, l'identité, et les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Ce groupe est isomorphe à σ_3. La signature joue le rôle du déterminant.



Isométries du triangle

Il est impossible de réaliser des transpositions. On a deux symétries orthogonales par rapport aux médiatrices, l'identité et la rotation d'angle π. C'est le groupe de Klein.

Isométries du polygone régulier

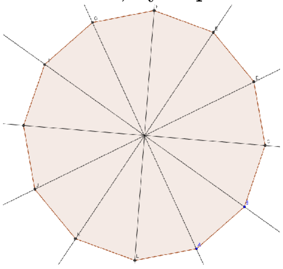
Pour les symétries, il suffit de connaître l'image de A_i de A_1, il y a donc n symétries orthogonales possibles :

Si n est pair : il y a n/2 symétries orthogonales passant par les sommets opposés et n/2 passant par les côtés opposés.
Si n est impair : il y a n symétries orthogonales issue des hauteurs

Les rotations sont déterminés par l'image de A_1 : il y en a n possibles :

$$\boxed{\mathcal{R}_\theta(A_1) = A_k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi(k-1)}{n}}$$

On obtient un groupe de cardinal 2n, appelé diédral D_n composé de n symétries orthogonales et n rotations. Notons que l'ensemble des rotations est un sous-groupe (noyau du déterminant) de cardinal n, cyclique.



1.3 Anneaux et Corps

1.3.1 Définitions générales

Anneaux

On dit qu'un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux lois internes $+$ et $\times$ est un anneau si et seulement si :

1. $(\mathcal{A},+)$ est un groupe abélien de neutre $0_{\mathcal{A}}$
2. La loi $\times$ est associative, de neutre $1_{\mathcal{A}}$
3. $\times$ est distributive sur $+$

Si de plus $\times$ est commutative alors $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif

Corps

Si de plus $\mathcal{A}$ est un anneaux dont tout les éléments de $\mathcal{A}\setminus\{0_{\mathcal{A}}\}$ sont inversibles pour $\times$ alors $\mathcal{A}$ est muni d'une structure de corps : c'est un anneau intègre

Exemples

1. $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ et $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ sont des anneaux commutatifs
2. Soit I un ensemble , $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{K}(X)$ sont des corps
3. $\mathbb{H}$ le corps des quaternions est un corps non commutatif

Propriétés

1. 0 est absorbant pour $\times$:
$$\forall a\in\mathcal{A}, a\times 0 = 0\times a = 0$$
2. On dit que $a\in\mathcal{A}\setminus\{0\}$ est un diviseur de 0 si et seulement si :

$$\exists b \in \mathcal{A} \setminus \{0\} / a \times b = 0 \text{ ou } b \times a = 0$$

3. Lorsqu'il n'existe pas de diviseur de 0, on dit que $\mathcal{A}$ est intègre :
$$\forall (a,b) \in \mathcal{A}^2, a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$
4. On dit que $\mathcal{A}$ est régulier à droite (resp. à gauche) si et seulement si :
$$\forall (c,b) \in \mathcal{A}^2, a \times b = a \times c \Rightarrow b = c$$
5. Groupes des inversibles : on note $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{A}^\times$ l'ensembles des inversibles pour $\times$, qui est un groupe multiplicatif

Exemples

1. $\mathbb{Z}^\times = \{-1; +1\}$
2. $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}_0 \setminus \{0\}$, résultat provenant de la théorie des degrés :
$$\deg(AB) = \deg(A)\deg(B) \Leftrightarrow \deg(A) = \deg(B) = 0$$
3. Les entiers de Gauss : $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib/(a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. C'est le plus petit sous-anneaux de $\mathbb{C}$ contenant i.
$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1; -1; i; -i\}$$
4. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}/(a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Démontrons une condition d'inversibilité :
$$\begin{aligned} (a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (a^2 - 2b^2)(a'^2 - 2b'^2) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 - 2b^2 \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Règles de calculs dans un anneaux

Soit $(a,b) \in \mathcal{A}^2 \ / \ ab = ba$:

1. $$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
2. $$\forall n \in \mathbb{N}, a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$$
3. $$\forall n \in \mathbb{N}, a^{2+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=1}^{2n+1} a^{2n+1-k} (-b)^{k-1}$$
4. $$1 - a^n = 1^n - a^n = (1-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$
5. Si a est nilpotent , $\exists n \in \mathbb{N} / a^n = 0$ alors $1 - a$ est inversible d'inverse
$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

1.3.2 Anneaux Quotient

Définition

Soit $\mathcal{A}$ un anneau et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence compatible avec $+$ et $\times$, on peut alors munir $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{R}}$ d'une structure d'anneau en définissant :

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \in \mathcal{A}^2, \overline{a+b} &= \overline{a} + \overline{b} \\ \overline{a \times b} &= \overline{a} \times \overline{b} \end{aligned}$$

Cas de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

La relation $\equiv$ est compatible avec $+$ et $\times$:

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{Z}^4, x \equiv y[n] \text{ et } x' \equiv y'[n] \text{ alors :}$$
$$x + y \equiv x' + y'[n] \text{ et } xy \equiv x'y'[n]$$

On peut donc munir $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ d'une structure d'anneau

Morphismes d'anneaux

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux anneaux. On dit $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathcal{A}^2, \varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(x \times y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

$\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, bien que cette condition ne soit pas nécessaire

Exemples

L'identité et la conjugaison sont des morphismes de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Ce sont les seuls qui laissent $\mathbb{R}$ et donc $\mathbb{Z}$ invariants. On ne notera que $Im(\varphi)$ est un anneau

Décomposition canonique d'un morphisme d'anneau (HP)

Soit $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux. La relation d'équivalence :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow (x-y) \in Ker(\varphi)$$

est compatible avec les lois $+$ et $\times$. On note $\frac{\mathcal{A}}{Ker(\varphi)}$ l'anneau quotient correspondant :

$$\begin{array}{cccc} \overline{\varphi} & : & \frac{\mathcal{A}}{Ker(\varphi)} & \to & Im(\varphi) \\ & & \overline{x} & \mapsto & \overline{\varphi}(\overline{x}) = \varphi(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux

Preuve : φ étant un morphisme de groupes, $\mathcal{R}$ est compatible avec $+$. De plus, on montre de même qu'elle est compatible avec $\times$:

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathcal{A}^4, \varphi(x) = \varphi(x') \text{ et } \varphi(y) = \varphi(y') \text{ donc}$$
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x')\varphi(y') = \varphi(x'y')$$

De plus $\overline{\varphi}$ est définie et est un morphisme de groupes. En outre :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{A}^2, \overline{\varphi}(xy) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \overline{\varphi(x)\varphi(y)}$$
$$\overline{\varphi} \text{ est bien un morphisme d'anneaux}$$

1.3.3 Anneaux produits

Définition

Soit $\mathcal{A}_i$ une famille d'anneaux, on définit sur $\mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n$ les lois produits :

$$\forall ((a_1; ...; a_n), (b_1; ...; b_n)) \in (\mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n)^2$$
$$(a_1; ...; a_n) + (b_1; ...; b_n) = (a_1 + b_1; ...; a_n + b_n)$$
$$(a_1; ...; a_n) \times (b_1; ...; b_n) = (a_1 b_1; ...; a_n b_n)$$

$\mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n$ muni de ces lois est un anneau dit anneau-produit

Inversibles et neutres

Il faut que toutes les composantes soient inversibles. Dans ce cas, on inverse composante par composante. Pour les éléments neutres :

$$(1_{\mathcal{A}_1}; ...; 1_{\mathcal{A}_n}) \text{ pour } +$$
$$(0_{\mathcal{A}_1}; ...; 0_{\mathcal{A}_n}) \text{ pour } \times$$

⚠Cela ne marche pas pour les corps : $\mathbb{R}^2$ n'est pas un corps pour la loi produit :

$$(1; 0) \times (0; 1) = (0; 0)$$

cet anneau n'est pas intègre, ce n'est pas un corps

1.3.4 L'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1. $\forall (l,m) \in \mathbb{Z}^2, \overline{lm} = l\overline{m} = \overline{l}\overline{m}$
2. $\forall \in \mathbb{Z}$, $\overline{k}$ est inversible pour $\times$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ si et seulement si $\overline{k}$ est générateur pour $+$, si et seulement si $k \wedge n = 1$
3. Si $p \in \mathbb{P}$,$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ est un corps, noté $\mathbb{F}_p$
4. Sinon,
$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$
n'est pas un corps, et $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \times)$ n'est pas intègre

Preuve :

2

$$\begin{aligned}
\overline{k} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}^{\times} &\Rightarrow \exists \overline{l} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{lk} = \overline{1} \\
&\Rightarrow l\overline{k} = \overline{1} \\
&\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z}, al\overline{k} = \overline{a} \in gr\{k\} \\
&\Rightarrow \overline{k} \text{ est générateur de}(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \times) \\
\text{Réciproquement ,}\overline{k} \text{ est générateur de } (\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \times) &\Rightarrow k \wedge n = 1 \\
&\Rightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, ku + nv = 1 \\
&\Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z}, \overline{k}u = \overline{1} \\
&\Rightarrow \overline{k} \text{ est inversible pour } \times \text{ dans} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
\text{Si} p \in \mathbb{P}, \forall k \in [|1; p-1|], p \wedge k = 1 &\Rightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, pu + kv = 1 \\
&\Rightarrow \exists v \in \mathbb{Z}, v\overline{k} = \overline{1} \\
&\Rightarrow \overline{k} \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

$$(\tfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}, +, \times) \text{ est un corps}$$

4 Si p n'est premier, alors :

$$\exists (a,b) \in [|1; n-1|]^2, n = ab \Rightarrow \overline{ab} = \overline{n} \Rightarrow \overline{a}\overline{b} = \overline{0}$$

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ n'est pas intègre, ce n'est pas un corps

Exemple : $\frac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}}$

Eléments	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Inverses	1	9	6	13	7	3	5	15	2	12	14	10	4	11	8	16

Remarque

$$x^2 = \overline{1} \Leftrightarrow (x - \overline{1})(x + \overline{1}) = \overline{0} \Leftrightarrow x \in \{\overline{1}; \overline{-1}\} \text{ par intégrité}$$

Exemple : $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}^{\times} = \{\bar{1}; \bar{5}; \bar{7}; \bar{11}\}$ est isomorphe au groupe de Klein

Groupes des inversibles

Soit $p \in \mathbb{P}, (\mathbb{F}_p^*, \times)$ est un groupe abélien fini à $p-1$ éléments. Soit pour $\overline{x} \in \mathbb{F}_p^*, \omega(\overline{x})$ son ordre : on sait que : $\omega(\overline{x}) | p-1$. Soit

$$m = \bigvee_{\overline{x} \in \mathbb{F}_p^*} \omega(\overline{x})$$

d'après ce qui précède, $mp|1$.
Par ailleurs $\exists x_0 \in \mathbb{F}_p^*/\omega(x_0) = m$. Or :

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{F}_p^*, \overline{x}^m = \overline{1}$$

Dans le corps commutatif $\mathbb{F}_p^*$, le polynôme $X^m - 1$ admet au plus m racines distinctes, il vient que :

$$\mathbb{F}_p^* = gr\{\overline{x_0}\}, \text{ donc } (\mathbb{F}_p^*, \times) \text{ est cyclique}$$

On montre ainsi que $\mathbb{F}_{17}^*$ est engendré par $\overline{3}$

Petit théorème de Fermat, théorème de Wilson

1. Petit théorème de Fermat : $p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{Z}$,
$$p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$$
$$a^p \equiv a[p]$$
2. Théorème de Wilson : $p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1[p]$

Preuve :

1. $p \nmid a, \overline{a} \in (\mathbb{F}_p^*, \times)$, ensemble à $p-1$ éléments, on sait alors que :
$$\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$$
De même : $p|a \Rightarrow \overline{a}^p = \overline{0} \Rightarrow \overline{a}^p = \overline{a}$
2. $$n \in \mathbb{P}, \overline{(n-1)!} = \prod_{\overline{x} \in \mathbb{F}_p^*} \overline{x} \Rightarrow \overline{(n-1)!} = \bar{-1}\overline{1} = \bar{-1}$$
En effet les éléments étant deux à deux distincts de leur inverse, ils se compensent sauf pour $\overline{1}$ et $\bar{-1}$. Une autre démonstration consiste à étudier le polynôme $X^{n-1} - 1$ qui s'annule pour tout les élements de $\mathbb{F}_p^*$, ce qui permet d'obtenir le résultat souhaité en évaluant en 0. Si $n \notin \mathbb{P}$ alors $\overline{(n-1)!} = \overline{0}$

1.3.5 Indicatrice d'Euler et théorème Chinois

Théorème Chinois

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*/n \wedge m = 1$, l'application :

$$\varphi \quad : \quad \begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}} & \rightarrow & \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \\ \overline{k} & \mapsto & (\overleftarrow{k}, \overrightarrow{k}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux

Preuve : $Ker(\varphi) = \{k \in \mathbb{Z}/\overleftarrow{k} = \overleftarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}\} = \{k \in \mathbb{Z}/nm|k\} = nm\mathbb{Z}$
On sait alors que l'application $\overline{\varphi}$ canoniquement associée est un isomorphisme d'anneaux, ce qui implique que : $Im(\varphi) = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$

Remarque

C'est le caractère surjectif de $\overline{\varphi}$ qui est intéressant ; le théorème se reformule ainsi :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2, \exists! k\in[|0;mn-1|], (\overleftarrow{k},\overrightarrow{k})=(\overleftarrow{a},\overrightarrow{b})$$
$$a\equiv k[n] \text{ et } b\equiv k[m]$$

Corollaire

Soient $(n_1;...;n_r)\in\mathbb{N}^r, \forall(i,j)\in[|1;r|]^2, i\neq j\Rightarrow n_i\wedge m_i=1$, l'application :

$$\begin{array}{rccc}\varphi & : & \frac{\mathbb{Z}}{n_1...n_r\mathbb{Z}} & \to & \frac{\mathbb{Z}}{n_1\mathbb{Z}}\times...\times\frac{\mathbb{Z}}{n_r\mathbb{Z}} \\ & & \overline{k}^{n_1...n_r} & \mapsto & (\overleftarrow{k}^{n_1};...;\overrightarrow{k}^{n_r})\end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Preuve : se fait par récurrence triviale sur n

Définition : indicatrice d'Euler

Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\varphi(n)=card\{1\leq k\leq n/k\wedge n=1\}$$

C'est également le nombre d'inversibles de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et de générateur du même groupe.

Ainsi :

n	1	2	3	4	5	6
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2

Théorème

1. Si $p\in\mathbb{P}, \forall\alpha\in\mathbb{N}^*, \varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$, donc $\varphi(p)=p-1$
2. Si $n\wedge m=1, \varphi(nm)=\varphi(n)\varphi(m)$
3. $$n=\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}, \varphi(n)=\prod_{i=1}^r(p_i^{\alpha_i}-p_i^{\alpha_i-1})=n\prod_{i=1}^r(1-\frac{1}{p_i})$$

Preuve :

1. Soit $m\in[|1;p^\alpha|]$:
$$m\wedge p^\alpha\neq 1\Leftrightarrow p|m\Leftrightarrow m\in\{kp/k\in[|1;p^\alpha|]\}$$
Il y a $p^{\alpha-1}$ tel nombres, d'où : $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$
2. Découle du théorème chinois, on considérant les groupes des inversibles
3. On applique les deux résultats précédents

Théorème d'Euler - Möbius (HP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{n = \sum_{d|n} \varphi(d)}$$

Preuve : Dans $(\mathbb{U}_n, \times)$ chaque élément possède un ordre et un seul $d|n$, donc :

$$\mathbb{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathcal{G}_d$$

éléments d'ordre d dans $\mathbb{U}_n$

Or $z \in \mathbb{U}_n$ est d'ordre d si et seulement si z^d et $\omega(z) = d$ si et seulement si $gr\{z\} = \mathbb{U}_d$
Or il existe $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans $(\mathbb{U}_d, \times)$ par isomorphisme, d'où :

$$n = card(\mathbb{U}_n) = \sum_{d|n} card(\mathcal{G}_d) = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Exemple

On se place dans $\mathbb{U}_6$

x	1	$-j^2$	j	-1	j^2	$-j$
$\omega(x)$	1	6	3	2	3	6

On a bien les résultats escomptés

Théorème d'Euler

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{Z}/a \wedge n = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]}$$

Preuve : $\bar{a} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}^\times$ or ce groupe est de cardinal $\varphi(n)$, donc $\bar{a}^{\varphi(n)} = \bar{1}$

Théorème RSA

Soient $p, q \in \mathbb{P}$ distincts $n = pq$ et $c, d \in \mathbb{N}, cd \equiv 1[\varphi(n)], \varphi(n) = (p-1)(q-1)$

$$\forall \bar{t} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \bar{t}^{cd} = \bar{t}$$

Preuve : Montrons que : $\forall t \in [|0; n-1|], n|t^{cd} - t \Leftrightarrow p|t^{cd} - t$ et $q|t^{cd} - t$

$p|t \Rightarrow t^{cd} \equiv t \equiv 0[p] \Rightarrow p|t^{cd} - t$

$p \wedge t = 1 \Rightarrow t^{p-1} \equiv 1[p]$
$cd \equiv 1[\varphi(n)] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}/cd = 1 + k\varphi(n) = 1 + k(p-1)(q-1) \Rightarrow t^{cd} = t(t^{p-1})^{q-1} \equiv t[p]$

$$p|t^{cd} - t \text{ , de même pour q}$$

Ainsi les applications : $\begin{array}{cccc} f & : & \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} & \to & \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \\ & & \bar{t} & \mapsto & \bar{t}^c \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g & : & \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} & \to & \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \\ & & \bar{t} & \mapsto & \bar{t}^d \end{array}$ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. Le principe des clefs publiques consistent à publier les valeurs de n et c : tout le monde peut effectuer f(codage). Seul celui qui connait p et q (donc $\varphi(n)$) peut évaluer d et décoder

1.4 Arithmétique générale

1.4.1 Idéal

Soit $\mathcal{A}$ un anneau et une partie $I \subset \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{R}$, la relation bianaire définie su r$\mathcal{A}$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in I$$

C'est une relation d'équivalence si et seulement si $(I, +)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{A}$. A quelle conditions sur I, $\mathcal{R}$ est-elle compatible avec $+$ et $\times$?
Soit $(x, y, x', y') \in \mathcal{A}^4 / x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$, alors :

$$\exists (a, b) \in I^2 / x' = x + a \text{ et } y' = y + b$$

$x' + y' = x + y + a + b \Rightarrow x' + y'\mathcal{R}x + y$
$x'y' = xy + ay + xb + ab$, on a :

$$x'y'\mathcal{R}xy \Leftrightarrow ay + xb + ab \in I \Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A}, \forall z \in I, az \in I$$

Définition

Soit $\mathcal{A}$ un anneau, on dit que $I \subset \mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ si et seulement si :

1. I est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$
2. $\forall (x, a) \in I \times \mathcal{A}, xa \in I$ et $ax \in I$

Exemples

1. $\{0\}$ et $\{0\}$ sont des idéaux
2. Soit $\mathcal{A}$ commutatif : $\forall a \in \mathcal{A}, a\mathcal{A} = \{ab / b \in \mathcal{A}\}$ est un idéal, dit idéal principal engendré par a.
3. Dans $\mathbb{Z}$, les idéaux sont de la forme $n\mathbb{Z}$
4. Dans $\mathbb{Z}^2$, $(0, 1)\mathbb{Z} + (2, 0)\mathbb{Z}$ est un idéal

Propriétés

1. Toute intersection d'idéaux est un idéal. Pour une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ on peut définir l'idéal engendré par $\mathcal{B}$ comme l'intersection de tous les idéaux de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{B}$
2. L'idéal engendré par a est $a\mathcal{A}$
3. Soit I un idéal de $\mathcal{A}$
$$I = \mathcal{A} \Leftrightarrow 1 \in I \Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{A}^{\times}, b \in I$$
4. Si $\mathcal{A}$ est un corps alors ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathcal{A}$

Preuve :

1. trivial

2. $a\mathcal{A}$ est un idéal contenant a. Si I est un idéal contenant a alors $I = a\mathcal{A}$
3. $\mathcal{A} = I \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow \exists b \in \mathcal{A}, b \in I \Rightarrow \forall a \in \mathcal{A}, a = u(u^{-1}a) \in I, u \in \mathcal{A}^{\times} \Rightarrow \mathcal{A} = I$
4. Si $\mathcal{A}$ est un corps, soit I un idéal de $\mathcal{A}$ et $a \in I \setminus \{0\}$, a est inversible, d'après 3), $\mathcal{A} = I$

Remarque

Dans un anneau non commutatif, on distingue deux types d'idéaux :

Les idéaux tout courts, bilatères
Les idéaux à droite, les idéaux à gauche

Somme d'idéaux

Soit $(\mathcal{A}, +, \times)$ un anneau et (I_k) une famille d'idéaux de $\mathcal{A}$ alors :

$$I_1 + ... + I_n = \sum_{k=1}^{n} I_k = \{x_1 + ... + x_n / \forall i \in [|1;n|], x_i \in I_i\}$$

est l'idéal engendré par

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

Preuve :

$$0 \in \sum_{k=1}^{n} I_k$$

Soit $((x_1;...;x_n),(y_1;...;y_n)) \in (I_1 \times ... \times I_n)^2$

$$(x_1;...;x_n) - (y_1;...;y_n) = (x_1 - y_1;...;x_n - y_n) \in \sum_{k=1}^{n} I_k$$

$$a(x_1;...;x_n) = (ax_1;...;ax_n) \in \sum_{k=1}^{n} I_k$$

c'est donc un idéal contenant

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

Soit par ailleurs I un idéal contenant

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

par stabilité il vient :

$$\forall (x_1;...;x_n) \in I_1 \times ... \times I_n, \sum_{i=1}^{n} x_i \in I \supset \sum_{k=1}^{n} I_k$$

Décomposition canonique d'un morphisme d'anneau

Soit $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux :

1. $Ker(\varphi)$ est un idéal de $\mathcal{A}$ et $Im(\varphi)$ est un sous-anneau de $\mathcal{B}$
2. (HP) : $\begin{array}{cccc} \overline{\varphi} & : & \frac{\mathcal{A}}{Ker(\varphi)} & \rightarrow & Im(\varphi) \\ & & \overline{x} & \mapsto & \overline{\overline{x}} = \varphi(x) \end{array}$ est un isomorphisme d'anneaux

Preuve :

1. $Ker(\varphi)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$ et $\forall (x, a) \in Ker(\varphi) \times \mathcal{A}, \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = 0 = \varphi(x)$
$$Ker(\varphi) \text{ est un idéal de } \mathcal{A}$$
2. $\frac{\mathcal{A}}{Ker(\varphi)}$ désigne l'anneau quotient de $\mathcal{A}$ par la relation d'équivalence :
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in Ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$
compatible avec $+$ et $\times$ car $Ker(\varphi)$ est un idéal. On a vu par ailleurs que c'est un isomorphisme de groupes. En outre :
$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \overline{\varphi}(\bar{x}\bar{y}) = \overline{\varphi}(\overline{xy}) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \overline{\varphi}(\bar{x})\overline{\varphi}(\bar{y})$$
$$\overline{\varphi}(\bar{1_{\mathcal{A}}}) = \varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$$
$$\overline{\varphi} \text{ est un morphisme d'anneau}$$

1.4.2 Divisibilité

Définitions

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif intègre

1. Soit $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, on dit que :
$$b|a \Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{A}/a = bc \Leftrightarrow a \in b\mathcal{A} \Leftrightarrow a\mathcal{A} \subset b\mathcal{A}$$
c'est une relation réflexive et transitive
2. Soit $(a, b) \in (\mathcal{A} \setminus \{0\})^2$ on dit que
$$a \text{ et } b \text{ sont associés } \Leftrightarrow a|b \text{ et } b|a \Leftrightarrow a\mathcal{A} = b\mathcal{A} \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{A}^{\times}/b = au$$
c'est une relation d'équivalence
3. On dit que $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est irréductible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si :
   (a) a n'est pas inversible
   (b) $\exists (b, c) \in \mathcal{A}^2/a = bc \Rightarrow$ l'un est inversible (l'autre est donc associé à a)

Exemples

Dans $\mathbb{Z}$, deux éléments sont associés si et seulement si $|a| = |b|$, $a \in \mathbb{Z}^*$ est irréductible si et seulement $|a| \in \mathbb{P}$

Remarques

$$a \text{ est inversible} \Leftrightarrow a\mathcal{A} = \mathcal{A}$$
$$a \text{ est irréductible} \Leftrightarrow a\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A} \Leftrightarrow [a\mathcal{A} \subset a_1\mathcal{A} \Rightarrow a_1\mathcal{A} = \mathcal{A} \text{ ou } a_1\mathcal{A} = a\mathcal{A}$$

1.4.3 Anneaux principaux

Définition

On dit qu'un anneau $\mathcal{A}$ commutatif et intègre est principal si tout ses idéaux sont principaux :

$$\forall I \text{ idéal de } \mathcal{A}, \exists a \in \mathcal{A}/I = a\mathcal{A}$$

Exemples

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont principaux

Preuve : Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$:
→ si $I = \{0\}$ alors $I = 0 \cdot \mathbb{K}[X]$
→ si $I \neq \{0\}$ alors P_0 est unitaire et dans I, tel que

$$\deg(P_0) = min\{deg(P)/P \in I \setminus \{0\}\}$$

Comme I est un idéal contenant P_0 : $P_0 \subset \mathbb{K}[X]$
On effectue la division euclidienne de $A \in I$ par P_0 :

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2/A = QP_0 + R, deg(R) < deg(Q)$$
$$R = A - QP_0 \in I \Rightarrow R = 0$$
$$A = QP_0 \in P_0\mathbb{K}[X]$$

Finalement : $I = P_0\mathbb{K}[X]$

PGCD et PPCM

Soit $\mathcal{A}$ un anneau principal et $(a_1; ...; a_n) \in \mathcal{A}^n$

1. $$\delta = PGCD(a_1; ...; a_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} \Leftrightarrow \delta\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ est générateur de l'idéal } \sum_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A}$$

   On a : $\forall d \in \mathcal{A}, \forall i \in [|1; n|], d|a_i \Leftrightarrow d|\delta$

2. $$m = PPCM(a_1; ...; a_n) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow m\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A} \Leftrightarrow m \text{ est générateur de l'idéal } \bigvee_{i=1}^{n} a_i$$

   Dans ce cas on a : $\forall b \in \mathbb{A}, \forall i \in [|1; n|] a_i|b \Leftrightarrow m|b$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned}\forall i \in [|1;n|] d|a_i &\Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|] a_i\mathcal{A} \subset d\mathcal{A}\\ &\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A} \subset d\mathcal{A}\\ &\Leftrightarrow d|\delta\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\forall i \in [|1;n|] a_i|b &\Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|] b\mathcal{A} \subset a_i\mathcal{A}\\ &\Leftrightarrow b\mathcal{A} \subset \bigcap_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A}\\ &\Leftrightarrow m|b\end{aligned}$$

On remarque que $\wedge$ et $\vee$ sont commutatifs et associatifs.
O est neutre pour $\wedge$ et absorbant pour $\vee$
Un inversible est absorbant pour $\wedge$ et neutre pour $\vee$

Éléments premiers entre eux

Soit $(a_1; ...; a_n) \in \mathcal{A}^n$,

1. ils sont premiers entre-eux dans leur ensemble si et seulement si : $\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = 1$
2. ils sont premiers entre-eux 2 à 2 si et seulement si : $\forall i \neq j, a_i \wedge a_j = 1$
3. $(a_1; ...; a_n)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble alors ils sont premiers entre-eux deux à deux. La réciproque est fausse

Théorème de Bézout

$$\begin{aligned}\text{Soit } (a_1; ...; a_n) \in \mathcal{A}^n, \bigwedge_{i=1}^{n} = 1 &\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A}\\ &\Leftrightarrow 1 \in \sum_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A}\\ &\Leftrightarrow \exists (x_1; ...; x_n) \in \mathcal{A}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$, on obtient des valeurs pour $a \wedge b = 1$ des valeurs $(x_1; x_2)$ telle que $ax_1 + bx_2 = 1$ avec l'algorithme d'Euclide étendu

Caractérisation du PGCD

Soit $(a_1; ...; a_n) \in \mathcal{A}^n$, $\delta = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ alors $\exists (a'_1; ...; a'_n) \in \mathcal{A}^n / \forall i \in [|1; n|]$:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a'_i = 1 \qquad a_i = \delta a'_i$$

Preuve : si $\forall i \in [|1; n|], a_i = 0 \Rightarrow \delta = 0$
$\forall i \in [|1; n|], a'_i = 0$
sinon : $\exists i_0 \in [|1; n|], a_{i_0} \neq 0 \Rightarrow \delta \neq 0$
$\forall i \in [|1; n|], \exists a'_i \in \mathcal{A} / a_i = \delta a'_i$
Or :

$$\begin{aligned}
\delta \in \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{A} \quad & \Rightarrow \quad \delta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i / (b_1; ...; b_n) \in \mathcal{A}^n \\
& \Rightarrow \quad \delta = \delta(\sum_{i=1}^{n} a'_i b_i) \\
& \Rightarrow \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} a'_i b_i \\
& \Rightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} a'_i = 1 \text{ d'après le théorème de Bézout}
\end{aligned}$$

Thérorème de Gauss

$$\boxed{a | bc \text{ et } a \wedge b = 1 \Rightarrow a | c}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\exists (u, v) \in \mathcal{A}^2 / au + bv = 1 \quad & \Rightarrow \quad acu + bcv = c \\
& \Rightarrow \quad a | acu \text{ et} a | bc \\
& \Rightarrow \quad a | c
\end{aligned}$$

Cas des irréductibles

1. $a \wedge b = 1 \Rightarrow \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, a^n \wedge b^m = 1$
2. Soient $(p, q) \in m\mathcal{A}$ deux irréductibles non associés, on a $p \wedge q = 1$

Preuve :

1. $\exists(u,v) \in \mathcal{A}^2/au+bv=1$, d'après le formule du binôme (anneaux commutatif) :

$$\begin{aligned}(au+bv)^n = 1^n \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(au)^{n-k}(bv)^k = 1\\ &\Leftrightarrow \quad a^n u^n + b\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}v(au)^{n-k}(bv)^{k-1} = 1\\ &\Leftrightarrow \quad a^n U + bV = 1\\ &\Leftrightarrow \quad a^n \wedge b = 1\end{aligned}$$

   On applique ensuite ce résultat à a^n et b

2. Notons $\delta = p \wedge q$, si δ est non inversible, comme p est irréductible et $\delta | p$, δ est associé à p. De même pour q, donc p et q sont associés, absurde. Ainsi $p \wedge q = 1$

Théorème de factorialité (HP)

> Soit $\mathcal{A}$ un anneau principal. $\mathcal{P}$, l'ensemble des irréductibles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, $\forall p \in \mathcal{P}, \exists! p_0 \in \mathcal{P}_0$ associé à p. On $\mathcal{U}$ l'ensemble des inversibles . On a :
>
> $$\forall a \in \mathcal{A}^*, \exists! u \in \mathcal{U}, \exists! \ \nu \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_0 & \to & \mathbb{N} \\ p & \mapsto & \nu_p(a) \end{array}, a = u \prod_{p\in\mathcal{P}_0} p^{\nu_p(a)}$$

Preuve :

Existence Soit $a \in \mathcal{A}^*$, supposons que a n'est pas décomposable, e, particulier a n'est pas inversible et on peut écrire $a = bc$ où ni b ni c n'est inversible. Parmi b et c l'un des deux n'est pas décomposable, notons $a_0 = a$ et $a_1 \in \{b;c\}$ non décomposable : $a_1 | a_0 \Rightarrow a_0\mathcal{A} \subsetneq a_1\mathcal{A}$ car ils ne sont pas associés. Par récurrence, on peut construire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ n'est pas décomposable et $a_n\mathcal{A} \not\subseteq a_{n+1}\mathcal{A}$.
Notons $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n\mathcal{A}, 0 \in I$. $\forall (x,y) \in I^2, \exists (n,m) \in \mathbb{N}^2/x \in a_n\mathcal{A}$ et $y \in a_m\mathcal{A}$. Supposons $n \geq m$, comme $a_m\mathcal{A} \subsetneq a_n\mathcal{A}$. $(x,y) \in (a_n\mathcal{A}^2 \Rightarrow x - y \in a_n\mathcal{A} \subset I$. Soit enfin $b \in \mathcal{A}$ et $x \in I$, $\exists n \in \mathbb{N}/x \in a_n\mathcal{A}$. Ainsi I est un idéal de $\mathcal{A}$, or $\mathcal{A}$ est principal :

$$\exists \alpha \in \mathcal{A}/I = \alpha\mathcal{A}$$

En particulier :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}/\alpha \in a_{n_0}\mathcal{A}$$

On a

$$I = \alpha\mathcal{A} \subset a_{n_0}\mathcal{A} \subsetneq a_{n_0+1}\mathcal{A} \subset I$$

absurde

Unicité Supposons $a = u\prod_{p\in\mathcal{P}_0} p^{\nu_p(a)} = v\prod_{p\in\mathcal{P}_0} p^{\mu_p(a)}$. S'il existe $p_0 \in \mathcal{P}_0/\nu_p(a) \neq \mu_p(a)$ Il vient par intégrité :

$$up_0^{\nu_{p_0}(a)-\mu_{p_0}(a)} \prod_{p\in\mathcal{P}\backslash p_0} p^{\nu_p(a)} = v \prod_{p\in\mathcal{P}_0\backslash p_0} p^{\mu_p(a)}$$

D'après le théorème de Gauss :

$$p_0 | \prod_{p\in\mathcal{P}_\prime\backslash p_0} p^{\mu_p(a)}$$

ce qui absurde car $\forall p \in \mathcal{P}_0, p_0 \wedge p = 1$, donc $\forall p \in \mathcal{P}_0, \mu_p(a) = \nu_p(a)$ par intégrité $u = v$

1.4.4 Cas de $\mathbb{K}[X]$

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, les inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls

$$P \in \mathbb{K}[X], P = aP_0/a \in \mathbb{K}, P_0 \text{ est unitaire}$$

$P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible $\Leftrightarrow \deg(P) \geq 1, \exists (P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2/P = P_1P_2, \{\deg(P_1); \deg(P_2)\} \neq \{0; \deg(P)\}$

Théorèmes

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible su $\mathbb{K}[X]$
2. Tout polynôme de degré ≥ 2 irréductible sur $\mathbb{K}$ n'a pas de racines sur $\mathbb{K}$
3. Si $\deg(P) \in \{2; 3\}$ et si P n'a pas de racines sur $\mathbb{K}$ alors il est irréductible sur $\mathbb{K}[X]$
4. Soit P irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]\ \{0\}$, $\deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow Q \wedge P = 1$

Preuve :

1. $\deg(P) = 1$ et si $P = P_1P_2$ alors $\deg(P_1) + \deg(P_2) = 1$, alors l'un des deux est de degré nul
2. Si $\deg(P) \geq 2$, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P, on peut écrire : $P(X) = (X-\alpha)Q(X), \deg(Q) \geq 1$ donc P n'est pas irréductible
3. Si $\deg(P) \in \{2; 3\}$ et si P n'a pas de racine sur $\mathbb{K}$, si $P = P_1P_2/ \begin{cases} \deg(P_1) < \deg(P) \\ \deg(P_2) < \deg(P) \end{cases}$

   $$\{\deg(P_1); \deg(P_2)\} = \{1; 1\} \text{ ou} \{1; 2\}$$

   P_1 ou P_2 est de degré 1 donc admet une racine sur $\mathbb{K}$, contradiction.
   Cela devient faux si $\deg(P) \geq 4$, $(X^2+1)^2$ n'a pas de racines sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$
4. Notons $\Delta = P \wedge Q, \Delta | P \Rightarrow \begin{cases} \deg(\Delta) = 0 \text{ ou} \\ \deg(\Delta) = \deg(P) \end{cases}$
   $\Delta | Q \Rightarrow \deg(\Delta) \leq \deg(Q) < \deg(P)$, $\deg(\Delta) = 0 \Rightarrow P \wedge Q = 1$

Exemples

$$\begin{aligned} X^3-2 &= (X-\sqrt[3]{2})(X-\sqrt[3]{2}j)(X-\sqrt[3]{2}j^2),\ \text{sur}\mathbb{C} \\ &= (X-\sqrt[3]{2})(X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4}),\ \text{sur}\mathbb{R} \\ &= X^3-2 \end{aligned}$$

X^3-2 est irréductible sur $\mathbb{Q}$, mais pas sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, car $\sqrt[3]{2}$ est irrationel

Théorème d'Alembert Gauss

1. Tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, on peut le décomposer de manière unique en :
$$P(X) = \gamma \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$$
3. Les irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont :
$$\mathcal{I}_{\mathbb{R}[X]} = \{aX+b/(a;b)\in\mathbb{R}^2\} \cup \{aX^2+bX+c/\Delta<0\}$$

Relations coefficients-racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$,

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_n \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$$

$\boxed{\forall k \in [|0;n-1|], a_k = a_n(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(\alpha_i)}$

1.5 Corps

1.5.1 Caractéristique

Définition

Soit $\mathbb{L}$ un corps, on dit que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ si et seulement si :

1. 0 et $1 \in \mathbb{K}$
2. $\forall (x;y) \in \mathbb{K}^2, x-y$ et $xy \in \mathbb{K}$
3. $\forall x \in \mathbb{K}^*, x^{-1} \in \mathbb{K}$

Exemple

Soit $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}/(a;b;c) \in \mathbb{Q}^3\}$. C'est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ de dimension finie engendré par $(1; \sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$. Considérons : $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] & \rightarrow & \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \\ & & x & \mapsto & x_0x \end{array}$, il vient : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}])$ or $Ker(f) = \{0\}$, f est injective en dimension finie donc bijective :

$$\exists ! x_1 \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/x_0x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_0^{-1}$$

C'est un sous-corps de $\mathbb{Q}$

Remarque : si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, alors on peut considérer que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

Caractéristique (HP)

> Soit $\mathbb{K}$ un corps, l'application $\begin{array}{ccccc} \psi & : & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & & n & \mapsto & n1_{\mathbb{K}} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux. Son noyau est un idéal de $\mathbb{Z}$, de la forme $n_0\mathbb{Z}$: n_0 est la caractéristique de $\mathbb{K}$:
> Soit $n_0 = 0$
> Soit $n_0 \neq 0 \Rightarrow n_0 \in \mathbb{P}$ et $Im(\psi)$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ isomorphe a $\frac{\mathbb{Z}}{n_0\mathbb{Z}}$

Preuve : $n_0 \neq 0$ et si $n_0 = n_1n_2$ on a :

$$n_01_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow (n_11\mathbb{K})(n_21_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow n_0|n_1 \text{ ou } n_0|n_2$$

Il vient que $p \in \mathbb{P}$, la décomposition canonique de ψ nous assure alors que l'on a un isomorphisme d'anneaux, donc de corps car $n_0\mathbb{P}$ entre $\frac{\mathbb{Z}}{n_0\mathbb{Z}}$ et $Im(\psi)$. Ainsi la caractéristique de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ est p

1.5.2 Corps fini (HP)

Soit $\mathbb{L}$ un corps fini (donc commutatif), $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$. $\mathbb{L}$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie . Soit $(\varepsilon_1; ...; \varepsilon_n)$ une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}$, alors l'application : $\begin{array}{ccccc} u & : & \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{L} \\ & & (\lambda_1; ...; \lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i\varepsilon_i \end{array}$ $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{L})$ est un isomorphisme. Par bijectivité : $card(\mathbb{L}) = card(\mathbb{K})^n$ Plus précisement : $\begin{array}{ccccc} \psi & : & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{L} \\ & & k & \mapsto & k1_{\mathbb{L}} \end{array}$
$\mathbb{Z}$ étant infini et $\mathbb{L}$ fini , donc $Ker(\psi)$ est un idéal fini de $\mathbb{Z}$: $\exists p \in \mathbb{P}, Ker(\psi) = p\mathbb{Z}, p = car(\mathbb{L})$. $Im(\psi)$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$. Il vient :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}^*/card(\mathbb{L}) = card(Im(\psi))^n = p^n}$$

1.5.3 Morphisme de Frobenius (HP)

> Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif / $car(\mathbb{K}) = p \in \mathbb{P}$, alors l'application : $\begin{array}{ccccc} \psi & : & \mathbb{K} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & x^p \end{array}$ est un morphisme de corps

Preuve :

1. $\psi(xy) = (xy)^p = x^py^p = \psi(x)\psi(y)$

2. $\psi(1) = 1^p = 1$
3. $$\psi(x+y) = (x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{n}{k} x^k y^{p-k}$$

   par définition de la caractéristique : $\forall a \in \mathbb{K}, pa = 0$. En outre $p \in \mathbb{P}, 1 \leq k < p, p|k!\binom{n}{k}$ et $p \wedge k! = 1$, d'après le théorème de Gauss : $p|\binom{n}{k}$, ce qui implique :

   $$\psi(x+y) = x^p + y^p = \psi(x) + \psi(y)$$

   Dans $\mathbb{F}_p$, $(x+\bar{1})^p = x^p + \bar{1}^p$ on en déduit petit fermat par récurrence.

1.6 Algèbre

1.6.1 Définition

Structure d'algèbre

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $(\mathcal{A}, +, \times)$ un ensemble muni de 2 lois interne $+$ et $\times$ et d'une loi externe : $\mathbb{K} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. On dit $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$ algèbre si et seulement si :

1. $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau
2. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel
3. $\forall(\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times \mathcal{A}^2, \lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$

Exemples

1. Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$ algèbre
2. $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative
3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative
4. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
5. Soit I un ensemble quelconque $(\mathbb{K}^I, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre

Sous-algèbres

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ si et seulement si :

1. $\mathcal{B}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$
2. $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel
3. $0 \in \mathcal{B}$ et $1 \in \mathcal{B}$
4. $\forall(x, y, \lambda) \in \mathcal{A}^2 \times \mathbb{K}, \lambda x + y \in \mathcal{B}$ et $x \times y \in \mathcal{B}$

Toute intersection de sous-algèbres est une sous-algèbre. Soit $\times$ une partie quelconque de $\mathcal{A}$, on appelle sous-algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par X, l'intersection de toutes les sou-algèbres de $\mathcal{A}$ contenant X

Morphismes d'algèbres

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux $\mathbb{K}$-algèbres, on appelle morphisme d'algèbre, toute application $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ qui est un morphisme d'anneaux et de $\mathbb{K}$ espaces vectoriels :

1. $\forall (x, y, \lambda) \in \mathcal{A}^2 \times \mathbb{K} \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
3. $\varphi(1) = 1$

$Ker(\varphi)$ est un idéal et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$. $Im(\varphi)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}'$

1.6.2 Sous-algèbre engendrée par un élément (HP)

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$ algèbre commutative et $a \in \mathcal{A}$. Soit

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i \in \mathbb{K}[X]$$

On définit :

$$P(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i \in \mathcal{A}$$

L'application $\begin{array}{cccc} \psi_a & : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{A} \\ & & P & \mapsto & P(a) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres

$Im(\psi_a) = \{P(a)/P \in \mathbb{K}[X]\} = Vect_{\mathbb{K}}[a^k]_{k\in\mathbb{N}} = \mathbb{K}[a]$ est la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par a

$Ker(\psi_a)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$: soit il est réduit à $\{0\}, \psi_a$ est injective la famille $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre et $\mathbb{K}[a]$ est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$, $\dim(\mathbb{K}[a]) = +\infty$

$Ker(\psi_a) \neq \{0\}$, c'est un idéal de $\mathbb{K}[X], \exists! P_0 \in \mathbb{K}[X]$ unitaire non nul tel que $Ker(\psi_a) = P_0\mathbb{K}[X]$: P_0 est le polynôme minimal de a : $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0 \Leftrightarrow P_0|P$

$\deg(P_0) = n \Rightarrow (1; a; ...; a^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[a]$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[a]) = n < +\infty$

Preuve : $\psi_a(1) = 1$

$$\forall (x, y, \lambda) \in \mathcal{K}[X]^2 \times \mathbb{K}, P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k X^k, Q(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k X^k$$

$$\begin{aligned} \psi_a(\lambda P + Q) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (\lambda\alpha_k a^k + \beta_k a^k) \\ &= \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k a^k + \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k a^k \\ &= \lambda P(a) + Q(a) \\ &= \lambda\psi_a(P) + \psi_a(Q) \end{aligned}$$

$$\psi_a(PQ) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k a^k / \forall k \in \mathbb{N}, \gamma_k = \sum_{i_1+i_2=k} \alpha_{i_1}\beta_{i_2} a^k$$

$$\begin{aligned}\psi_a(P)\psi_a(Q) &= (\sum_{i_1\in\mathbb{N}}\alpha_{i_1}a^{i_1})(\sum_{i_2\in\mathbb{N}}\beta_{i_2}a^{i_2})\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}(\sum_{i_1+i_2=k}\alpha_{i_1}\beta_{i_2})a^k\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k a^k\\ &= \psi_a(PQ)\end{aligned}$$

$Im(\psi_a)$ est une sous-algèbre contenant $a = X(a)$. D'autre part $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ contenant a, par stabilité pour $\times, 1\in\mathcal{B}, \forall k\in\mathbb{N}, a^k\in\mathcal{B}$, par combinaison linéaire : $\forall P\in\mathbb{K}[X], P(a)\in\mathcal{B}$ donc $\mathbb{K}[a]\subset\mathcal{B}$

$\mathbb{K}[a]$ est la sous-algèbre engendrée par a

$Ker(\psi_a)=\{0\}$, soit $n\in\mathbb{N}, \alpha_k\in\mathbb{K}$

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a^k = 0, P(X)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k X^k$$

$P(a)=0\Rightarrow P\in Ker(\psi_a)$
$P=0\Rightarrow\forall k\in[|0;n|], \alpha_k=0$

La famille (α_k) est libre

$Ker(\psi_a)\neq\{0\}\Rightarrow\exists! P_0\in\mathbb{K}[x]$ unitaire$/Ker(\psi_a)=P_0\mathbb{K}[X]$. Soit

$$(\alpha_k)/\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k a^k=0, P(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k X^k$$

$P(a)=0\Rightarrow P|P_0$, ainsi $(1;a;...;a^{n-1})$ est libre. Par ailleurs soit $A\in\mathbb{K}[X]$, par division euclidienne par $P_0, A=QP_0+R/\deg(R)\leq n-1$

$$A(a)=Q(a)P_0(a)+R(a)=R(a)\in Vect_{\mathbb{K}}[1,...,a^{n-1}]$$

, donc la famille $(1;a;...;a^{n-1})$ est génératrice de $\mathbb{K}[a]$

Cas où $\mathcal{A}=\mathbb{L}$ est un sur-corps de $\mathbb{K}$

> Soit $a\in\mathbb{L}$, ou bien $\forall P\in\mathbb{K}[X]^*, P(a)\neq 0$, on dit que a est transcendant sur $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[a])=+\infty$
> Ou bien : $\exists P\in\mathbb{K}[X]^*, P(a)=0$, on dit que a est algébrique sur $\mathbb{K}$
> Dans ce cas, soit P_0 son polynôme minimal :
>
> a est irréductible sur $\mathbb{K}\Rightarrow P_0$ irréductible sur $\mathbb{K}\Rightarrow\mathbb{K}[a]$ est un corps
>
> Par ailleurs, Q irréductible unitaire sur $\mathbb{K}$ annulateur de a, alors $Q=P_0$

Preuve : Supposons que $\exists(P_1,P_2)\in\mathbb{K}[X]/P_0=P_1P_2$

$$\begin{aligned}P_0(a)=P_1(a)P_2(a) &\Rightarrow P_1(a)P_2(a)=0\\ &\Rightarrow P_1(a)=0 \text{ ou} P_2(a)=0, \mathbb{L} \text{ est un corps}\\ &\Rightarrow P_0|P_1 \text{ ou} P_0|P_2\end{aligned}$$

$i \in \{1;2\}/P_0|P_i$ ils sont associés, P_0 est irréductible sur $\mathbb{K}$. D'autre part, soit $x_0 \in \mathbb{K}[a]^*$ et : $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{K}[a] & \to & \mathbb{K}[a] \\ & & x & \mapsto & x_0x \end{array}$ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[a])$, injective car $Ker(f) = \{0\}$ Comme $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[a]) < +\infty$, f est bijective : $\exists x \in \mathbb{K}[a]/x_0x = 1, x = x_0^{-1} \in \mathbb{K}[a]$
Une autre méthode consiste à utiliser le théorème de Bézout et le fait que deux polynômes irréductibles qui se divisent sont associés.
Le degré d'algébricité est défini comme étant $n = \deg(P_0) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[a])$

Exemples

1. $X^2 - 2$ est irréductible qur $\mathbb{Q}[X]$, il annule $\sqrt{2}$, qui est donc algébrique de degré 2 sur $\mathbb{Q}[X]$
2. Tout les rationnels sont algébrique de degré 1 sur $\mathbb{Q}$: $X - a/a \in \mathbb{Q}7$
3. $)X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ et annule $\sqrt[3]{2}$, qui est donc algébrique de degré 3 : $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3, a + b\sqrt[3]{2}c\sqrt[3]{4} = 0$, soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{Q}[X], P(\sqrt[3]{2}) = 0$
   En considérant $I = \{A \in \mathbb{Q}[X]/A(\sqrt[3]{2}) = 0$, $\exists! P_0$ unitaire$/I = P_0\mathbb{Q}[X]$, or $X^3 - 2 \in I$ irréductible donc :
   $$X^3 - 2|P \Rightarrow P = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$$
4. e et π sont transcendants

1.6.3 Théorème de Liouville (HP)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré supérieur ou égal à 2. Soit$P_0 \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible unitaire sur $\mathbb{Q}$ son polynôme minimal. En multipliant par le PPCM des dénominateurs des coefficients de P_0, on obtient $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q} \setminus \{P_1(\alpha)\} = 0$. $\deg(P_1) = \deg(P_0) = d \geq 2$
Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, P_1(\frac{p}{q}) \neq 0$ car P_1 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré ≥ 2.
Alors : $q^d P_1(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}^*$ et $|q^\alpha P_1(\frac{p}{q})| \geq 1$, il vient :

$$\frac{1}{q^\alpha} \leq |P_1(\frac{p}{q})| = |P_1(\frac{p}{q}) - P_1(\alpha)|$$

Supposons $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1; \alpha + 1]$, notons $M = \sup\limits_{x \in [\alpha-1;\alpha+1]} |P'(x)| > 0$. Si $P_1' = 0$ sur $[\alpha - 1; \alpha + 1]$, P_1 est constant, impossible. Dans ce cas

$$\tfrac{d}{q} \leq M|\tfrac{p}{q} - \alpha| \Rightarrow |\tfrac{p}{q} - \alpha| \geq \tfrac{1}{Mq^d}$$

Si $|\frac{p}{q} - \alpha| > 1 \geq \frac{1}{q^d}$, en posant $c = \min(1; \frac{1}{M}$, on a :

$$\boxed{\text{a est algébrique de degré d } \Rightarrow \exists c > 0/\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, |\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{p^d}}$$

Cas de $\sqrt{2}$

Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$
$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| = \frac{1}{q}|q\sqrt{2} - p| = \frac{1}{q}\frac{|2q^2 - p^2|}{q\sqrt{2} + p} = \frac{1}{q|q\sqrt{2} + p|}$
Or , $|q\sqrt{2} + p| = |p - q\sqrt{2} + 2q\sqrt{2}| \leq |p - q\sqrt{2}| + 2q\sqrt{2} = q|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| + 2q\sqrt{2}$
$|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| \leq 1 \Rightarrow |q\sqrt{2} + p| \leq (2\sqrt{2} + 1)q \Rightarrow |\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^2(2\sqrt{2}+1)}$
$\sqrt{2}$ est mal approché par des rationnels

Corollaire

Soit $x \in \mathbb{R}, \exists A > 0$ et $\exists (q_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \forall n \in \mathbb{N}, q_n \geq 2$ et $\exists (p_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

$$0 < |x - \tfrac{p_n}{q_n}| \leq \tfrac{A}{q_n^n}$$

alors x est transcendant

Preuve : si $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} / (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < |q_n p - q p_n| \leq \frac{Aq}{q_n^{n-1}} \leq \frac{Aq}{2^{n-1}}$
Alors $q_n p - q p_n \in \mathbb{Z}^*, 1 \leq |q_n p - q p_n| \leq \frac{Aq}{2^{n-1}}$, ce qui est absurde lorsque n tend vers $+\infty$
Si x était algébrique, d'après le théorème de Liouville :

$$\exists c > 0 / \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, |\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{p^d}$$

$\frac{c}{(q_n)^d} \leq |x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{A}{(q_n)^n} \Rightarrow 0 < c \leq \frac{A}{q_n^{n-d}} \leq \frac{A}{2^{n-d}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
ce qui est absurde donc x est transcendant

Exemple

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,1100010...$$

cette série converge car elle est majorée par la série à termes positifs géométrique de raison 0.1 .
Soit : $\frac{p_n}{10^{n!}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$

$$\begin{aligned} |x - \frac{p_n}{10^{n!}}| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \\ &\leq \frac{10}{9 \times 10^{(n+1)!}} \\ &\leq \frac{10}{9 \times (10^{n!})^n} \end{aligned}$$

x est transcendant

1.7 Compléments

1.7.1 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ avec $G \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*$:

$\alpha > 0$: $\alpha \in G$ et $G = \alpha\mathbb{Z}$ est monogène
$\alpha = 0$: G est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve : cf cours de MPSI

1.7.2 Applications

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$
Preuve : $G = \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par a et 1. S'il existait $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$ alors $\exists (n,m) \in (\mathbb{Z}^*)^2 / 1 = n\alpha$ et $a = m\alpha$, d'où $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ absurde

Corollaire

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Z} + a\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ est encore dense dans $\mathbb{R}$

Exemples

1. Si $\frac{a}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{Z} + \frac{a}{2\pi}\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $2\pi\mathbb{Z} + a\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$
2. Par continuité de sin et exp, il vient que $\{sin(na)/n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1;1]$ et $\{\exp(ina)/n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$

1.7.3 Polynômes de Tchebychev

Définitions, propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = Re((e^{i\theta})^n) = Re((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n)$

$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (i\sin(\theta))^{2k} (\cos(\theta))^{n-2k}$$

On pose :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$

C'est l'unique polynôme de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On a les propriétés suivantes :

1. $\deg(T_n) = n$
2. $\gamma(T_n) = 2^{n-1}$
3. $T_n \in \mathbb{Z}[X]$
4. T_n a la même parité que n
5. $\forall x \in [-1;1], T_n(x) = \arccos(n\cos(x))$
6. Les polynômes de Tchebychev vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

   avec $T_0 = 1$ et $T_1 = X$
7. $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n = T_{nm}$

Polynômes de Tchebychev de seconde espèces

En dérivant, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$:

$$\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta) \Rightarrow \sin(n\theta) = \frac{\sin(\theta)}{n}T_n'(\cos(\theta))$$

Si n est impair, T_n est impair, donc T_n' est pair et

$$\sin(n\theta) = U_n(\sin(\theta)) \in \mathbb{Z}[X]$$

Si n est pair, T_n' est impair, donc :

$$\sin(n\theta) = \cos(\theta)V_n(\sin(\theta))$$

Des calculs analogues à ceux réalisé pour les polynômes de premières espèces montrent que :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}$$

Les racines du polynôme U_n sont de la forme : $\alpha_k^{(n)} = \cos(\frac{k\pi}{n+1})$
Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce vérifient l'équation différentielle suivante :

$$(1-X^2)U_n''(X) - 3XU_n'(X) + n(n+2)U_n(X) = 0$$

En dérivant, on obtient les relations suivantes :

$$n^2\cos(n\theta) = \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = \sin(\theta)^2 T_n''(\cos(\theta))$$

On obtient une équation différentielle vérifiée par les polynômes de Tchebychev :

$$(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$$

En posant :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}X^k$$

Il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-2}((k(k-1)+k-n^2)a_{k,n} - (k+1)(k+2)a_{k+2,n})X^k + ((n-1)(n-2)+n-1-n^2)a_{n-1,n}X^{n-1} + (n(n-1)+n-n^2)a_{n,n}X^n$$

d'où $a_{n,n} = 2^{n-1}$ et $a_{n-1,n} = 0$, par parité. Par récurrence descendante :

$$\forall k \in [|0; E(\frac{n-1}{2})|], a_{n-(2k+1),n} = 0$$

$$\forall k \in [|0; E(\frac{n}{2})|], a_{n-2k,n} = \frac{(n-2k+1)...(n-1)n \times 2^{n-1}}{((n-2k)^2-n^2)...((n-2)^2-n^2)}$$

$$a_{k,n} = \frac{(k+1)(k+2)}{k^2-n^2}a_{k+2,n} \Rightarrow a_{n-2k,n} = \frac{(-1)^k n! 2^{n-1}(n-k-1)!}{(n-2k)! 2^{2k} k!(n-1)!}$$

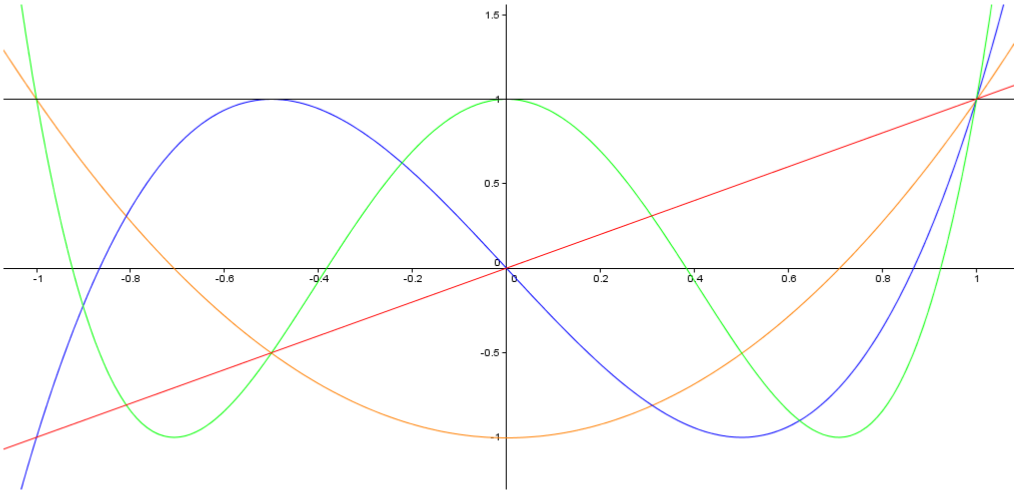


FIGURE 1.2 – Polynômes de Tchebychev de première espèce

Propriétés analytiques

$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k) \text{ avec } x_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) \in]-1;1[$$

$\forall x \in [-1;1], |T_n(x)| \leq 1$
$T_n(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \cos(\frac{2k\pi}{n})$
$T_n(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \cos(\frac{2k+1}{n}\pi)$

Théorème

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]/\deg(P) = n, \gamma(P) = 2^{n-1}$

$$\sup_{x\in[-1;1]} |P(x)| = 1 \Leftrightarrow P = T_n$$

On pose $y_p = \cos(\frac{p\pi}{n}, T_n(y_p) = (-1)^p$, si $||P||_\infty < 1$ alors $\forall x \in [-1;1], |P(x)| < 1$, car le sup est atteint : $\deg(P - T_n) \leq n - 1$

$$\forall p \in [|0;n-1|], (P - T_n)(y_p)(P - T_n)(y_{p+1}) = (P(y_p) - (-1)^p)(P(y_{p+1} - (-1)^{p+1}) < 0$$

$P - T_n$ s'annule sur chaque $]y_p; y_{p+1}[, p \in [|0;n-1|]$, donc au moins n fois : nécessairement, $P - T_n = 0$, ce qui est impossible car $||T_n||_\infty = 1$
Si $||P||_\infty = 1, \forall x \in [-1;1], |P(x)| \leq 1, \forall p \in [|0;n-1|], (P - T_n)(y_p)(P - T_n)(y_{p+1}) \leq 0, P - T_n$ s'annule au moins une fois sur $[y_p; y_{p+1}]$
Si $P - T_n$ s'annule en y_{p+1} avec $p \leq n-2$ et y_p avec $p \geq 1$, points intérieurs à $[-1;1]$ et $P'(y_p) = T_n'(y_p) = 0$, extrêma intérieur. En dénombrant les multiplicités, $P - T_n$ s'annule au moins n fois : $P - T_n = 0 \Rightarrow P = T_n$

1.7.4 Produit de convolution

Définition

Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes, on note $f * g$ leur produit de convolution :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Pour des suites (u_n) et (v_n) réelles ou complexes, on définit leur produit de convolution :

$$(u * v)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_{n-m}v_m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m v_{n-m}$$

Propriétés

Les produits de convolution continu ou discret vérifient les propriétés suivantes :

1. Commutativité
2. Distributivité du produit de convolution sur l'addition
3. Associativité
4. Compatibilité avec les translations : on définit $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$
$$((\tau_h f) * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t-h)g(t)dt = (\tau_h(f * g))(x)$$
5. Intégration :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)dt = (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt)(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt)$$
6. Dérivation : si f et g sont deux fonctions complexes dérivables,
$$(f * g)' = f' * g = f * g'$$
7. Si f et g sont paires alors $(f * g)$ est paire

Chapitre 2

Séries numériques et familles sommables

Sommaire

2.1 Suites réelles et complexes

2.1.1 Rappels

Définitions

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon}$$

En d'autres termes : $\forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} / |u_n - l| < \varepsilon\}$ est fini

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$

Suites adjacentes

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles, on dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

1. (a_n) est croissante
2. (b_n) est décroissante
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$

alors a_n et b_n convergent vers une même limite

Exemples

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \\
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)((n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \\
v_n - u_n &= \frac{1}{n \times n!}
\end{aligned}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, on note e leur limite commune :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < e < v_n$ .Si e était rationnel : $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

$$q!q < \tfrac{p}{q} q! < q!q + \tfrac{1}{q} \leq q!u_q + 1, \text{ absurde : } e \notin \mathbb{Q}$$

$$0 < \sum_{k=0}^{n} u_k = e - u_n < \frac{1}{n \times n!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ et } v_n = \frac{1}{n+1} + u_n$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} + \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \end{aligned}$$

Lemme : inégalité de convexité de ln : $\forall x > -1 \ln(x+1) \leq x$, cette preuve découle immédiatement d'une étude de fonction : $f(x) = x - \ln(1+x)$, d'où

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} > 0 \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} + \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note γ, la constante d'Euler leur limite commune. Notons qu'on a :

$$u_n - \gamma = o(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2.1.2 Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition

Soit $u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geq n$. On dit que $(u_{\sigma(n)})$ est extraite de (u_n).
On dit que λ est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si :

$$\exists \sigma \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / u_{\sigma(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

Exemples

1. $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{n^2}) sont extraites de (u_n)
2. 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de $(-1)^n$

Propriétés

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \forall \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, u_{\sigma(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$
2. λ est valeur d'adhérence de $(u_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} / |u_n - \lambda| \leq \varepsilon\}$ est infini
3. Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite réelle ou complexe bornée admet au moins une valeur d'adhérence

Preuve :

2. Soit $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/u_{\sigma(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/n \geq N \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - l| \leq \varepsilon$
alors, $\{\sigma(n)/n \geq N\} \subset \{k \in \mathbb{N}/|u_k - \lambda| \leq \varepsilon\}$ est infini

Réciproquement : on va construire σ par récurrence, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma(n)} - \lambda| \leq \frac{1}{n+1}$
Définissons : $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N}/|u_k - \lambda| \leq 1\}$
Soit $n \in \mathbb{N}, \sigma(0) < \sigma(1) < ... < \sigma(n)$ définie telle que :

$$\forall m \in [|0; n|], |u_{\sigma(n)} - \lambda| \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}/|u_{\sigma(k)} - l| \leq \frac{1}{n+2}\}$ est infini, on peut définir :

$$\sigma(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N}/|u_k - \lambda| \leq \frac{1}{n+2} \text{ et } k > \sigma(n)\}$$

On a bien défini la suite $(u_{\sigma(n)})$ extraite de (u_n) par récurrence, tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = \lambda$$

Remarque

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, non méjorée alors $+\infty$ est valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}/u_n > A$$

On peut construire σ par récurrence telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\sigma(n)} \geq n \Rightarrow u_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Exemple

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ suite de rationnels qui converge vers α. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} |p_n| = +\infty$$

Supposons que limite de (q_n) ne tende pas vers $+\infty$:

$$\exists A > 0/\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, q_n < A$$

donc $\{n \in \mathbb{N}/q_n < A\}$ est infini, on peut donc extraire $(q_{\sigma(n)})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, q_{\sigma(n)} < A$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire $(q_{\varphi(n)})$ qui converge vers $q \in \mathbb{R}$. Notons que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang : donc $q \in \mathbb{N}^*$. Or $\forall n \in \mathbb{N}, p_{\varphi(n)} = r_{\varphi(n)} q_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha q$. ($p_{\varphi(n)}$ est une suite convergente d'entiers relatifs stationnaire : $\alpha q \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, absurde : $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$. On en déduit le résultat souhaité

Corollaire

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée, elle est convergente si et seulement si elle admet une seule valeur d'adhérence

Preuve :si (u_n) est convergente vers l, la seule valeur d'adhérence est l.
Réciproquement : soit l la seule valeur d'adhérence de (u_n). Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que $\{n \in \mathbb{N}/|u_n - l| > \varepsilon\}$ est infini. On peut donc extraire $(u_{\sigma(n)})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma(n)} - l| > \varepsilon$$

$(u_{\sigma(n)})$ est bornée car (u_n) l'est, on peut extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $(u_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - l| > \varepsilon \Rightarrow |l' - l| \geq \varepsilon$$

absurde. Attention ceci est faux si la suite n'est pas bornée

2.1.3 Théorème de Césaro (HP)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in \mathbb{K} \cup \{+\infty; -\infty\}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = l$$

Preuve : $l \in \mathbb{K}$, on pose

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |c_n - l| \leq |\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - l)|$$

Soit

$$\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall k \geq N, |u_k - l| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq N \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n} (u_k - l) \leq \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{n-N+1}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par ailleurs $\varepsilon > 0$ étant fixé , N aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - l) = l$$

$$\exists N' \in \mathbb{N}/n \geq N', \frac{1}{n+1} \sum_{N'-1}^{k=0} |u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}/n \geq \max(N, N'), |c_n - l| \leq \varepsilon$
$l = +\infty$: Soit $A \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N : u_k \geq 3A$

$$n \geq N, c_n = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k) \leq \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{N-1} u_k + 3A \times \frac{n-N+1}{n+1})$$

A et N étant fixés , $\exists N' \in \mathbb{N}/\forall n \geq N', \frac{n-N+1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$

$$\exists N'' \in \mathbb{N}/\forall n \geq N'', \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \geq \frac{1}{2}$$

$\forall n \geq \max(N, N', N''), c_n \geq A \Rightarrow c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
⚠La réciproque est fausse : $(-1)^n$

2.2 Séries numériques

Soient (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dans toute cette partie

2.2.1 Généralités

Définition

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On appelle série de terme général u_n notée $\sum u_n$ la suite (S_n). On dit que $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) converge , dans ce cas on note :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = S - S_n$$

⚠On ne manipule jamais la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ avant d'avoir prouvé ou supposé la convergence de la série

Propriétés

1. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ sinon on dit que la série est grossièrement divergente

2. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

3. u_n converge $\Leftrightarrow \sum(u_{n+1} - u_n$ converge

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

Preuve :

1. $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la réciproque, par exemple avec la série harmonique

Remarque

Pour calculer une série on détermine la limite des sommes partielles

Séries géométriques

$z \in \mathbb{C}, \sum z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Exemple

Soit $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^n dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-t)^n dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} dt \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

$$|\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2}$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Nature et somme de $\sum \frac{1}{n(2n+1)}$. Elle est convergente d'après le critère des séries de Riemann.

$$\frac{1}{X(2X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{2}{2X+1}$$

$$\begin{aligned}
S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n+1)} &= H_N - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} \\
&= 2(H_N - H_{2N+1}) + 2 \\
&= 2(\gamma + \ln(N) - \ln(2N+1) - \gamma + o(1)) + 2 \\
&= 2\ln(\frac{N}{2N+1}) + 2 + o(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 - 2\ln(2)
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln(2)$$

⚠Ne pas écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{2n+1}$$

2.2.2 Séries à termes positifs

Définition

Soit $\sum a_n$ une série telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que c'est une SATP. La suite des sommes partielles est croissante, elle converge si et seulement si elle est majorée. On écrit dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

En cas de divergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

Remarque

Les critères spécifiques aux SATP restent valide lorsqu'il ne s'applique qu'à partir d'un certain rang

Théorème de comparaison

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux SATP :

$$\begin{aligned} a_n = O(b_n) : \sum b_n \text{ converge} \quad &\Rightarrow \quad \sum a_n \text{ converge} \\ \sum a_n \text{ diverge} \quad &\Rightarrow \quad \sum b_n \text{ diverge} \\ a_n \sim b_n : \sum a_n \text{ converge} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum b_n \text{ converge} \end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned} a_n = O(b_n) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N |a_n| \leq M|b_n| \\ a_n = o(b_n) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n| \leq \varepsilon |b_n| \\ a_n \sim b_n \quad &\Leftrightarrow \quad a_n - b_n = o(b_n) \end{aligned}$$

2.2.3 Comparaison série intégrale

Soit $A \in \mathbb{R}^+, f : [A; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue, positive, décroissante :

1. $\forall n \in \mathbb{N}/n \geq A, f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}/n \geq A, w_n = f(n) - \int_n^{n+2} f(t)dt \geq 0$ la SATP $\sum w_n$ converge
3. $\sum\limits_{\geq A} f(n)$ converge $\Leftrightarrow (\int_A^{n+2} f(t)dt)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Preuve :

1. $\forall t \in [n; n+1], f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \Leftrightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$
2. $0 \leq w_n \leq f(n) - f(n+1)$ or $(f(n))$ est décroissante positive donc elle converge, donc la somme télescopique aussi. Par comparaison $\sum w_n$ converge
3. $$\sum_{n=E(A)}^{N} f(n) = \sum_{n=E(A)}^{N} w_n + \sum_{n=E(A)}^{N} \int_n^{n+1} f(t)dt = \sum_{n=E(A)}^{N} w_n + \int_{E(A)}^{N+1} f(t)dt$$

Critère de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}$$

$$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge}$$

Séries de Bertrand (HP)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

$\alpha < 1, \frac{1}{n} = o(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}) = O(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta})$, diverge

$\alpha > 1 : \beta \geq 0 : \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = O(\frac{1}{n^\alpha})$, converge

$\beta < 0 : \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = O(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}})$, converge

$\alpha = 1, \beta \leq 0 \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n \ln(n)^\beta})$, diverge

$\beta > 0 : \begin{array}{cccc} f & : & [2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{t\ln(t)^\beta} \end{array}$

$$\begin{aligned} \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^\beta} &= [-\frac{1}{\beta+1}\ln(t)^{1-\beta}]_2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \text{ ssi } \beta > 1 \\ &= [\ln(\ln(t))]_2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ si} \beta = 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta \geq 1$$

Équivalents des restes des sommes partielles

Soit $\alpha \in]1;+\infty[$, on pose :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

fonction zêta de Riemann. D'après le théorème de comparaison : $\begin{array}{cccc} f & : & [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{t^\alpha} \end{array}$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} &\Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}) \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{\alpha-1}(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \\ &\Leftrightarrow R_{N+1} \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{N^{\alpha-1}} \leq R_N \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^\alpha} \leq R_{N+1} \leq \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$$

Soit $\alpha \in]0;1[$ avec la même fonction :

$$\forall n \geq 1 \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}[(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}] \leq \frac{1}{n^\alpha} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1-\alpha}[(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}] \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N^\alpha} \sim \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2.2.4 Règle de d'Alembert

Comparaison géométrique

Dans cette partie $\sum u_n$ et $\sum v_n$ désignent des SATP
$\exists N \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}/n \geq N, u_n > 0$ et $v_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge
$\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

Preuve : $u_n \leq u_N \frac{v_n}{v_N} = O(v_n)$

Théorème

On suppose de plus : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$
Si $l < 1$: $\sum u_n$ converge
Si $l > 1$: $\sum u_n$ diverge
Si $l = 1$: on ne peut pas conclure en général, néanmoins si $\exists N' \in \mathbb{N}/\forall n \geq N', \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors (u_n) est croissante minorée par 1, elle ne tend pas vers 0 : $\sum u_n$ diverge grossièrement

Preuve : $l > 1$, $\exists N' \in \mathbb{N}/\forall n \geq N', \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$, alors (u_n) est croissante minorée par 1, elle ne tend pas vers 0 : $\sum u_n$ diverge grossièrement
$l < 1, \exists N'' \in \mathbb{N}/\forall n \geq N'', \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{l+1}{2}$, d'après le théorème de comparaison géométrique :

$$(\frac{l+1}{2})^n = v_n, \sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ aussi}$$

Exemples

Soit $z \in \mathbb{C}, u_n = |\frac{z^n}{n!}|$
Si $z \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
D'après la règle de d'Alembert , $\sum u_n$ converge donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, donc elle converge. On définit :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$ch(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}$$

$$\cos(z) = ch(iz) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$$

$$sh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(z) = \frac{sh(iz)}{i} = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

⚠Même lorsque $u_n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne converge pas forcement : $\begin{cases} u_{2n} = 1 \\ u_{2n+1} = 2 \end{cases}$

Règle de Raab-Duhamel (HP)

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} / \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, alors :

$$\exists K \mathbb{R}_+^*, u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$$

$\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Preuve : Montrons que $u_n n^\alpha$ converge, ce qui équivaut à $\ln(u_n n^\alpha)$ converge dans $\mathbb{R}$. On pose $v_n = \ln(u_n n^\alpha)$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}(\frac{n+1}{n})^\alpha) \\
&= \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) + \alpha \ln(1 + \frac{1}{n}) \\
&= \ln(1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}) + \alpha(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})) \\
&= -\frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}) + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \\
&= O(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

La série télescopique $\sum v_{n+1} - v_n$ est absolument convergente, donc elle converge. La série $\sum v_n$ converge , donc $\sum u_n$ aussi

Exemple

Nature de la série :

$$\sum_{n \geq 2} (\prod_{k=2}^{n} (2 - e^{\frac{1}{k}}))$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - e^{\frac{1}{n+1}} = 2 - (1 + \frac{1}{n+1} + O(\frac{1}{n^2}) = 1 - \frac{1}{n+1} + O(\frac{1}{n^2})$$

D'après la règle de Raab-Duhamel, $\alpha = 1$ donc $\sum u_n$ diverge. Une autre méthode consiste à passer au ln puis utiliser le critère de Riemann

Formule de Stirling

$$\boxed{n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2n\pi}}$$

Preuve : formons $u_n = \frac{n!e^n}{n^n}$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)en^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} &= \exp(1-n\ln(1+\frac{1}{n}))\\ &= \exp(1-n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3}))\\ &= \exp(\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})\\ &= 1+\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

D'après la règle de Raab-Duhamel : $u_n \sim K\sqrt{n}$
Rappel sur les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt > 0$$

Par intégration par parties : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$
Il vient : $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)...1}{2p(2p-2)...2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$
De plus : $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow 0 < \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \Rightarrow I_{n+1} \sim I_n$$

Soit $W_n = (n+1)I_nI_{n+1}$, on a $W_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_nI_{n+1} = W_n = W_0 = \frac{\pi}{2}$
On en déduit : $W_n \sim nI_n^2 \Leftrightarrow I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
donc, $I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

$$\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{K}\sqrt{\frac{2}{p}}$$

d'où $K = \sqrt{2\pi}$

Remarque

$n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2n\pi} \Rightarrow \ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1)$

Séries lacunaires

Si $\{n \in \mathbb{N}/u_n > 0\}$ est infini, on peut extraire $(u_{\sigma(n)})$ telle que $\left\{\begin{array}{c}\forall k \in \mathbb{N}, u_{\sigma(k)} > 0\\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\sigma(\mathbb{N}), u_n = 0\end{array}\right.$

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum u_{\sigma(n)} \text{ converge}$$

Preuve :

$$\forall N \in \mathbb{N} \sum_{k=0}^{N} u_{\sigma(k)} = \sum_{n=0}^{\sigma(N)} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

On peut étudier $\frac{u_{\sigma(n+1)}}{u_{\sigma(n)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$ avec la règle de d'Alembert

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} a_n = 0 \text{ si } n \equiv 0 \text{ ou } 1[3] \\ a_{3p+2} = 2^p \end{cases}$ Etudier $\sum a_n x^n$

On pose $\begin{array}{cccc} \sigma & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & p & \mapsto & 3p+2 \end{array}$

$$\frac{u_{\sigma(n+1)}}{u_{\sigma(n)}} = 2\frac{x^{3p+5}}{x^{3p+2}} = 2x^3$$

$x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sum a_n x^n$ converge
$x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sum a_n x^n$ diverge
$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sum a_n x^n$ diverge grossièrement

2.2.5 Sommation des relations de comparaison

Théorème

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux SATP. On suppose $a_n = O(b_n)$ (resp. $o(b_n)$, $\sim b_n$) :

1. $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n = O(\sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n)(\text{ resp.} o(\sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n), \sim \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n)$$

2. $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge :

$$\sum_{n=0}^{N} b_n = O(\sum_{n=0}^{N} a_n)(\text{ resp. } o(\sum_{n=0}^{N} a_n), \sim \sum_{n=0}^{N} a_n)$$

Preuve : $\sum b_n$ converge , si $a_n = O(b_n)$ alors
$\exists M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n \leq M b_n$
$\forall \varepsilon, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', a_n \leq \varepsilon b_n$
$\forall \varepsilon, \exists N'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'', |a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n = M \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n, (\text{ resp. } \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n), (\text{ resp.} |\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n - b_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n - b_n| \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n$$

Si $\sum a_n$ diverge , si $a_n = o(b_n)$. Notons que $\sum_{n=0}^{N} a_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
Soit $\varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', a_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$0 \leq \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N'-1} a_n + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N'}^{N} b_n \leq \sum_{n=0}^{N'-1} a_n + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{N} b_n$$

ε étant fixé , N' l'est aussi et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N'-1} a_n}{\sum_{n=0}^{N} b_n} = 0$
donc ,

$$\exists N'' \in \mathbb{N}/\forall N \geq N'', \sum_{n=0}^{N'-1} a_n \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{N} b_n$$

Finalement :

$$\forall N \geq \max(N', N''), \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{N} b_n$$

Exemple

On sait que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + \ln(n) + o(1)$$

, on pose $u_n - \ln(n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1) \\
&= \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \\
&= -\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3}) \\
&= -\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3}) \\
&= \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3}) \\
&\sim \frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty}(u_n - u_{n+1}) \sim \frac{1}{2}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{2N}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} = \ln(N) + \gamma + \frac{1}{2N} + o(\frac{1}{N})$$

Étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[, \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = \sin(u_n)$. Étude et équivalent de u_n
$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ donc u_n converge, par continuité de sin :

$$u_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Méthode générale : On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ qu'on fixera plus tard de sorte que , $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ est un équivalent simple

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^\alpha &= (\sin(u_n))^\alpha \\
&= (u_n - \frac{u_n^3}{6} + O(u_n^5))^\alpha \\
&= u_n^\alpha(1 - \frac{u_n^2}{6} + O(u_n^4))^\alpha \\
&= u_n^\alpha(1 - \alpha\frac{u_n^2}{6} + O(u_n^{4+\alpha})) \\
u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= -\frac{\alpha}{6}u_n^{\alpha-2} + O(u_n^{4\alpha})
\end{aligned}$$

On fixe $\alpha = -2$: $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + O(u_n^2)$

D'après le théorème de comparaison des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \sim \frac{n}{3} \Rightarrow u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Un peu plus loin :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_n^2} = \sin(u_n)^{-2} &= (u_n - \frac{u_n^3}{6} + \frac{u_n^5}{120} + O(u_n^7))^{-2} \\
&= \frac{1}{u_n^2}(1 + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{15} + O(u_n^6)) \\
&= \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + \frac{u_n^2}{15} + O(u_n^4)
\end{aligned}$$

Par des arguments similaires et des simplifications, il vient :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n^{3/2}}$$

2.2.6 Séries de signe quelconque

Critère spécial des séries alternées

Soit $\sum a_n$ une série alternée , on suppose :

1. $a_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. $(|a_n|)$ décroît

Dans ce cas :

1. $\sum a_n$ converge
2. elle est du même signe que a_0 et
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq a_0$$
3. De plus le reste au rang n est du signe de a_n, avec la majoration suivante : $|R_n| \leq |a_n|$

Preuve : cf cours MPSI

Remarque

Le critère spécial s'applique encore si la décroissance de a_n n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, mais 2) ne s'applique plus

Exemples

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq\alpha} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

1. Si $\alpha \leq 0$: divergence grossière
2. Si $\alpha > 1$: convergence (CDR)
3. Si $\alpha \in]0;1[$: convergence (CSSA)

Notons que :

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n})^\alpha - \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n+1})^\alpha = p(\alpha) - i(\alpha)$$

$p(\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{2^\alpha}$
$p(\alpha) + i(\alpha) = \zeta(\alpha) \Rightarrow i(\alpha) = \zeta(\alpha) - p(\alpha) \Rightarrow i(\alpha) = \zeta(\alpha)(1 - \frac{1}{2^\alpha})$
d'où $g(\alpha) = \zeta(\alpha)(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - 1)$
On peut prolonger la fonction ζ dans $]0;1[$

Séries de Bertrand alternées : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ soit

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

1. $\alpha < 0$: divergence grossière
2. $\alpha = 0$ et $\beta \leq 0$: divergence grossière
3. $\alpha = 0$ et $\beta > 0$: convergence (CSSA)
4. $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$: convergence (CSSA)
5. $\alpha > 0$ et $\beta < 0$: on forme $\begin{array}{cccc} f & : & [2;+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \end{array}$
   $\forall t \in [2;+\infty[, f'(t) = (-\beta - \alpha\ln(t))\frac{\ln(t)^{-\beta-1}}{t^{\alpha+1}}$
   Cette fonction est donc décroissante a partir de $x_0 = e^{\frac{-\beta}{\alpha}}$, en appliquant le CSSA, il vient que la série considérée converge

⚠La règle de comparaisons des termes généraux ne s'applique lorsque le terme général change de signe

Protocole d'étude

Soit $\sum a_n$ une série numérique :

1. On définit le genre de la série
2. Si le terme général ne tend par vers 0 : divergence grossière
3. On examine la convergence absolue
4. On cherche à appliquer le CSSA si c'est une série alternée
5. On cherche à appliquer la règle de d'Alembert
6. On cherche à effectuer un développement asymptotique : on s'arrête lorsqu'on rencontre un $O(\frac{1}{n^\alpha})$ avec $\alpha > 1$ ou bien lorsqu'on rencontre un terme équivalent d'une série de signe constant. On peut aussi à faire une décomposition en éléments simples

Exemple

Soit $\alpha \in \mathbb{R}, u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$
Si $\alpha < 0$: divergence grossière
Si $\alpha > 1$: $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$ convergence absolue
Si $\alpha]0;1]$: la série est alternée, mais le CSSA ne s'applique pas

$$\begin{aligned} u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})) \end{aligned}$$

D'après le CDR, $\sum u_n$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$

2.3 Familles sommables

2.3.1 Dénombrabilité

Définition

On dit que deux ensembles A et B sont équipotents si et seulement si il existe une bijection de A dans B
A est dénombrable si et seulement si il est équipotent à $\mathbb{N}$. on peut écrire $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une énumération

Théorème

A est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans A

Preuve :Si il existe $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ surjective, soit $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. En choisissant un représentant de chaque classe, on définit une bijection d'une partie de $\mathbb{N}$ dans

A : si elle est finie, alors A est fini. Si elle est infini, on peut en construire une énumération par récurrence (avec les minimum), donc A est dénombrable Réciproquement : si A est fini, soit $n = card(A)$, alors A est en bijection avec $[|1;n|]$, sinon A est dénombrable alors par définition il est en bijection avec $\mathbb{N}$

⚠Parfois le mot dénombrable signifie en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. On dit au plus dénombrable pour fini ou dénombrable

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est dénombrable
2. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : la diagonale de Cantor basée sur le développement propre décimal des réels en fournit la preuve (cf cours de MPSI). On montre ainsi que $[0;1[$ n'est pas dénombrable
3. $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable, on définit :

$$f : \begin{array}{ccc} \{0;1\}^{\mathbb{N}} & \to & [0;1] \\ (a_n) & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{2^n} \end{array}$$

   f est surjective, on définit : $a_1 = E(2x) \in \{0;1\}$
   $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = E(2^{n+1}x) - a_0 2^{n-1} - ... - a_{n-1}$
   On vérifie que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{2^n} = x$$

   Si $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ était dénombrable alors $[0;1]$ le serait, ce qui est impossible
4. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. En effet :
   $\chi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \{0;1\}^{\mathbb{N}} \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$ χ est bijective

Théorème

1. Si A et B sont finis ou dénombrables alors A $\times$ B est fini ou dénombrable
2. Si $A_1; ...; A_p$ sont finis ou dénombrable alors $A_1 \times ... \times A_p$ est fini ou dénombrable
3. Une réunion finie ou dénombrable d'ensemble dénombrable ou fini l'est aussi

Preuve :

1. Soit (a_n) une énumération de A et (b_n) une énumération de B :

	a_0	a_1	...	a_n	...
b_0	(a_0, b_0)	(a_1, b_0)	...	(a_n, b_0)	...
b_1	(a_0, b_1)	(a_1, b_1)	...	(a_n, b_1)	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	(a_0, b_n)	(a_1, b_n)	...	(a_n, b_n)	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

   On obtient ainsi une énumération de A $\times$ B
2. Par récurrence sur p

3. Soit (A_n) une famille d'ensembles finis ou dénombrables. On peut énumérer $A_{n,p}$. On pose :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{N}^2 & \to & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ & & (n,p) & \mapsto & a_{n,p} \end{array}$$

   est surjective donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est fini ou dénombrable

Exemples

1. $\mathbb{Q}$ est dénombrable : $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* & \to & \mathbb{Q} \\ & & (p,q) & & \frac{p}{q} \end{array}$
   or $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ est dénombrable donc $\mathbb{Q}$
2. $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques est dénombrable :
   En effet : $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{Q}^{n+1} & \to & \mathbb{Q}_{\ltimes}[X] \\ & & (a_0;...;a_n) & \mapsto & \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \end{array}$$

   est bijective, $\mathbb{Q}^{n+1}$ est dénombrable donc $\mathbb{Q}_n[X]$ l'est :

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{Q}_n[X]$$

   est dénombrable. Comme n étant fixé, chaque polynôme de $\mathbb{Q}_n[X]$ a au plus n racines distinctes sur $\mathbb{C}$. On peut définir $A_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ algébrique de } \deg \leq n\}$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X]} \mathcal{A}_p$$

   . On vérifie que A_n est dénombrable et $\overline{\mathbb{Q}}$ aussi

2.3.2 Familles sommables de réels positifs

Définition

Soit I un ensemble et $(a_i) \in \mathbb{R}_+^*$ une famille de réels positifs, on dit que cette famille sommable si et seulement si :

$$\exists M \geq 0 / \forall J \text{ finie} \subset I, \sum_{i\in J} a_i \leq M$$

On peut alors définir :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J \text{ finie} \subset I} (\sum_{i\in J} a_i)$$

Théorème

Si $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$ alors $\{i \in I / a_i > 0\}$ est finie ou dénombrable.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \{i \in I/a_i \geq \frac{1}{n}\}$ On a ainsi

$$\{i \in I/a_i \geq \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Par ailleurs si I est infini, posons :

$$S = \sum_{i \in I} a_i \in \mathbb{R}_+$$

On peut trouver J finie $\subset I_n/card(J) \geq n(S+1)$ alors

$$\sum_{i \in J} a_i \geq \frac{card(J)}{n} \geq S+1$$

absurde. Chaque I_n est fini et $\{i \in I/a_i > 0\}$ est dénombrable

Remarque

Ce résultat nous ramène au cas où I est dénombrable

Suite exhaustive de parties finies

Soit I dénombrable et J_n une suite dite exhaustive de parties finies (SEPF) de I

1. $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset J_{n+1}$
2. $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$$

Soit $(a_i) \in \mathbb{R}_+^I, \sum_{i \in I} a_i < +\infty$ si et seulement si la suite

$$\sum_{i \in J_n} a_i$$

converge, dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i$$

Preuve : Notons d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset J_{n+1}$ et $(a_i) \in \mathbb{R}_+^I$, la suite $(\sum_{i \in J_n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i \in J_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

, cette suite est croissante majorée donc elle converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Réciproquement : si cette suite converge, notons M sa limite. Soit J finie $\subset I$, considérons : $\forall i \in J, n_i \in \mathbb{N}/i \in J_{n_i}$ et $n = \max_{i \in J}(n_i)$
$\forall i \in J, i \in J_n \Rightarrow J \subset J_n$ il vient :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J_n} a_i \leq M$$

Ainsi la famille est sommable et

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in J_n} a_i = M$$

Corollaire

Soit (i_n) est une énumération de I, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i < +\infty \Leftrightarrow \text{ la SATP } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{i_n} \text{ converge}$$

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i_n}$$

Preuve : On définit $J_n = \{i_0; ...; i_n\}$. (J_n) est une SEPF de I. On a

$$\sum_{i\in J_n} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_{i_k}$$

Remarque

Ce corollaire permet d'évaluer la somme totale indépendamment des énumérations

Exemple

Soit $\sum a_n$ une SATP, la famille (a_n) est sommable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ on a alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Commutativité généralisée

Soit $(a_i) \in \mathbb{R}_+^I$ sommable (i_n) une énumération de I et $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijective

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{i_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i_{\sigma(n)}}$$

Remarque

Si la SATP $\sum a_n$ converge, pour toute permutation de σ de $\mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Exemples

Soit la famille $(\frac{1}{n^2m^2})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$, on choisit

$$J_p = [|1;p|], \sum_{(n,m)\in J_p} \frac{1}{n^2m^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \times \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \zeta(2)^2 = \frac{\pi^4}{36}$$

Ceci établit la sommabilité de la famille

Sous-familles

1. Soit I dénombrable , $(a_i) \in \mathbb{R}_+^I$ et $I' \subset I$, on a

$$\sum_{i\in I'} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

   En particulier ,

$$\sum_{i\in I} a_i \Rightarrow \sum_{i\in I'} a_i < +\infty$$

2. Si I' et I'' deux parties disjointes de I, on a :

$$\sum_{i\in I'} a_i + \sum_{i\in I''} a_i = \sum_{i\in I'\cup I''} \leq \sum_{i\in I} a_i$$

3. Si $(I_1;...;I_p)$ sont p parties disjointes 2 à 2, alors :

$$\sum_{i\in I_1} a_i + ... + \sum_{i\in I_p} a_i = \sum_{i\in I_1\cup...\cup I_p} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Preuve :

1. Soit J' partie finie de I' : $J' \subset I' \subset I$ donc

$$\sum_{i\in J'} a_i \leq \sum_{i\in J} a_i$$

   et par définition (passage à la borne sup) :

$$\sum_{i\in I'} a_i \leq \sum_{i\in J} a_i$$

2. Soit (J_n) une SEPF de $I' \cup I''$, on forme une partition de J_1 et on passe à la limite
3. Par récurrence sur p

Linéarité positive

Soient (a_i) et (b_i) deux familles de réels positifs , $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$$

Preuve : on prend une SEPF de I et on passe à la limite

Sommation par paquets

Soit I un ensemble dénombrable et (I_k) une partition de I, on pose :

$$u_k = \sum_{i\in I_k} a_i$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{i\in I} a_i$$

De plus : (a_i) est sommable $\Leftrightarrow$ la SATP $\sum u_k$ converge

Preuve : Soit $N \in \mathbb{N}$, d'après le théorème précédant :

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N}(\sum_{i\in I_k} a_i) = \sum_{i\in \bigcup_{k=0}^{N} I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

d'où par passage à la limite :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Soit par ailleurs J partie finie de I , $\forall i \in J, \exists! k_i \in \mathbb{N}/i \in I_k$ comme J est finie, on pose $N = \max_{i\in J}(k_i)$. Il vient,

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{k=0}^{N} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,\ \text{car} J \subset \bigcup_{k=0}^{N} I_k$$

Ceci étant vraie pour toute les parties finie de J, on en déduit que :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

D'où l'égalité et l'équivalence entre sommabilité de (a_i) et convergence de $\sum_{k\geq 0} u_k$ en résulte
⚠C'est cette méthode qu'on emploie pour monter la sommabilité d'une famille, en choisissant une partition

Exemple

$((\frac{1}{n+m-1})^{\alpha}))_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ à quelle condition sur α est-elle sommable ? Définissons pour $k \geq 2, I_k = \{(n,m) \in \mathbb{N}_*^{\not\models}/n+m=k\}, card(I_k) = k-1$ ici,

$$u_k = \sum_{(n,m)\in I_k} \frac{1}{(n+m-1)^{\alpha}} = \frac{k-1}{(k-1)^{\alpha}} = \frac{1}{(k-1)^{\alpha}}$$

, cette série converge si et seulement si $\alpha > 2$ d'après le CDR, dans ce cas :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(n+m-1)^{\alpha}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} = \zeta(\alpha-1)$$

2.3.3 Familles sommables de réels ou de complexes

Problème général

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(a_i) \in \mathbb{K}^I$, I dénombrable. Pour définir la sommabilité $\sum a_i$ on est amené à considérer une SEPF (J_n) de I est étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} a_i$$

. Le problème est que si les (a_i) ne sont pas tous positifs, cette limite peut dépendre de la SEPF choisie : on peut écrire

$$(1+-1)+(1+-1)+...+(1+-1)=0$$
$$\text{mais aussi : } 1+(-1+1)+(-1+1)+...+(-1+1)=1$$

En cas de convergence, on a pas commutativité généralisée : la somme peut dépendre de l'énumération choisie ! On sait que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12})+... &= \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+2}) \\
&= \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Fixons $q \in \mathbb{N}$, la série

$$u_q = \sum_{p\geq 0, q\neq p} \frac{1}{p^2-q^2}$$

converge

$$\frac{1}{p^2-q^2} = \frac{1}{2q}(\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}), q \geq 1, u_0 = \zeta(2)$$

Pour $N \in \mathbb{N}, N \geq q+1$,

$$\sum_{p=0,p\neq q}^{N} \frac{1}{p^2-q^2} = \frac{1}{2q}(\sum_{p=0}^{q-1}\frac{1}{p-q} + \sum_{p=q+1}^{N}\frac{1}{p-q} + \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{p+q})$$

Pour

$$N \geq 2q, \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{p^2-q^2} = \frac{1}{2q}(H_{N-q} - H_{N+q} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2q}) = \frac{1}{2q}(\ln(\frac{N-q}{N+q} - \frac{1}{2q} + o(1)) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4q^2}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_q = \zeta(2) - \frac{\zeta(2)}{4} = \frac{3}{4}\zeta(2)$$

Fixons à présent $p \in \mathbb{N}$ soit :

$$v_p = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{p^2-q^2} = -u_p \Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} v_p = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

Enfin pour

$$N \in \mathbb{N} : \sum_{0\leq p,q\leq N}\frac{1}{p^2-q^2} = 0 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette famille n'est pas sommable

Définition

Rappelons que pour $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$x^+ = \max(x,0) \geq 0$$
$$x^- = \min(-x,0) \geq 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{x} \geq 0,\ x^+ = x,\ x^- = 0 \\ \text{x} \leq ,\ x^+ = 0,\ x^- = x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{x} = x^+ \text{ - } x^- \\ |\text{x}| = x^+ \text{ - } x^- \end{array}\right.$$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ I dénombrable. On dir que $(a_i) \in \mathbb{K}^I$ est sommable si et seulement si $(|a_i|)$ l'est

Théorème

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors (a_i) est sommable si et seulement si (a_i^+) et (a_i^-) le sont :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors (a_k) est sommable si et seulement $(R(a_k)$ et $(Im(a_k))$ le sont :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} Re(a_k) + i\sum_{k\in I} Im(a_k)$$

Preuve : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ si (a_i) est sommable, $\forall i\in I$,

$$\left\{\begin{array}{r} a_i^+ \leq a_i^+ + a_i^- = |a_i| \\ a_i^- \leq |a_i| \end{array}\right. \Rightarrow (a_i^+) \text{ et } (a_i^-) \text{ sont sommables}$$

Réciproquement : $(|a_i|)=(a_i^+)+(a_i^-)$
Dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ on raisonne sur les parties réelles et imaginaires

Propriétés

1. Soit (I_n) une SEPF de $I,(a_i)\in\mathbb{K}^I$ sommable, on a
$$\sum_{i\in I}a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in J_n}a_i$$
2. Soit (i_n) une énumérations de I si (a_i) est sommable alors
$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{i_n}$$
et si σ une permutation de $\mathbb{N}$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_{i_{\sigma(n)}}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{i_n}$$
commutativité généralisée
3. Si (a_i) est sommable , $\forall I'\subset J$: (a_i) l'est aussi et si $(I_1;...;I_k)$ sont des parties 2 à 2 disjoints de I :
$$\sum_{i\in I_1}a_i+...+\sum_{i\in I_k}a_i=\sum_{i\in I_1\cup...\cup I_k}a_i$$

Preuve :

1. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:
$$\sum_{i\in J_n}a_i=\sum_{i\in J_n}a_i^+-\sum_{i\in J_n}a_i^- \underset{n\to\infty}{=\longrightarrow}\sum_{i\in I}a_i^+-\sum_{i\in I}a_i^-=\sum_{i\in I}a_i$$
2. On pose $J_n=\{i_0;...;i_n\}$ une SEPF de I. De plus si σ est une permutation de $\mathbb{N},(i_{\sigma(n)})$ est une énumération de I
3. Par récurrence sur k

Remarque

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|<+\infty\Rightarrow \text{ la famille est sommable et pour toute permutation de} \sigma de \mathbb{N}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{\sigma(n)}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$$

Linéarité

Soit (a_i) et $(b_i) \in \mathbb{K}^I$ sommables, alors $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda a_i + b_i)_{i\in I}$$

$$\sum_{i\in I} \lambda a_i + b_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$$

L'ensemble des familles sommables de $\mathbb{K}^I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve : On applique l'inégalité triangulaire, puis on choisit une SEPF de I, et on passe à la limite

Sommation par paquets

Soient $(a_i) \in \mathbb{K}^I$ sommable et (I_k) une partition de I, posons :

$$u_k = \sum_{i\in I_k} a_i$$

On a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Preuve :

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{i\in I_1\cup\ldots\cup I_n} a_i$$

$$|u_k| \leq \sum_{i\in I} |a_i| \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \text{ est finie et converge absolument}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{i\in I} a_i &= |\sum_{i\in I\setminus\{I_0,\ldots,I_n\}} a_i| \\
&\leq \sum_{i\in I\setminus\{I_0,\ldots,I_n\}} |a_i| \\
&= \sum_{i\in I} |a_i| - \sum_{k=0}^{N} (\sum_{i\in J_k} |a_i|) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Remarque

Lorsqu'on établit la sommabilité de (a_i), on choisit une SEPF (J_n) ou une partition (I_k) de I et on vérifie que la suite $(\sum_{i\in J_n} |a_i|)$ ou la série $\sum_{k\geq 0}(\sum_{i\in I_k} |a_i|)$ converge. Une fois la sommabilité établie, pour calculer $\sum_{i\in I} a_i$, on évalue :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} a_i \text{ ou} \sum_{k=0}^{+\infty}(\sum_{k\in I_k} a_i)$$

2.3.4 Produit de Cauchy

Théorème

1. Soit (a_i) et (b_j) deux familles sommables, alors (a_ib_j) est sommable et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = (\sum_{i\in I} a_i) \times (\sum_{j\in J} b_j)$$

2. Soit $\sum u_p$ et $\sum v_q$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes :

$$\forall n\mathbb{N}, w_n = \sum_{p+q=n} u_pv_q = \sum_{k=0}^{n} u_kv_{n-k}$$

La série $\sum w_n$ dite produit de Cauchy de $\sum u_p$ et $\sum v_q$, converge absolument :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{p=0}^{+\infty} u_p) \times (\sum_{q=0}^{+\infty} v_q)$$

Preuve :

1. $I \times J = (\bigcup_{i\in I}\{i\} \times J$ partition de $I \times J$. On pose : pour $i \in I$ fixé :

$$\alpha_i = \sum_{j\in J} |a_ib_j| = |a_i| \sum_{j\in J} |b_j| < +\infty$$

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{i\in I} |a_i| \times \sum_{j\in J} |b_j| < +\infty$$

donc (a_ib_j) est sommable, d'après le théorème de sommation par paquets :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \sum_{i\in I}(\sum_{j\in J} a_ib_j) = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j$$

2. (u_p) et (v_q) sont sommables, donc (u_pv_q) aussi. On définit une partition de $\mathbb{N}^2$: $I_k = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p+q=k\}$. Alors la série :
$$\alpha_k = \sum_{p+q=n} |u_p||v_q|$$
converge , donc $|w_k| < \alpha_k, \sum w_k$ converge absolument. De plus :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\sum_{p+q=k} u_pv_q) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_pv_q = (\sum_{p=0}^{+\infty} u_p) \times (\sum_{q=0}^{+\infty} v_q)$$

Exponentielle complexe

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ on sait que :
$$\boxed{\exp(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!}}$$
On pose
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \times \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(z+z')^n}{n!}$$
Cette série converge absolument
$$\boxed{\exp(z+z') = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!}) \times (\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{z'^q}{q!}) = \exp(z) \times \exp(z')}$$

Théorème

$$\boxed{\exp : (\mathbb{C},+) \longrightarrow (\mathbb{C}^*,\times) \text{ est un morphisme de groupe}}$$

Preuve : $\forall a \in \mathbb{C}, \exp(z-z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(z) \times \exp(-z) \neq 0$
C'est un morphisme d'après ce qui précède, on vérifie pour $\theta \in \mathbb{R}, |\exp(i\theta)| = 1$ car
$$\frac{1}{\exp(i\theta)} = \exp(-\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n\theta^n}{n!} = \overline{\exp(i\theta)}$$
puis que $\theta \longrightarrow \exp(i\theta)$ est surjective de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$
Enfin on écrit $z \in \mathbb{C}^*, z = \rho e^{i\theta} = \exp(ln(\rho) + i\theta)$
Notons que : $Ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$ ⚠Le résultat ne s'applique plus pour des séries semi-convergentes :
$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
Ici :
$$w_n = \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}} \times \frac{(-1)^q}{\sqrt{q+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{n-k+1}}$$
$$|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}$$
Ici le produit de Cauchy diverge grossièrement

2.3.5 Théorème de Fubini

Théorème

Soit I et J dénombrable et $(u_{i,j}) \in \mathbb{K}^I$. On a :

$$(u_{i,j}) \text{ est sommable } \Leftrightarrow \sum_{i\in I}(\sum_{j\in J}|u_{i,j}|) < +\infty \text{ ou } \sum_{j\in J}(\sum_{i\in I}|u_{i,j}|) < +\infty$$

Dans ce cas :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$$

Preuve : On réalise une partition de $I \times J$

⚠Lorsqu'on intervertit les sommations, on vérifie d'abord la sommabilité, en étudiant la convergence pour $(|u_{i,j}|)$. Puis on calcule une des deux à l'aide de l'autre. Si on n'a pas sommabilité, on a pas le droit d'intervertir les sommations

Exemples

Monter que $\sum \zeta(n) - 1)$ converge et calculer sa somme. Étudions la sommabilité de $(\frac{1}{k^n})$. Pour k fixé, soit :

$$\beta_k = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$\sum \beta_k$ converge, c'est une série télescopique. D'une part $(\frac{1}{k^n})$ est sommable et on peut intervertir les sommations : $\sum \zeta(n) - 1$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}) = \sum_{k=2}^{+\infty}(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}) = \sum_{k=2}^{+\infty}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1$$

2.3.6 Produits infinis (HP)

Définition

Soit (u_n) une suite réelle, on lui associe le produit partiel :

$$\pi_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

On dit que le produit infini $\prod u_k$ converge si et seulement si (π_n) converge, on pose alors :

$$\prod_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \pi_n$$

Si (u_k) est positive, on étudie :

$$\ln(\pi_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$$

ce qui revient à l'étude d'une série numérique :

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\pi_n) = 0 \Rightarrow \prod_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\pi_n) = +\infty \Rightarrow \prod_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\pi_n) = c \Rightarrow \prod_{k=0}^{+\infty} u_k = e^c$$

Réciproquement si (π_n) converge dans $\mathbb{R}^*$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} = 1$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, u_n > 0$, on peut alors écrire, $u_n = 1 + \varepsilon_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$
Si (ε_n) garde un signe constant $\ln(u_n) \sim \varepsilon_n$ donc $\sum \ln(u_n)$ converge $\Leftrightarrow \sum \varepsilon_n$ converge
Sinon on développe $\ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n^2)$

Exemple

Soit p_k le k-ième nombre premier :

$$u_k = \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Soit

$$\pi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \Rightarrow \ln(\pi_n) = -\sum_{k=1}^{n} -\ln(1-\frac{1}{p_k})$$

Ainsi $\sum \frac{1}{p^k}$ converge si et seulement si $(\ln(\pi_n))$ converge dans $\mathbb{R}$

$$u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^n}$$

$\forall k \in [|1;n|], \sum \frac{1}{p_k^{n_k}}$ converge par produit de Cauchy pour $N \geq 1$ fixé, la famille $(\frac{1}{p_1^{n_1}...p_N^{n_N}})$ est sommable

$$\sum_{(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{N}^N} \frac{1}{p_1^{n_1}...p_N^{n_N}} = (\sum_{n_1=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{n_1}}) \times ... \times (\sum_{n_N=0}^{+\infty} \frac{1}{p_N^{n_N}}) = \pi_n$$

Elle contient $H_{p_{N_1}-1}$ qui diverge :
$\pi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge

2.3.7 Règle d'Abel (HP)

Transformation d'Abel

On se donne deux suites (a_n) et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On pose : $\begin{cases} B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \\ \forall n \in \mathbb{N}^* b_n = B_n - B_{n-1} \end{cases}$
On pose pour $n = 0, B_{-1} = 0$

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1}$$

Théorème

On suppose que $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et :

$$\exists M \geq 0 / \forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq M$$

Alors $\sum a_k b_k$ converge et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_k| \leq 2 M a_n$$

Preuve :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \sum_{k=0}^{p} a_k b_k = \sum_{k=0}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_p B_p$$

$$|\sum_{k=0}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k| \leq M |\sum_{k=0}^{p-1} a_k - a_{k+1}|$$

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_{k-1}) B_k$$

De plus :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, |\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k-1}) M a_{n+p} M + a_n M \leq 2 a_n M$$

⚠$\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ est absolument convergente, mais $\sum a_k b_k$ peut-être semi-convergente !

Exemples

Séries alternées avec $b_n = (-1)^n$
$a \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \sum \frac{e^{ina}}{n^\alpha}$
Si $\alpha > 1$: convergence absolue
Si $\alpha \in]0;1], a_n = \frac{1}{n^\alpha}, b_n = e^{ina}$

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=0}^{n} e^{iak}| &= |e^{ia}| \times |\sum_{k=0}^{n-1} e^{iak}| \\
&= \frac{|1-e^{ian|}}{|1-e^{ia}|} \\
&= \frac{|2i\sin(\frac{na}{2}e^{\frac{ina}{2}}|}{|2i\sin(\frac{a}{2})e^{\frac{ia}{2}}|} \\
&= |\frac{\sin(\frac{na}{2})}{\sin(\frac{a}{2})}| \\
&\leq \frac{M}{|\sin(\frac{a}{2})|}
\end{aligned}$$

Ainsi $\sum \frac{e^{ina}}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum \frac{\sin(na)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\cos(na)}{n^\alpha}$ convergent

Chapitre 3

Probabilités sur un univers dénombrable

Sommaire

3.1 Tribu,probabilités

3.1.1 Espaces probabilisés

Définition

Soit un ensemble Ω appelé univers, un ensemble de résultats. On note ω un résultat ou réalisation ou issu de l'expérience aléatoire un élément de Ω. On s'intéresse à certaines qualités de ω c'est-à-dire à certaines parties de Ω. Une telle partie s'appelle un évènement

Exemples

$\Omega = \{$fleurs de la prairie$\}$
ω est une fleur (résultat)
Par exemple on peut considérer : A $= \{$ fleurs jaunes $\}$
$\bar{A}$ est le complémentaire de A dans Ω : c'est l'ensemble des fleurs qui ne sont pas jaune

La roulette , $\Omega = [|0;36|]$
A $= \{$ pair ≤ 36 $\}$
B $= \{$ impair ≤ 36 $\}$
C $= \{$ rouges $\}$
Choisir un réel entre 0 et 1 et $\Omega = [0;1]$. Cela revient à choisir en binaire une suite $(\varepsilon_k) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}}$ et écrire :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Jets d'un dés à 6 faces n fois : $\Omega = [|1;6|]^{\mathbb{N}}$
On jette une pièce de monnaie un certain nombre de fois, on s'arrête dès qu'on obtient pile :

$$\Omega = \{\overbrace{(0;...;0;1)}^{\text{n-1 fois}}/n \in \mathbb{N}\}$$

Définition d'une probabilité

Ω étant défini ainsi qu'un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω. On veut définir pour A$\in \mathcal{A}$, P(A) probabilité de A, en terme d'expérience aléatoire :

$$\text{P(A) mesure la probabilité que } \omega \in \text{A}$$

L'évènement impossible est $\emptyset \in \mathcal{A}$ et P$(\emptyset) = 0$
L'évènement est certain est $\Omega \in \mathcal{A}$ et P$(\Omega) = 1$
On impose aussi :

$$\begin{gathered} \text{A} \in \mathcal{A} \\ \bar{A} = \complement_{\Omega}(\text{A}) \in \mathcal{A} \\ \text{P}(\bar{A}) = 1 - \text{P(A)} \end{gathered}$$

Et autant que possible pour un ensemble I d'indices $(A_i) \in \mathcal{A}^I$ tel que :

$$\forall i \neq q \left\{ \begin{array}{c} A_i \cap A_j \neq \emptyset \\ \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A} \\ \text{P}(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \sum\limits_{i\in I} \text{P}(A_i) \ (1) \end{array} \right.$$

Dans le troisième exemple, on a envi de définir pour A $\in \mathcal{A}$,

$$\text{P(A)} = \int_0^1 \chi_{\text{A}}(x)dx$$

Avec ce postulat : $\forall x \in [0;1]$ P$(\{x\})$=0. Si on s'impose la condition précédente alors ,

$$\forall A \in \mathcal{A}, P(A) = \sum_{x\in A} P(\{x\}) = 0$$

ce qui est absurde car P([0 ;1])
Si on ne s'impose pas Ω fini ou dénombrable et si on s'impose que

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = 0$$

Si (1) s'applique pour I non dénombrable :

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$$

On a vu sue $\{\omega \in \Omega / p(\{\omega\}) > 0\}$ était alors dénombrable. On se ramène donc au cas où I est dénombrable. Par ailleurs sur $[|0;1|]^{\mathbb{N}}$, on peut s'intéresser à l'évènement :

$$A = \{(a_n) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}} / \exists n \in \mathbb{N} / a_n = 1\}$$

On a envie d'avoir P({0}) = P($\bar{A}$)=0 et P(A) = 1 - P($\bar{A}$) = 1
Or $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$, réunion disjointe
$A_k = \{(a_n) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}} / a_0 = ... = a_{k-1} = 0 \text{ et} a_k = 1\}$
$P(A_k) = \frac{1}{2^k}$

$$P(A) = P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$$

3.1.2 Tribus

Définition

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une famille de parties de Ω. On dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, ou encore que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre, si et seulement si :

1. $\Omega \subset \mathcal{A}$
2. $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Les éléments de $\mathcal{A}$ s'appellent des évènements

Exemples

1. $\mathcal{A} = \{\Omega; \emptyset\}$
2. $A \subset \Omega, \mathcal{A} = \{\Omega; A; \bar{A}; \emptyset\}$
3. Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω
4. $\Omega = [0;1]$, la plus petite tribu sur $\mathcal{A}$ comprenant les intervalles de $[0;1]$ s'appelle la tribu des Boréliens de $[0;1]$, elle est à la base de la théorie de la mesure et permet de définir l'intégrale de Lebesgue

Propriétés

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω ,

1.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (A_k) \in \mathcal{A}^n, \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{A}$$

2.
$$\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{A}$$

3. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Preuve :

1. $\emptyset = \bar{\Omega} \in \mathcal{A}$, et on peut poser :
$$\forall k \geq n+1, A_k = \emptyset, \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$$

2.
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_k}} \in \mathcal{A}$$

3. $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{A}$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $\mathcal{A}$, toute application :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{P} & : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & \mathrm{A} & \mapsto & \mathrm{P(A)} \end{array}$$

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
2. $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjointes, on a la σ-additivité dénombrable :
$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ s'appelle un espace probabilisé

Remarque : on peut aussi rencontrer la notation : $\mathbb{P}$

Exemple trivial

Soit A$\in \Omega$ et $\mathcal{A} = \{\Omega, A, \bar{A}, \emptyset\}$. Soit $p \in [0; 1]$, on pose :

$\mathrm{P}(\Omega) = 1$
P(A)=p
$\mathrm{P}(\bar{A}) =$ 1-p
$\mathrm{P}(\emptyset) = 0$

Probabilité uniforme

Soit Ω fini, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ on définit la probabilité uniforme sur Ω :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{P} & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & \mathrm{A} & \mapsto & \mathrm{P(A)}= \frac{card(A)}{card(\Omega)} \end{array}$$

Loi géométrique

Soit $p \in [0;1]$, on pose $q = 1-p$. On veut modéliser l'expérience aléatoire suivante. On jette une pièce avec la probabilité p d'obtenir pile et q d'obtenir face. On jette la pièce jusqu'à obtenir face, alors on s'arrête : ici, on peut définir :

$$\Omega = \{\overbrace{(0;...;1)}^{\text{n-1 fois}}/n \in \mathbb{N}^*\}$$

On pose : $\boxed{\mathrm{P}(\{(0;...;0;1)\}) = p^{n-1}q}$
On prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour A $\in \mathbb{P}(\Omega)$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1}q = \frac{q}{1-p} = 1$$

De plus soit $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjointes , d'après le théorème de sommation par paquets ,

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} P(\{\omega\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{\omega\in A_n} P(\{\omega\})$$

On dit que P suit la loi géométrique de paramètre p , notée $\mathcal{G}(p)$

Loi binomiale

Soit $p \in]0;1[$, soit l'expérience aléatoire suivante : on lance n fois une pièce avec une probabilité p d'obtenir pile et $q = 1-p$ d'obtenir face.
$\Omega = [|0;1|]^n$, on désigne par 0 l'évènement "pile" et 1 l'évènement "face". Pour $k \in [|0;n|]$ quelle est la probabilité pour obtenir k fois pile et $n-k$ fois face ? Un raisonnement de dénombrement montre que c'est :

$$\boxed{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Comme on s'intéresse seulement au nombre de piles , $\Omega' = [|0;n|]$, on définit alors $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega')$,

$$\mathrm{P}(\{\omega\}) = \tbinom{n}{k} p^k q^{n-k}, k \in [|0;n|]$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega'), P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

$$P(\Omega') = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

On dit que P suit le loi binomiale de paramètres n, p , notée $\mathcal{B}(n,p)$

Loi de Poisson

Donnons $\lambda > 0$, on définit une suite de lois binomiale , $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ donc $p_n = \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$. Pour k fixé et $n \geq k$,

$$\begin{aligned} P_n(\{k\}) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}(1-p_n)^n \frac{p_n^k}{(1-p_n)^k} \\ &\sim \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

On dit que P_n suit une loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, sur $\mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, P(\{k\}) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

$$P(\mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{k\}) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = 1$$

La loi de Poisson est une limite (convergence en loi) de la loi binomiale. La loi de Poisson modélise le nombre de succès d'un évènement rare durant un laps de temps donné

Loi Hypergéométrique

Soit U un ensemble fini de cardinal N qu'on partitionne : $U = U_1 \cup U_2$ avec $card(U_1) = Np$ et $card(U_2) = N(1-p) = Nq$. Soit $n \leq N$ fixé, pour $k \leq n$, on cherche la probabilité pour qu'en choisissant n éléments de U, on en obtienne k dans U_1 et $n-k$ dans U_2
$\Omega = \mathcal{P}_k(U), card(\Omega) = \binom{N}{k}$

$$\boxed{\mathrm{P}(\{k\}) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

P suit la loi géométrique notée $\mathcal{H}$(N,n,p), c'est la loi des tirages sans remises

Tableau de synthèse des lois usuelles

Nom	Notation	Définition	Interprétation
Loi Uniforme	$\mathcal{U}([\|1;n\|])$	P(X=k) $=\frac{1}{n}$, P(A) $=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$	Loi spontanée sur un ensemble fini
Loi de Bernouilli	$\mathcal{B}$(p)	P(X=0) = p , P(X=1)=1-p	Tirage aléatoire à deux issues
Loi binomiale	$\mathcal{B}$(n,p)	P(X=k) $=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	Répétition de n épreuves de Bernouilli indépendants
Loi géométrique	$\mathcal{G}$(p)	P(X=k) $=(1-p)^{k-1}p$	Numéro du premier succès d'une épreuve de Bernouilli itérée
Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	P(X=k) $=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	Nombre de succès d'un évènement rare, répété suffisamment
Loi Hypergéométrique	$\mathcal{H}$(N,n,p)	P(X=k) $=\frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	Loi des tirages sans remise

Vocabulaire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}$,P) un espace probabilisé

1. On dit que A $\in \mathcal{A}$ est un évènement presque sur si et seulement si P(A)=1
2. On dit que A$\in \mathcal{A}$ est un évènement négligeable si et seulement si P(A)=0. On n'a pas nécessairement A= $\emptyset$
3. On dit que (A,B)$\in \mathcal{A}^2$ sont deux évènements incompatibles si et seulement si A$\cap$ B $= \emptyset$
4. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ où I est dénombrable est un système complet d'évènements (SCE) si et seulement si :
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$$
$$\forall i \neq j A_I \cap A_j = \emptyset$$

Probabilités	Théorie des ensembles
Univers des possibles Ω	Ensemble Ω
Résultat possible ω	$\omega \in \Omega$
Événement aléatoire A	A $\in \mathcal{A}$
A est réalisé	$\omega \in A$
A $\Rightarrow$ B	A $\subset$ B
A et B	A$\cap$ B
A ou B	A$\cup$ B
A est certain	A $= \Omega$
A est presque sur	P(A) = 1
A est impossible	A $= \emptyset$
A est négligeable	P(A) = 0
A et B sont incompatibles	A$\cap$ B $= \emptyset$
Système complet d'évènements	Partition

3.1.3 Propriétés

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}$,P) un espace probabilisé :

1. P($\emptyset$) = 0
2. Soit $(A_i) \in \mathcal{A}^n$ deux à deux disjoints :
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
3. $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \in [0;1], P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. $$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B), P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$$

5. Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante d'évènements : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(P(A_n))$$

6. Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'évènements :

$$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(P(A_n))$$

7. Soit (A,B)$\in \mathcal{A}^2$, P(A $\cup$ B) = P(A) + P(B) - P(A $\cap$ B)
8. Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$,

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

Preuve : pour les preuves non indiquées : cf. cours de MPSI

4 Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (b \setminus A) = \emptyset$. P(B) = P(A) + P($B \setminus A$) $\geq$ P(A)

5 $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) \leq P(A_{n+1}) \leq 1$ la suite croissante majorée $(P(A_n))$ converge. De plus $A_{n+1} = (A_{n+1} \setminus A_n) \cup A_n$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{n+1} \setminus A_n) \cup A_0$$

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= P(A_0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{n+1} \setminus A_n) \\
&= P(A_0) + \lim_{n\to+\infty} P(A_n) - P(A_0) \\
&= \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}(P(A_n))
\end{aligned}$$

6 $(\overline{A_n})$ est suite croissante d'évènements

8 Par récurrence, en utilisant 7)

Formule de Poincaré

Soit $(A_i) \in \mathcal{A}^n$, on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

$I = [|1;n|]$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{J\subset I, |J|=k} P(\bigcap_{i\in J} A_i)$$

Preuve : par récurrence sur n

Probabilité sur un ensemble dénombrable

Soit Ω dénombrable et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} \in (\mathbb{R}_+)^\Omega$ tel que $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$. Alors il existe une unique probabilité P sur la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$,

$$\begin{array}{rccc} P & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & A & \mapsto & P(A)=\sum\limits_{\omega\in A} p_\omega \end{array}$$

C'est la seule probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant $\forall\omega\in\Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$

Preuve : On a bien $P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$
Si $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, 2 à 2 disjointes, par sommation par paquets :

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{\omega\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{\omega\in A_n} p_\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

P est bien une probabilité vérifiant la bonne propriété
Si P' est une probabilité la vérifiant aussi alors :

$$\forall A\in\mathcal{P}(\Omega), P'(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega = P(A)$$

Propriété

Soit I dénombrable et (A_i) un SCE de Ω, on a :

$$\forall A\in\mathcal{A}, P(A) = \sum_{i\in I} P(A\cap A_i)$$

Preuve : A est la réunion disjointe des $(A\cap A_i)$

3.2 Indépendance, probabilités conditionnelles

3.2.1 Indépendance

La notion physique d'évènements indépendants signifie que ces deux évènements n'influe pas l'un sur l'autre. Par exemple, si on lance deux de suite un dé (ou deux dés en même temps), les évènements liés au premier sont indépendant de ceux liés au second. En terme de probabilités, on peut considérer :

$$\Omega = [|1;6|]^2 = \Omega_1\times\Omega_2$$

muni de la probabilité uniforme
Soit $A_1\subset\Omega_1$ et $A_1' = A_1\times\Omega_2$, $A_2\subset\Omega_2$ et $A_2' = \Omega_1\times A_2$
On a $A_1'\cap A_2' = A_1\times A_2$

$$P(A'_1 \cap A'_2) = \frac{|A_1 \times A_2|}{|\Omega_1 \times \Omega_2|} = \frac{|A_1|}{\Omega_1} \times \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = P(A'_1) \times P(A'_2)$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}$,P) un espace probabilisé. Soit $(A_i) \in \mathcal{A}^I$, on dit que les évènements (A_i) sont mutuellement indépendant si et seulement si :

$$\forall J \text{ finie } \subset I, P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Les évènements (A_i) sont deux à deux indépendants si et seulement :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{I}^2 / i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

L'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2, la réciproque est fausse.
⚠Soient A et B deux évènements si A et B sont incompatibles et P(A)>0 et P(B)>0

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0 < \mathrm{P}(\mathrm{A})\ \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Par ailleurs si A = B et si P(A) $\in]0;1[^2$, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) > P(A)^2$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = [|1;n|]$ muni de la probabilité uniforme. Soit d un diviseur de n. Notons $A_d = d\mathbb{Z} \cap \Omega$

$$P(A_d) = \frac{|A_d|}{|\Omega|} = \frac{\frac{n}{d}}{n} = \frac{1}{d}$$

Soient $(d_1; ...; d_k)$ k diviseurs de n premiers entre-eux deux à deux :

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_{d_i} = A_{\prod_{i=1}^{k} d_i}$$

$\forall i \in [|1;k|], \forall m \in [|1;n|], d_i | m \Leftrightarrow d_1 ... d_k | m$

$$P(\bigcap_{i=1}^{k} A_{d_i}) = P(A_{\prod_{i=1}^{k} d_i}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} d_i} = \prod_{i=1}^{k} P(A_i)$$

Ce résultat s'applique à toute partie $J \subset [|1;k|], P(\bigcap_{i \in J} A_{d_i}) = \prod_{i \in J} P(A_{d_i})$, on en déduit que les évènements A_{d_i} sont indépendants
Soit $n \geq 2$, une famille possède n enfants, on suppose que garçons et filles sont équiprobables. On munit $\Omega = \{F; G\}$ de la probabilité uniforme. $\mathcal{F} \subset \Omega$, soit les évènements :

A : "la famille $\mathcal{F}$ possède des enfants des 2 sexes"
B : "la famille $\mathcal{F}$ possède au moins n-1 garçons"

$|\bar{A}| = 2, \bar{A} = \{(F; ...; F); (G; ...; G)\}$
$|A| = 2^n - 2$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

B $= B_0 \cup B_1$, B_i : "la famille possède exactement i filles"
$|B_0| = |\{G; ...; G\}| = 1$
$|B_1| = n$

$$|B| = |B_0| + |B_1| = n + 1$$
$$\mathrm{P(B)} = \tfrac{n+1}{2^n}$$

A $\cap$ B $= B_1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$

$$\begin{aligned} P(A) \times P(B) = P(A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\Leftrightarrow \quad 2^n n = (2^n - 2)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad n + 1 = 2^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \quad n = 3 \end{aligned}$$

A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$

Théorème

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors :

1. A et $\bar{B}$ sont indépendants
2. $\bar{A}$ et B sont indépendants
3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Ce résultats se généralise : $(A_i) \in \mathcal{A}^I$ une famille d'évènements indépendants. Soit $I = I_1 \cup I_2$, une partition de I :

$$\forall i \in I_1, B_i = A_i$$
$$\forall i \in I_2, B_i = \bar{A}_i$$

Alors les (B_i) sont indépendants

Preuve : On prend une partie J finie de I que l'on partitionne puis la démonstration est analogue à celle vue en MPSI

Lemme de Borel-Cantelli (HP)

Soit $(\Omega, \mathcal{A},$P$)$ un espace probabilisé. (A_n) une suite d'évènements de $\mathcal{A}$. Soit A $= \{\omega \in \Omega / \{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$ est infini $\}$. Alors A$\in \mathbb{A}$ et :

1. $$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P(A) = 0$$
2. $$(A_n) \text{ sont indépendants }, \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(A) = 1$$

Preuve : $\omega \in A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n / \omega \in A_k$ Ainsi :

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k\geq n} A_k) \in \mathcal{A}$$

Notons : $B_{n+1} \subset B_n$, donc :

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} P(B_n)$$

1. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(B_n) \leq \sum_{k\geq n} P(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car c'est le reste d'une série convergente :

$$\text{P(A)} = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}, -P(A_k) \in [-1;0]$ et $P(\bar{A}_k) = 1 - P(A_k) \leq \exp(-P(A_k))$. Fixons $n \in \mathbb{N}$, pour $N \geq n$, on a :

$$0 \leq \prod_{k=n}^{N} P(\bar{A}_k) \leq \exp(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k))$$

$$P(\bigcap_{k=n}^{N} \bar{A}_k) = P(\overline{\bigcup_{k=n}^{N} A_k}) = 1 - P(\bigcup_{k=n}^{N} A_k) = 1 - P(C_N)$$

$$C_N \subset C_{N+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(C_N) = P(\bigcup_{N\geq n} C_N) = P(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{N} P(A_k) = +\infty$, d'où en reportant :

$$0 \leq 1 - P(B_n) \leq 0 \Rightarrow P(B_n) = 1 \Rightarrow P(A) = 1$$

Exemples

1. Soit un singe tapant indéfiniment sur un clavier d'ordinateur. Si la pièce Hamlet, comporte N signes, sur un paquet de N signes, la probabilité pour que Hamlet apparaisse est de $\frac{1}{26^N} > 0$. Soit pour $n \in \mathbb{N}$, l'évènement A_n :"la pièce Hamlet apparait entre les signes nN+1 et N(n+1)". On munit $\mathbb{N}$ de la mesure de Lebesgue, équivalent de la probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$. On a P$(A_n) = \frac{1}{26^N}$ et les (A_n) sont indépendants, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$, il est presque sur que la pièce Hamlet apparaitra une infinité de fois.
2. Il n'existe pas de loi uniforme sur $\mathbb{N}$, si on avait P sur $\mathbb{N}/\exists\alpha \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \alpha$ alors ,

$$P(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\{n\}) = 1$$

ce qui est impossible car si $\alpha = 0$ alors la somme vaut 0 sinon elle diverge.

3. Existe-t-il cependant une probabilité P sur $\mathbb{N}$, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n\mathbb{N}) = \frac{1}{n}$ Si c'était le cas, soit pour $p \in \mathbb{P}, A_p = p\mathbb{N}$. Soit $(p_1; ...; p_k) \in \mathbb{P}^k$ distincts :
$$\bigcap_{i=1}^{k} A_{p_i} = A_{\prod_{i=1}^{k} p_i} \Rightarrow P(\bigcap_{i=1}^{k} A_{p_i}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} p_i} = \prod_{i=1}^{k} P(A_{p_i})$$
Or d'après le Lemme de Borel-Cantelli, P(A) = 1, où A = $\{n \in \mathbb{N}/$ n appartient à une infinité de $p\mathbb{N}$, possède une infinité de facteurs premiers$\} = \emptyset$, ce qui est absurde, une telle mesure de probabilité n'existe pas.

Calcul de $\varphi(n)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(n) = card\{k \in [|1; n|]/k \wedge n = 1\}$
On munit $\Omega = [|1; n|]$ de la probabilité uniforme :
$$\frac{\varphi(n)}{n} = P(A), A = \{k \in [|1; n||]/k \wedge n = 1\}$$
, l'évènement $k \wedge n = 1$. Si les diviseurs premiers de n sont $p_1; ...; p_r$ distincts,
$$\begin{aligned} \forall k \in [|1; n|], k \in A &\Leftrightarrow \forall i \in [|1; r|], k \wedge p_i = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [|1; r|], p_i \nmid k \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [|1; r|], k \notin p_i\mathbb{Z} \cap [|1; n|] \end{aligned}$$
d'où, A $= \bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_{p_i}}$ or les (A_{p_i}) sont indépendants, donc les $(\overline{A_{p_i}})$ aussi :
$$P(A) = \prod_{i=1}^{r} P(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{r}(1 - P(A_{p_i})) = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i})$$
Ainsi :
$$\boxed{\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i}) \Leftrightarrow \varphi(n) = n\prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i})}$$

3.2.2 Probabilités conditionnelles

Si deux évènements A et B ne sont pas indépendants, la réalisation de l'un affecte la réalisation de l'autre : si B est réalisé, la probabilité que A le soit aussi est modifiée. Dans le cas d'un ensemble fini Ω, muni de la probabilité uniforme, on veut définir la probabilité de A sachant B, qui n'est plus un évènement de Ω mais un évènement de B :
$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \times \frac{|\Omega|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}$,P) un espace probabilisé et B$\in \mathcal{A}/P(B) \neq 0$. On définit :
$$\begin{aligned} P_B \quad : \quad \mathcal{A} &\to \mathbb{R}_+ \\ \text{A} &\mapsto P_B(A) = \tfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$
C'est une probabilité sur $\mathcal{A}$, dite probabilité conditionnelle associée à B.

Preuve : cf cours de MPSI

Exemples

Une famille possède deux enfants (F et G équiprobables). Quelle est la probabilité pour que le deuxième soit une fille sachant que le premier est un garçon ?
$\Omega = \{$(F,F) ;(F,G) ;(G,F) ;(G,G)$\}$
B =$\{$(G,G) ;(G,F)$\}$
A = $\{$(F,F) ;(G,F)$\}$
$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.25}{0.5} = 0.5$
Quelle est la probabilité sachant que l'un des deux est un garçon que l'autre soit une fille ?
B = $\{$(G,F) ;(F,G) ;(G,G)$\}$
A = $\{$(G,F) ;(F,G) ;(F ;F)$\}$
A $\cap$ B = $\{$(G,F) ;(F,G)$\}$
$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.5}{0.75} = \dfrac{2}{3}$

Formule d'inversions des causes

Si P(A) $\neq 0$ et P(B) $\neq 0$:

$$P_B(A) = \tfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \tfrac{P_A(B)\times P(A)}{P(B)}$$

Lien avec l'indépendance

A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Formule des probabilités composées

Soient $(A_1; ...; A_n) \in \mathcal{A}^n$, tel que $P(A_1 \cap ... \cap A_n) > 0$, on a

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1 \times \prod_{i=1}^{n-1} P_{\bigcap\limits_{j=1}^{i} A_j}(\bigcap_{k=1}^{i+1} A_k)$$

Formule des probabilités totales, formule de Bayes

Soit (A_i) un SCE dénombrable tel que : $\forall i \in I, P(A_i) > 0$, soit $B \in \mathcal{A}$:

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)$$

$$\forall j \in I, P_B(A_j) = \frac{P(A_j)\times P_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i\in I} P_{A_i}(B)\times P(A_i)}$$

Loi sans mémoire

Soit $p \in]0;1[$ sur $\mathbb{N}^*, \mathcal{G}(p)$ la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(\{n\}) = (1-p)^{n-1}p$$
$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, P_{[n;+\infty[}([n+k;+\infty[) = P([k+1;+\infty[)$$

On dit que la loi géométrique est sans mémoire

Preuve : $P_{[n;+\infty[}([n+k;+\infty[) = \frac{P([n+k;+\infty[\cap[n;+\infty[)}{P([n;+\infty[)} = \frac{P([n+k;+\infty[)}{P([n;+\infty[)}$

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, P([1;+\infty[) = \sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^{j-1}p = \frac{(1-p)^{l-1}p}{1-(1-p)} = (1-p)^{l-1}$$

donc, $P_{[n;+\infty[}([n+k;+\infty[) = \frac{(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^{n-1}} = (1-p)^k = P([k+1;+\infty[)$

Réciproquement, si une loi de probabilité vérifie cette propriété :

$$q = P([2;+\infty[), \frac{P([n+1;+\infty[)}{P([n;+\infty[)} = q$$

$P([n;+\infty[) = q^{n-1}$, par récurrence. Par passage au complémentaire, on obtient :

$$P([|1;n|]) = 1 - P([n+1;+\infty[) = 1 - q^n$$

$$P(\{n\}) = P([|1;n|]) - P([|1;n+1|]) = 1 + q^n - 1 - q^{n-1} = q^{n-1}(1-q)$$

C'est une loi géométrique

3.3 Variables aléatoires

3.3.1 Définition

Pour calculer des probabilités, on a besoin de l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \text{P})$. Dans la réalité on n'a pas accès directement à Ω, mais seulement à certaines grandeurs observables qui sont définies sur Ω. On défini alors une fonction sur Ω :

$$\begin{array}{cccc} X & : & \Omega & \to & E \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

Généralement $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^d$. On cherche à transporter la probabilité définie sur Ω en une probabilité P_X définie sur E par :

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et (E, B) deux espaces probabilisable. On dit qu'une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire si et seulement si :

$$\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

De plus si, $(\Omega, \mathcal{A}, \text{P})$ est un espace probabilisé alors : $\begin{array}{cccc} P_X & : & \mathcal{B} & \to & [0;1] \\ & & B & \mapsto & P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \end{array}$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{B})$

Preuve : analogue au cas fini étudié en MPSI

Exemples

On lance successivement 2 dés et on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus, on peut considérer $\Omega = [|1;6|]$, muni de la probabilité uniforme et $\begin{array}{ccccc} X & : & \Omega & \to & [|1;6|]^2 \\ & & (i,j) & \mapsto & i+j \end{array}$

$P_X(\{2\}) = P((1;1)) = \dfrac{1}{36}$
$P_X(\{7\}) = P(\{1;6\}...\{6;1\}) = \dfrac{1}{6}$

Soit Ω l'ensemble des fleurs d'une prairie, on s'intéresse au fait que la fleur est jaune ou ne l'est pas, on définit : $\begin{array}{ccccc} X & : & \Omega & \to & \{0;1\} \\ & & \omega & \mapsto & 1 \text{ si la fleur est jaune} \\ & & & \mapsto & 0 \text{ sinon} \end{array}$ On parle de variable de Bernoulli

Notations

Soit $X \to E$ une variable aléatoire(va), on note pour $B \in \mathcal{B}$, "$X \in B$" l'évènement $X^{-1}(B)$, de Ω :

$$P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) = P_X(B)$$

Soit $x \in E/\{x\} \in \mathcal{B}$, on note, "$X = x$" l'évènement $X^{-1}(\{x\})$, de sorte que :

$$P(X = x) = P(X^{-1}(\{x\}) = P_X(\{x\})$$

Si $E = \mathbb{R}$, "$X \leq x$" est l'évènement $X^{-1}(]-\infty;x])$:

$$P(X \leq x) = P(X^{-1}(]-\infty;x]))$$

3.3.2 Variables aléatoires discrètes

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, E un ensemble. On dit que $X \to E$ est une variable aléatoire discrète (vad) si et seulement si :

1. $X(\Omega)$ est dénombrable
2. $\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$

Si de plus P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on définit la probabilité P_X dite loi de la va X sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par :

$$\forall B \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X(B) = \sum_{x \in B} P(X^{-1}(\{x\})) = P(X \in B)$$

Preuve : on utilise le fait que $(X^{-1}(\{x\}))$ est un SCE sur Ω

Remarque

On peut aussi définir :

$$\forall B \in \mathcal{P}(E), P_X(B) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap B} P(X = x) < +\infty$$

Composition des variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, $(E, \mathcal{B})$ et $(F, \mathcal{C})$ trois espaces probabilisables. Soit $X : \Omega \to E$ et $f : E \to F$ deux va. Alors $f \circ X$(notée $f(X)$) est une va. De plus, si X est une vad alors $f(X)$ est une aussi une vad.

Preuve : analogue au cas étudié en MPSI, on vérifie que $(f \circ X)(\Omega) = \{f(x_n))\}$ est fini ou dénombrable lorsque X est une vad

Théorème

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$deux vad (respectivement va) alors :

1. $\lambda X + Y$ est une vad (resp. va)
2. XY est une vad (resp. va)
3. $|X|$ est une vad (resp. va)
4. $\min(X; Y)$ et $\max(X; Y)$ sont des vad (resp. va)

Preuve : cf cours de MPSI, on vérifie aisément $(X + Y)(\Omega)$ fini ou dénombrable

Remarque

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une vad (resp. vard si elle est discrète)

3.3.3 Variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^d$

Définition

Soit $d \geq 1$, on définit $\forall i \in [|1;d|]$ la i-ème projection : $\Pi_i \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ (x_1;...;x_d) & \mapsto & x_i \end{array}$ Soit
$X \ : \ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^d \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$
$\forall i \in [|1;d|], X_i = \Pi_i \circ X$, de sorte que :

$$X(\omega) = (X_1(\omega);...;X_d(\omega))$$

On dit que X est une vas si et seulement si $\forall i \in [|1;d|], X_i$ est une vad

Preuve : Si X est une vad, $\forall i \in [|1;d|], X_i$ est vad :

$$X_i(\Omega) = \Pi_i(X(\Omega)) \text{ fini ou dénombrable}$$

$$\begin{aligned} \forall x_i \in X_i(\Omega), X_i^{-1}(\{x_i\}) &= \{\omega \in \Omega / \text{ la i-ème composante de} X(\omega) \text{ est } x_i \\ &= \bigcup_{y_k \in X_k^{-1}(\Omega)} X^{-1}(\{y_1;...;y_{i-1};y_i;...;y_d\}) \end{aligned}$$

c'est un ensemble dénombrable
Réciproquement : $\forall i \in [|1;d|], X_i$ vad , $X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times ... \times X_d(\Omega)$
$\forall (x_1;...;x_d) \in X(\Omega), X^{-1}(\{x_1;..;x_d\}) = \bigcap\limits_{i=1}^{d} X_i^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{A}$

Loi de variable aléatoire

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (E, \mathcal{B})$ on s'intéresse à la loi de X vad, dite aussi distribution. C'est la donnée :

$$\forall x \in X(\Omega), P_X(\{x\}) = P(X^{-1}(\{x\})) = P(X = x)$$

On notera $X \hookrightarrow P_X$

Loi uniforme

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1;n|])$, $X : \Omega \to [|1;n|]$

$$\forall k \in [|1;n|], P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Loi de Bernoulli

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $X : \Omega \to [|0;1|]$, avec $p \in [0;1]$

$$P(X = 0) = 1 - p \text{ et } P(X = 1) = p$$

C'est la loi des tirages de type succès-échec

Loi géométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$

$$\exists p \in]0;1[/ \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = (1-p)^{n-1}p^n$$

C'est la loi de mesure du premier succès d'une expérience aléatoire de Bernoulli répétées

Loi binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $X : \Omega \to [|0;n|]$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

C'est la loi qui mesure le nombre de succès dans le cadre de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes

Loi hypergéométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$, $X : \Omega \to [|0;n|]$

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

C'est la loi de mesure du nombre de succès pour des tirages sans remises

Loi de Poisson

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $X : \Omega \to \mathbb{N}$

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

C'est la loi de mesure du nombre de succès d'un évènement rare

3.3.4 Couples de Variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$, deux vad. On note :

$$X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$$
$$Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$$

On définit la loi conjointe de X et Y comme la loi de : $(X,Y) : \Omega \to E \times F$

On la note :

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0;1] \\ (x_i, y_j) & \mapsto & P((X,Y) = (x_i, y_j)) \\ & & P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \\ & & P_{XY}(\{x_i; y_j\}) \end{array}$$

On la note $p_{i,j}$

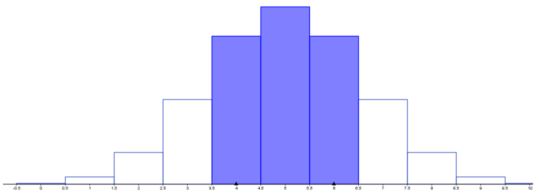


FIGURE 3.1 – Loi binomiale de paramètres n=10 et p=0.5

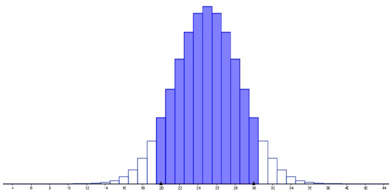


FIGURE 3.2 – Loi binomiale de paramètres n=50 et p=0.5

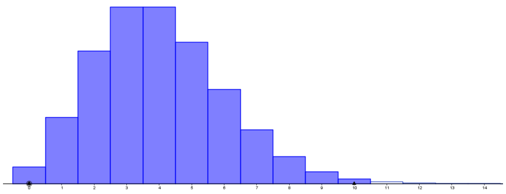


FIGURE 3.3 – Loi de Poisson de paramètres $\lambda = 4$

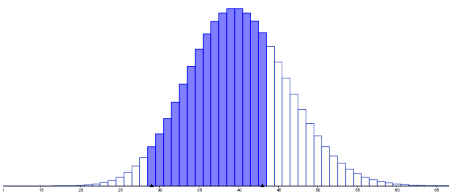


FIGURE 3.4 – Loi de Poisson de paramètres $\lambda = 40$

Loi marginale

La première loi marginale (resp. deuxième loi marginale) de (X,Y) est la loi de X (resp. de Y) : $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0;1] \\ x_i & \mapsto & P(X = x_i) \end{array}$ notée $p_{i,\cdot}$ (resp. $p_{\cdot,j}$)

3.3.5 Variables aléatoires indépendantes

Théorème

Si $\forall i \in J, X_i$ est une vad on a :

(X_i) sont indépendantes $\Leftrightarrow \forall (x_i) \in (X_i(\Omega))$ les évènements $(X_i = x_i)$ sont indépendants

Preuve : cf cours de MPSI. On utilise la sommabilité pour conclure dans le cas où l'univers est dénombrable

Composition de variables aléatoires

Soit (X_i) une famille de va telle que : $\forall i \in I, X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (E_i, \mathcal{B}_i)$ supposées indépendantes. Soit $\forall i \in I, f_i : (E_i, \mathcal{B}_i) \to (F_i, \mathcal{C}_i)$ une va alors $(f_i(X_i))$ sont des va indépendantes

Preuve : découle du théorème sur la composition des va et du résultat précédant

Remarque

Si $\forall i \in I, (X_i)$ est une vad, on prendra $\mathcal{B}_i = \mathcal{P}(E_i)$ et $\mathcal{C}_i = \mathcal{P}(F_i))$

Corollaire

Soit $(X_1; ...; X_n)$ une famille de va indépendantes. $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (E_i, \mathcal{C}_i)$ une va. Soit $m \in [|1; n-1|]$ alors les deux va : $(f_1(X_1); ...; f_m(X_m)$ et $(f_{m+1}(X_{m+1}); ...; f_n(X_n))$ sont indépendantes
Preuve : trivial

Exemples

Si X_1, X_2, X_3 et X_4 sont des va indépendantes alors :

1. $X_1 + 4X_2$ et $X_3^2 - \cos(X_4)$ sont indépendantes
2. $X_1^3 - 8\exp(-3X_2)$ et $\sin(X_3^2 X_2)$

Somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E$ deux vai, où E est muni d'une structure de groupe additif. Alors la convoluée de X et Y, $X+Y \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ \omega & \mapsto & X(\omega)+Y(\omega) \end{array}$ est une vad. On cherche la loi de X + Y :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), P((X+Y) = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P(Y = z - x)$$

Preuve : $(X = x)$ est un SCE

$$\begin{aligned}
P(X+Y=z) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P((X+Y=z)\cap(X=x)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega} P(X=x)P(Y=z-x) \\
&= \sum_{(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega), x+y=z} P(X=x)P(Y=y)
\end{aligned}$$

Application : Loi de Poisson

Soit $(X_1; ...; X_n)$ n vad indépendantes tel que : $\forall i \in [|1;n|], X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

Preuve : par convolution

$$\begin{aligned}
\forall m \in \mathbb{N}, P(X_1+X_2=m) &= \sum_{k=0}^{m} P(X_1=k)P(X_2=m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{m-k} \\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}
\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit par récurrence

Application : Loi Binomiale

Soit $(X_1; ...; X_n)$ n vad indépendantes tel que : $\forall i \in [|1;n|], X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{n} n_i, p)$$

Preuve : technique similaire

Remarque

Soit (X,Y) un couple de vad, X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in J$

$$P((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = p_{i,j} = P(X=x_i)P(Y=y_j) = p_{i,\cdot}p_{\cdot,j}$$

La loi conjointe est le produit des lois marginales

3.4 Moments d'une variable aléatoire

3.4.1 Espérance

Soit un ensemble fini d'élément, on peut mesurer leur taille moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i\in I} T(x_i)$$

On peut les regrouper par classes d'équivalences :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i\in Cl} n_i T(x_i) \in Cl(x_i)$$

$\frac{n_i}{N}$ est la probabilité de cette classe

Définition

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{K}$ une vad, on dit que X possède une espérance si et seulement si $(xP(X=x))$ est sommable. On définit alors :

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$$

Remarque

Lorsque X possède une espérance, on dit que qu'elle est d'espérance finie. Notons qu'on peut écrire :

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) = \sum_{x\in E} xP(X=x)$$

Loi constante

Si X est constante :

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \alpha P(X=x) = \alpha$$

Loi uniforme

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1;n|])$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Loi géométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Preuve : Lemme :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

Par produit de Cauchy de deux séries absolument convergente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{i=0}^{+\infty} z^i \times \sum_{j=0}^{+\infty} z^j \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} z^{i+j} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n
\end{aligned}$$

Or ,

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}p = \frac{1}{p}$$

Loi de Bernoulli

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$$E(X) = p$$

Loi binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

$$E(X) = np$$

Loi de Poisson

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$$

Cas de divergence

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}^*/\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$$

$\sum nP(X = n) = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge
Et si on a $X : \Omega \to \{(-1)^n n\}$

$$P(X = (-1)^n n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

La famille $(\sum nP(X = (-1)^n n))$ n'est pas sommable, pas d'espérance

Formule de Transfert

Soit X une vad , $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to E$ et $f : E \to \mathbb{K}$ une application. f(X) est une vad, on a :

f(X) possède une espérance $\Leftrightarrow \sum_{x\in E} f(x)P(X = x)$ est sommable

Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{y\in f(X(\Omega))} yP(f(X) = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Preuve : cf cours de MPSI

Propriétés

1. Positivité : si $X \geq 0$ et X possède une espérance alors $E(X) \geq 0$
2. Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$
3. Si X et Y possède une espérance : $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
4. $Y \geq 0$ et possède une espérance et si $|X| \leq Y$ alors X possède une espérance et : $|E(X) \leq E(|X|) \leq E(Y)$

Preuve : cf cours de MPSI

Théorème de structure

L'ensemble des vad :$\Omega \to \mathbb{K}$ possédant une espérance est $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve : découle de la linéarité de l'espérance

Variables aléatoires indépendantes

Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{K}$ sont des vadi, si elles possèdent une espérance alors XY aussi :

$$\mathrm{E(XY) = E(X)\ E(Y)}$$

Preuve : découle du théorème de transfert

⚠La réciproque est fausse

3.4.2 Variance

Définition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une vard, on dit que X admet un moment d'ordre 2, et on note $X \in \mathcal{E}_2$ si et seulement si $X^2 \in \mathcal{E}_1$, elle possède un moment d'ordre 1, une espérance :

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 P(X = x)$$

Propriétés

1. $\mathcal{E}_2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. Soit $(X, Y) \in \mathcal{E}_1$ alors $XY \in \mathcal{E}_1$ et :
$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$
3. $X \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow X \in \mathcal{E}_1$ et $E(X)^2 \leq E(X^2)$

Preuve :

1. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_1$
2. $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \in \mathcal{E}_1 \Rightarrow XY \in \mathcal{E}_1$
De plus soit , $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{E}_2^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (X,Y) & \mapsto & E(XY) \end{array}$ c'est une forme bilinéaire symétrique. On vérifie de plus qu'elle est positive :
$$\forall X \in \mathcal{E}_2, \varphi(X, Y) = E(X^2) \geq 0$$
φ est une forme bilinéaire symétrique positive, elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$$|\varphi(X,Y)| \leq \sqrt{\varphi(X,X)}\sqrt{\varphi(Y,Y)} \Rightarrow |E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$
3. On prend $Y = 1 \in \mathcal{E}_2$ et on applique ce qui précède

Variances, écart-type

Soit $X \in \mathcal{E}_2$, alors $X \in \mathcal{E}_1$

$$V(X) = E((X - E(X)^2) \ \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

La variance mesure la dispersion

Formule de Koenig-Huygens

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Variables centrées, réduites

On dit que la variable X est centrée si E(X) = 0 et qu'elle est réduite si $\sigma(X) = 1$. Notons que si $\sigma(X) > 0$, $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est la variable centrée-réduite associée à X notée X^*

Propriété

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Preuve : cf cours de MPSI

Loi uniforme

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1; n|])$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Loi de Bernoulli

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$$V(X) = p(1 - p)$$

Loi géométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

$$V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Preuve : On démontre de manière analogue à celui utilisé pour le calcul de l'espérance de loi géométrique :

$$|z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

D'après le théorème de transfert : $E(X^2) = \frac{2-p}{p^3}$
La formule de Koenig-Huygens permet alors de conclure

Loi binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

$$V(X) = np(1-p)$$

Loi de Poisson

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-2)\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda^2 - \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

3.4.3 Covariance

Définition

Soit X,Y deux vad $\Omega \to \mathbb{R}$ qui admettent un moment d'ordre 2. On définit la covariance de X et Y :

$$Cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Théorème

Si X et Y sont indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$

Preuve : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, notons que la réciproque est fausse

Remarque

La covariance est une forme bilinéaire, symétrique et positive, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$Cov(X,Y) \leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} = \sigma(X)\sigma(Y)$$

Coefficient de corrélation

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1;1]}$$

Théorème

1. Soit $(X_1;...;X_n)$ n vad: $\Omega \to \mathbb{R}$ possédant un moment d'ordre 2 :

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$$

2. Si de plus les va (X_i) sont indépendantes :

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Preuve : cf cours de MPSI

3.4.4 Moment d'ordre supérieur

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une vard et $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X possède un moment d'ordre k si et seulement $X^k \in \mathcal{E}_1$:

$$\mathcal{M}_k(X) = E(X^k) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^k P(X = x)$$

Exemples

1. Si $X(\Omega)$ est fini, X admet des moments à tous les ordres
2. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \forall k \in \mathbb{N}^*, n^k(1-p)^{n-1} = o(\frac{1}{n^2})$ donc X possède des moments de tout ordre
3. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \forall k \in \mathbb{N}^*, u_n = n^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda}{n+1}(1+\frac{1}{n})^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge, X admet des moments d'ordre k

3.4.5 Markov, Bienaymé-Tchebychev, grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une vard positive : $\Omega \to \mathbb{R}^+$, qui admet une espérance :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une vard positive : $\Omega \to \mathbb{R}^+$, qui admet un moment d'ordre 2 : soit $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Loi faible des grands nombres

Soit (X_k) une suite de vard : $\Omega \to \mathbb{R}$ de même loi, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 P(X_i = x) = P(X_j = x)$ indépendantes possédant un moment d'ordre 2, soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

Pour ε fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1)| = 0$$

Preuve : On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $X = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

Chapitre 4

Calcul matriciel

Sommaire

4.1 Rappels

4.1.1 Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(e_1;...;e_n)$ une base de E et $(x_1;...;x_p) \in E^p$, on appelle matrice de $(x_1;...;x_p)$ dans $\mathcal{B}$:

$$mat_{\mathcal{B}}(x_1;...;x_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$\forall j \in [|1;p|], x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension respectives p et n, $\mathcal{B}(e_1;...;e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1;...;f_n)$ une base de F $u \in \mathcal{L}(E,F)$:

$$mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = mat_{\mathcal{C}}(u(e_1);...;u(e_p))$$

Pour les endomorphismes, on prend par convention la même base à l'arrivée qu'au départ

Matrices élémentaires

1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$ev. On dispose de la base :
$$\forall (i,j) \in [|1;n|] \times [|1;p|], E^{i,j} = (\delta_{i,j})_{(i,j) \in [|1;n|] \times [|1;p|]}$$
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$ algèbre non commutative et non intègre pour $n \geq 2$, de neutre :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall (i,j,k,l) \in [|1;4|]^4, E^{i,j} \times E^{k,l} = \delta_{i,k} E^{i,j}$

Groupes des inversibles

On note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe multiplicatif des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), CA = I_n \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0 \Rightarrow X = 0 \end{aligned}$$

Preuve : cf cours de MPSI

⚠On ne peut simplifier par une matrice non inversible, car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre :
$B \neq 0, A_1 B = A_2 B$ et $A_1 \neq A_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par contre on a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A_1 X = A_2 X \Rightarrow A_1 = A_2$

4.1.2 Produits par blocs

Soit $(n,m,p) \in (\mathbb{N}^*)^3, A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ alors :

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n_2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n_1,1} & \dots & A_{n_1,n_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n_3} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B_{n_2,1} & \dots & B_{n_2,n_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1,} + ... + A_{1,n_2}B_{1,n_3} & \cdots & A_{1,1}B_{1,n_3} + ... + A_{n_1,n_2}B_{n_2,n_3} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n_1,1}B_{1,1} + ... + A_{n_1,n_2}B_{n_2,1} & \dots & A_{n_1,1}B_{1,n_3} + ... + A_{n_1,n_2}B_{n_2,n_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tout se passe comme si les blocs jouaient le rôle de coefficients scalaire. Cette approche est utile pour calculer l'inverse par bloc d'une matrice

Déterminant par blocs

$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(M) = \det(A) \times \det(B)$

Ce qui se généralise par récurrence :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & * \\ 0 & \diagdown & * \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix}, \det(M) = \prod_{i=1}^{n} \det(A_i)$$

4.1.3 Transposition

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose :

$$\forall (i,j) \in [|1;n|] \times [|1;p|], [{}^tA]_{i,j} = a_{j,i}$$

Propriétés

1. $\tau : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$ est linéaire
2. $\tau \circ \tau = id_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$
3. ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$
4. $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow {}^tA \in GL_n(\mathbb{K}), ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Matrices symétriques et antisymétriques

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/{}^tM = M\}$
$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/{}^tM = -M\}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \bigoplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$
$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$
On notera que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = \frac{M+{}^tM}{2} + \frac{M-{}^tM}{2}$

Preuve : on applique le théorème des symétries à la transposition

⚠Le produit de 2 matrices symétriques (A,B) est symétrique si et seulement si ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA$ si et seulement si A et B commutent

4.1.4 Matrices triangulaires, diagonales

Définition

$\mathcal{T}(\mathbb{K})^s_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/\forall(i,j) \in [|1;n|]^2, a_{i,j} = 0$ si i>j$\}$
$\mathcal{T}(\mathbb{K})^i_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/\forall(i,j) \in [|1;n|]^2, a_{i,j} = 0$ si i<j$\}$
$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}(\mathbb{K})^s_n \cap \mathcal{T}(\mathbb{K})^i_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/\forall(i,j) \in [|1;n|]^2, a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j\}$

Structure

$\mathcal{T}(\mathbb{K})^s_n$, $\mathcal{T}(\mathbb{K})^i_n$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)}{2}$, n

Propriétés

1. $\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1}, & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$
2. A est inversible si et seulement si tous coefficients diagonaux sont non nuls ($\det(A) \neq 0$)
3. Dans ce cas : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{pmatrix}$
4. Les puissances de A conservent le caractère triangulaire, donc $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(A)$ est triangulaire
5. Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ alors $A^k = \begin{pmatrix} a^k_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a^k_{n,n} \end{pmatrix}$ $P(A) = \begin{pmatrix} P(a_{1,1}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & P(a_{n,n}) \end{pmatrix}$

Matrices triangulaires nilpotentes

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ 0 & \diagdown & * \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si $\exists r \in \mathbb{N}^*/A^r = 0$ si et seulement si $\forall i \in [|1,n|], a_{i,i} = 0$

Preuve :

$$A^r = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1}^r & * & * \\ 0 & \diagdown & * \\ 0 & 0 & a_{n,n}^r \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|], a_{i,i} = 0$$

$\forall i \in [|1;n|] a_{i,i} = 0, \mathcal{B} = (e_1;...;e_n)$ le base canonique de$\mathbb{K}^n, u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A :

$u(e_1) = 0$
$u(e_2) \in Vect[e_1]$
$u(e_3) \in Vect[e_1, e_2]$
$\vdots$
$u(e_n) \in Vect[e_1;...;e_{n-1}]$

$F_i = Vect[e_1;...;e_i]$ et $F_i = \{0\}$ si $i \leq 0$
$\forall i \in [|1;n|], u(F_i) \subset F_{i-1}$ par récurrence :

$$u^k(F_i) \subset F_{i-k}$$

d'où $u^n(F_i) \subset F_{i-n} = \{0\} \Rightarrow u^n = 0$

Notons que : $\forall k \in [|1;n-1|]$ $A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \diagdown & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrices de Jordan

On définit $J_{n,r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \diagdown & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}$

On en déduit la relation : $\forall k \in [|1;n-1|], J_{n,r}^k = J_{n,r+k} \Rightarrow J_{n,r}^r = 0$

Théorème d'inversion

$$A^r = 0 \Leftrightarrow (I_n - A) \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow (I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{r-1} A^k$$

4.1.5 Calcul de puissance et d'inverse

Binôme de Newton

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A et B commutent :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple

$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + \alpha J_2$ ces matrices commutent car $J_2^2 = 0$

$$\forall p \geq 2, M^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\alpha J_2)^k = \binom{p}{0} I_2 + \binom{p}{1} \alpha J_2 = \begin{pmatrix} 1 & p\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la formule vaut pour $p \in \mathbb{Z}$

Similitudes

Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = mat(\mathcal{S}_{p,\theta}), z = a + ib = pe^{i\theta}$
$M^n = math(\mathcal{S}_{p^n, n\theta})$

$$\begin{aligned} M^n = (aI_2 + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) &= (aI_2 + bC)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k (-1)^k C^k \\ &= C \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} a^{n-2k} b^{2k} (-1)^k \end{aligned}$$

Polynômes annulateurs

Soit $A \in \backslash(\mathbb{K})$, $\dim(\backslash(\mathbb{K})) = n^2$, toute famille de cardinale $n^2 + 1$ est liée, la famille $(I_n, A, ..., A^{n^2})$ est liée,

$$\exists (\alpha_0; ...; \alpha_{n2}) \in (\mathbb{K}^{n^2})^* / \sum_{j=0}^{n^2} \alpha_j A^j = 0$$

Par conséquent, $\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} / P(A) = 0$
Pour $k \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de X^k par P :

$$X^k = Q_k P + R_k, \deg(R_k) \leq \deg(P) - 1$$

On applique à A : $A^k = R_k(A)$

Application

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\pi} & e^{-7} \\ 0 & -1 & 42 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & \sqrt{\pi} & e^{-7} \\ 0 & -1-X & 42 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)(X-2)$$

C'est le polynôme caractéristique de A, donc il est annulateur de A d'après le théorème de Cayley-Hamilton
$X^k = Q_k P + a_k + b_k X + c_k X^2$
On évalue aux racines de P :
$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k & = 1 \\ a_k - b_k + c_k & = (-1)^k \\ a_k + 2b_k + 4c_k & = 2^k \end{cases}$$

$A^k = a_k I_3 + b_k A + c_k A^2$

Inversibilité

En ce qui concerne l'inverse, si on a :

$$a_0 I_n + a_1 A + ... + a_r A^r = 0$$

Si a_0, $A(-\frac{a_1}{a_0} I_n - ... - \frac{a_r}{a_0} A^{r-1}) = I_n$
Ainsi A est inversible et $A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I_n - ... - \frac{a_r}{a_0} A^{r-1} \in \mathbb{K}[a]$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & \diagdown & a \\ a & a & b \end{pmatrix} = (b-a)I_n + aM, M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On a $M^2 = nM, (\frac{1}{n}M)^2 = \frac{1}{n}M$, c'est la matrice d'un projecteur. $(aM)^2 = na^2 M$, d'où :

$$(A - (b-a)I_n)^2 = na(A - (b-a)I_n)$$

$$A^2 - (2(b-a) + na)A + (b-a)(b-a+na)I_n = 0$$

$$A(A - (2(b-a) + na)I_n) = (a-b)(b-a+na)I_n$$

$$A(\frac{1}{(a-b)(b-a+na)}A - \frac{2(b-a)+na}{(a-b)(b-a+na)I_n}) = I_n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(b-a+na)}A - \frac{2(b-a)+na}{(a-b)(b-a+na)I_n} \text{ si } a \neq b \text{ et } b-a \neq -na$$

Si $b = a$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$ A n'est pas inversible

Si $b = -(n-1)a, A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A \notin GL(\mathbb{K})$

4.2 Changement de bases

4.2.1 Matrices équivalentes

Définition

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on dit que $A \sim B$ si :

$$\exists (P, Q) \in Gl_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AP$$

si et seulement si A et B représentent la même application linéaire dans des bases différentes
si et seulement si rg(A) = rg(B)
si et seulement si $A \sim B \sim J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⚠Si $A \sim B$ alors il n'y a aucun raison que $A^2 \sim B^2$, par exemple :
A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = 0$ et $B^2 \neq 0$

Formule de changement de bases

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n), \mathcal{B}' = (e'_1; ...; e'_n)$ deux bases de E,

$$x \in E, X = Coord_{\mathcal{B}}(x) \quad X' = Coord_{\mathcal{B}'}(x)$$

$$X = PX' \text{ avec } P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

4.2.2 Similitudes

Définition

On dit que A et A' sont semblables si et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), A' = P^{-1}AP$ si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. C'est une relation d'équivalence

Théorème

Si A et A' sont semblables alors :

1. Elles sont équivalentes : rg(A) = rg(A')
2. $\det(A) = \det(P^{-1}AP) = \det(A)$
3. $A' = P^{-1}AP, \forall n \in \mathbb{N}, A'^n = P^{-1}A^nP$
4. $\forall Q \in \mathbb{K}[X], Q(A') = P^{-1}Q(A)P$

⚠Deux matrices peuvent être équivalentes, mais pas semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rg(A) = rg(A') : elles sont équivalentes
$\det(A) \neq \det(A')$: elles ne sont pas semblables

Remarques

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}(\lambda I_n)P = \lambda I_n$ La seule matrice semblable à une matrice scalaire est elle-même

2. A et A' sont semblables , $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{c} (A-\lambda I_n)^k \text{ et } (A'-\lambda I_n)^k \text{ le sont} \\ rg((A-\lambda I_n)^k) = rg((A'-\lambda I_n)^k) \end{array}$$

Méthode

> Pour montrer A et A' sont semblables, on ne cherche jamais à résoudre l'équation d'inconnue $P \in Gl_n(\mathbb{K}), A' = P^{-1}AP$. Il est plus rentable de former $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A et de vérifier qu'il existe $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{K}^n / mat_{\mathcal{B}'}(u) = A'$

Application 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n, u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que J_n et ${}^tJ_n$ sont semblables : $\begin{cases} u(e_1) = 0 \\ u(e_2) = e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = e_{n-1} \end{cases}$

On cherche une base telle que : $\begin{cases} u(e'_1) = e'_2 \\ \vdots \\ u(e'_{n-1}) = e'_n \\ u(e'_n) = e'_1 \end{cases}$

Il suffit de poser :$e'_n = e_1, e'_{n-1} = e_2, ..., e'_1 = e_n$. On a :P= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \diagup & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Application 2

Soit $\alpha \neq 0$ et M $= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Monter que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{K}^2$: $\begin{cases} u(e_1) = e_1 \\ u(e_2) = \alpha e_1 + e_2 \end{cases}$

On cherche $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ base de $\mathbb{K}^2$ telle que : $\begin{cases} u(e'_1) = e'_1 \\ u(e'_2) = e'_1 + e'_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = \frac{e_2}{\alpha} \end{cases}$

Matrices semblables sur $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ (HP)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) / P^{-1}AP = B$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Preuve : $P = P_1 + iP_2, (P_1, P_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

$$\begin{aligned} PB = AP & \Leftrightarrow & P_1B + iP_2B = AP_1 + iAP_2 \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} P_1B = AP_1 \\ P_2B = AP_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Hélas on n'est pas sur que P_1 ou P_2 soit inversible : $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_1 + P_2 \in GL_2(\mathbb{C})$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}, (P_1 + \lambda P_2)B = A(P_1 + \lambda P_2)$, formons : $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \det(P_1 + zP_2) \end{array}$ $f(i) = \det(P) \neq 0$, f n'est pas nulle sur $\mathbb{R}$, car si on avait $\forall \lambda \in \mathbb{R}$(infini), $f(\lambda) = 0$ alors $f = 0$, absurde donc,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \det(P_1 + \lambda P_2) \neq 0$$

On a bien $Q \in GL_n(\mathbb{R}), Q^{-1}AQ = B$

Remarque

Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps commutatifs. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\Pi_{\mathbb{K},A}$ le polynôme minimal de A sur $\mathbb{K}$. On a : $\Pi_{\mathbb{K},A} \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{L}[X], \Pi_{\mathbb{K},A}(A) = 0$, donc :

$$\Pi_{\mathbb{L},A} | \Pi_{\mathbb{K},A}$$

De plus : $\deg(\Pi_{\mathbb{K},A}) = \dim(Vect_{\mathbb{K}}[A^k]_{k \in \mathbb{N}}) = rg_{\mathbb{K}}(A^k)_{0 \leq k \leq n^2-1} = rg_{\mathbb{L}}(A^k)_{0 \leq k \leq n^2-1}$
Le rang se calcule en appliquant le pivot de Gauss au système de coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sont les mêmes coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$.

Donc : $\begin{cases} \deg(\Pi_{\mathbb{K},A}) = \deg(\Pi_{\mathbb{L},A}) \\ \Pi_{\mathbb{L},A} | \Pi_{\mathbb{K},A} \end{cases} \Rightarrow \Pi_{\mathbb{K},A} = \Pi_{\mathbb{L},A}$, le polynôme minimal est indépendant du corps de base

Exemple

Les matrices suivantes sont elles semblables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$rg(A - I_6) = rg(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = 4$$

$$rg(B - I_6) = rg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = 3$$

Les rangs ne sont égaux, elles ne sont pas semblables

4.2.3 Trace

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

$$tr \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & tr(A) \end{array} \Rightarrow tr \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$$

C'est une forme linéaire non nulle :

$$tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \diagdown & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1 \neq 0$$

Théorème

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) : tr(AB) = tr(BA)$
2. $\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) : tr(P^{-1}AP) = tr(A)$

3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit la trace de u comme : $tr(u) = tr(mat_{\mathcal{B}}(u))$.
La trace est une forme linéaire sur E, vérifiant : $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E), tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$

⚠Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$:
$tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CBA) = tr(CAB) \neq tr(BAC)$

Trace d'un projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E, dans une base adaptée à $E = Im(p) \oplus Ker(p)$

$$mat_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = \dim(Im(p)) = rg(p)$$

Il vient : $tr(p) = rg(p)$

Exemples

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ de dimension finie, |G| = m. Posons : $p = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} g$. Montrer que p est un projecteur, déterminer son image et son noyau.
Fixons $g_0 \in G, g_0 \circ p = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g_0 \circ g$. Or l'application : $g \mapsto g_0 \circ g$ est bijective de G dans G, donc :

$$g_0 \circ p = \frac{1}{m}\sum_{g \in G} g = p$$

d'où

$$\frac{1}{m}\sum_{g_0 \in G} g_0 \circ p = p^2 \Leftrightarrow p = p^2$$

C'est un projecteur. Notons que si $x \in \bigcap_{g \in G} Ker(g - id)$ (ie) $\forall x \in G, g(x) = x, p(x) = \frac{1}{m}\sum_{g \in G} g(x) = x$
Réciproquement : si $p(x) = x$ alors $\forall g \in G, (g \circ p)(x) = p(x) = x = g(x)$
Il vient : $Im(p) = Ker(p - id) = \bigcap_{g \in G} Ker(g - id)$

$$tr(p) = rg(p) = \frac{1}{m}\sum_{g \in G} tr(g) \in m\mathbb{Z}$$

4.3 Quelques résultats à connaitre

4.3.1 Centre de $GL_n(\mathbb{K})$ (HP)

Lemme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E) / \forall x \in E \setminus \{0\}, (x, u(x))$ est liée, $\forall x \in E \setminus \{0\} / u(x) = \lambda_x x$. Alors u est une homothétie

Preuve : Soit $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$ si (x,y) est liée , $\exists \mu \in \mathbb{K}^* / y = \mu x$, on a alors :

$$u(y) = \lambda_y y = \mu u(x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x x$$

$y \neq 0$ alors $\lambda_x = \lambda_y$
Si (x, y) est libre , $\begin{cases} u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) \\ u(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y \end{cases}$
$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$, par liberté de (x, y) : $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$. Ainsi, λ_x ne dépend pas de x :

$$\exists\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, u(x) = \lambda x, u = \lambda id_E$$

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)/\forall v \in GL(E), u \circ v = v \circ u$. Alors u est une homothétie. En particulier, $\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$ alors u est une homothétie .

Preuve : Soit $E \setminus \{0\}$, H un supplémentaire de $\mathbb{K}x$ dans E il en existe d'après l'axiome du choix, et v la symétrie par rapport à $\mathbb{K}x$ parallèlement à H, $v \in GL(E)$:

$$(u \circ v)(x) = u(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$$

donc $u(x) \in Ker(v - id) = \mathbb{K}x$
$\forall x \in E \setminus \{0\}, (x, u(x))$ est liée d'après le lemme, u est une homothétie

Matrices qui commutent avec les autres (HP)

Les seules matrices qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires, de la forme $\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}$
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/\forall P \in GL_n(\mathbb{K}), AP = PA$ alors

$$\exists\lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda I_n$$

Pour démonter directement ce résultat plus faible que le précédant, on passe par les matrices élémentaires

4.3.2 Lagrange, Vandermonde, Cauchy

Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, $n \in \mathbb{N}$, $(a_0; ...; a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ 2 à 2 distincts. L'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0); ...; P(a_{n+1})) \end{array}$$

est un isomorphisme. Soit $i \in [|0; n|], e_i$ i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, soit :

$$\mathcal{L}_i = \varphi^{-1}(e_i)$$

C'est l'unique polynôme de degré $\leq n / \forall j \in [|0;n|], \mathcal{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$

$$\mathcal{L}_i(X) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

$(\mathcal{L}_0; ...; \mathcal{L}_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$

$$P = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i P(a_i)$$

Déterminant de Vandermonde

Pour $(a_1; ...; a_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$V_n(a_1; ...; a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Preuve : cf cours de MPSI, on raisonne par récurrence sur n, on rajoute une ligne d'indéterminées : le déterminant est alors un polynôme en cette dernière, en on connait les racines et sont coefficient dominant, ce qui permet de conclure

Déterminant de Cauchy (HP)

Soient $(a_1; ...; a_n; b_1; ...; b_n) \in \mathbb{K}^{2n} / \forall (i,j) \in [|1;n|]^2, a_i + b_j \neq 0$. On forme :

$$C_n(a_1; ...; a_n; b_1; ...; b_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_1+b_n} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$\exists i \neq j / a_j = a_i$ ou $b_j = b_i$, on a deux fois la même ligne,

$$C_n(a_1; ...; a_n; b_1; ...; b_n) = 0$$

Supposons que les (a_i) et (b_j) sont 2 à 2 disjoints

Formons : $$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{K} \setminus \{-a_1; ...; -a_n\} & \to & \mathbb{K} \\ & & X & \mapsto & \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_1+X} & \cdots & \frac{1}{a_n+X} \end{vmatrix} \end{array}$$

En développant par rapport à la dernière ligne :

$$g(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{a_i + X} = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{n} (X + a_i)}$$

$\deg(P) \leq n-1$ et $P(b_1) = ... = P(b_{n-1}) = 0$

$$\exists \mu \in \mathbb{K}/P(X) = \mu \prod_{i=1}^{n-1}(X - b_i)$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\mu_n &= C_{n-1}(a_1;...;a_{n-1};b_1;...;b_{n-1}) \\
&= \frac{P(-a_n)}{(a_1-a_n)...(a_{n-1}-a_n)} \\
&= \mu\frac{(a_n+b_1)...(a_n+b_{n-1})}{(a_1-a_n)...(a_{n-1}-a_n)}
\end{aligned}$$

D'où : $\mu = C_{n-1}(a_1;...;a_{n-1};b_1;...;b_{n-1})\frac{(a_1-a_n)...(a_{n-1}-a_n)}{(a_n+b_1)...(a_n+b_{n-1})}$
En reportant :

$$C_n(a_1;...;a_n;b_1;...;b_n) = C_{n-1}(a_1;...;a_{n-1};b_1;...;b_{n-1})\frac{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})}{(a_n+b_1)...(a_n+b_{n-1})}\frac{(b_n-b_1)...(b_n-b_{n-1})}{(a_1+b_1)...(a_n+b_n)}$$

$C_1(a,b) = \frac{1}{a+b}$, par récurrence :

$$\boxed{C_n(a_1;...;a_n;b_1;...;b_n) = \frac{V_n(a_1;...;a_n)V_n(b_1;...;b_n)}{\prod\limits_{(i,j)\in[|1;n|]^2}(a_i+b_j)}}$$

4.4 Rang et opérations élémentaires

4.4.1 Rang d'une matrice

Sous-matrice

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r, $r \leq \min(n,p)$. Soit $I \subset [|1.n|]$ et $J \subset [|1;p|]$. On dit que $A' = (a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ est une sous-matrice de A

Théorème

1. $rg(A') \leq rg(A)$
2. r est la taille maximale d'une sous-matrice carrée inversible. Une telle sous-matrice s'appelle matrice principale de A

Preuve :

1. r'=rg(A'), $\exists r'$ colonnes de A' qui forment un système libre. Elles forment encore un système libre dans A, donc r = r'
2. On peut extraire r colonnes de A qui forme un système libre dans $\mathbb{K}^n$. Soit A_1 cette matrice $\in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. $rg(A_1) = r$ donc on peut extraire les lignes de A_1 qui forment un système libre. La sous-matrice $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ a pour rang r : elle est inversible

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ est sous-matrice principale}$$

4.4.2 Systèmes linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respectives n et p, $u \in \mathcal{L}(E,F), y \in F$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u), Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
On cherche à résoudre $AX = Y$ d'inconnue $X \in E$. Cette équation est compatible si et seulement si $y \in Im(u)$. Soit dans ce cas $x_1 \in E, u(x_1) = y$. On a alors :

$$\forall x \in E, u(x) = y = u(x_1) \Leftrightarrow (x - x_1) \in Ker(u)$$

Numériquement, soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Si rg(u) = rg(A) :

$$u(x) = y \Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

En appliquant le pivot de Gauss, ce système équivaut à, si les premières lignes sont libres :
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{r,1}x_1 + \dots + a_{r,p}x_p = y_r \\ 0 = y_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = y_n \end{cases}$$
Les n-r dernières équations équivalent à la compatibilité du système, c'est un système d'équations cartésiennes de Im(u). Cette condition étant supposée réalisée, si par exemple les r premières colonnes de A sont libres, ce système équivaut à : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{r,1}x_1 + \dots + a_{r,p}x_p = y_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1,p}x_p \end{cases}$
Pour $(x_{r+1}; ...; x_p)$ fixé c'est un système de Cramer, on exprime $(x_1; ...; x_r)$ en fonction de $(x_{r+1}; ...; x_p)$ qui jouent le rôle de paramètres. On obtient une base de Ker(u) en prenant $y_1 = \dots = y_r = 0$

4.4.3 Opérations élémentaires

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(i,j) \in [|1;n|]^2$, $E^{i,j}$ désigne la matrice élémentaire correspondante.

Matrices de Transvection

Soit $\mathcal{T}_{i,k}(\lambda) = I_n + \lambda E^{i,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \diagdown & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \diagdown & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Elle traduit l'opération d'ajout de λ fois la i-ème colonne à la k-ième colonne lorsque le produit est fait à gauche, et l'opération analogue pour les lignes lorsque le produit se fait à droite

Matrices de dilatation

$$D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diagdown & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1)E^{i,i}$$

Elle traduit l'opération de multiplier α fois la i-ème colonne lorsque le produit est fait à gauche, et l'opération analogue pour les lignes lorsque le produit se fait à droite. On a les propriétés suivantes :

$D_i(\alpha) \times D_i(\beta) = D_i(\alpha \times \beta)$

$D_i(\alpha) = D_i(\frac{1}{\alpha})$

Matrices de permutation

$\mathcal{E}_{i,j} = \mathcal{T}_{j,i}(1) \times \mathcal{T}_{i,j}(-1) \times \mathcal{T}_{j,i}(1) \times D_i(-1)$

Elle traduit l'opération d'échanges des lignes / colonnes i et j

Pivot de Jordan

1. $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilations
2. $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \det(M) = 1\} = Ker(\det)$

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$

Sommaire

5.1 Éléments propres

5.1.1 Définitions

Vecteurs propres, valeurs propres

On cherche des vecteurs sur lesquels u agit de manière simple :

$$\exists x \in E \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{K} / u(x) = \lambda x$$

On dit que x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ
On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si $\exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$
si et seulement si $u - \lambda id_E$ n'est pas injectif
si et seulement si $u - \lambda id_E$ est bijectif (dimension finie)
ce qui équivaut dans ce cas à $\det(u - \lambda id_E) = 0$

Spectre

On note Sp(u) le spectre de u, l'ensemble des valeurs propres de u

Sous-espaces propres

Pour $\lambda \in Sp(u)$, on note $E_\lambda = Ker(u - \lambda id_e)$ le sous-espace propre associé à λ qui n'est pas réduit à $\{0\}$

Exemples

1. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, en tant que $\mathbb{C}$ espace vectoriel
   $\begin{array}{rccc} u & : & E & \to & E \\ & & f & \mapsto & f' \end{array} \quad u \in \mathcal{L}(E)$
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in E$,
   $$u(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{C}, f(t) = Ae^{\lambda t}$$
   $$Sp(u) = \mathbb{C}$$
   $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f_\lambda \neq 0$ vérifiant : $u(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$
   $\lambda \in \mathbb{C}, Ker(u - \lambda id_E) = \mathbb{C} f_\lambda$, droite vectorielle
2. $E = \mathbb{C}[X]$ et $\begin{array}{rcccc} u & : & E & \to & E \\ & & P & \mapsto & XP \end{array}$
   $\lambda \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[X], u(P) = \lambda P \Leftrightarrow XP = \lambda P \Leftrightarrow \deg(XP) = \deg(P) + 1 > \deg(P) \geq \deg(\lambda P)$
   absurde donc $Sp(u) = \emptyset$
3. Cas d'une homothétie : $\lambda_0 \in \mathbb{K} / u = \lambda id_E$
   $$\lambda \in \mathbb{K}, x \in E, u(x) = \lambda x \Leftrightarrow \lambda_0 x = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \lambda, x \neq 0 \\ ou \\ x = 0, \lambda \neq \lambda_0 \end{cases}$$
   $Sp(u) = \{\lambda_0\}$ et $Ker(u - \lambda_0 id_E) = E$
4. Cas d'une rotation : $E = \mathbb{R}^2$, plan euclidien orienté et u la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Comme $\forall x \neq, (u(x)|x) = 0$, on ne peut pas avoir $u(x) \in Vect[x]$, donc
   $$Sp(u) = \emptyset$$

Injectivité

$0 \in Sp(u) \Leftrightarrow u$ est non injectif

5.1.2 Propriété élémentaires

Théorème de stabilité

1. Si $\lambda \in Sp(u), E_\lambda = Ker(u - \lambda id_E)$ est stable par u et :
$$u_{|E_\lambda} = \lambda id_{E_\lambda}$$
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors :
$$Sp(u_{|F}) \subset Sp(u)$$

Preuve :

1. Si $x \in E_\lambda, u(x) = \lambda x \in E_\lambda$ et $u_{|E_\lambda} = \lambda id_{E_\lambda}$
2. Si $\lambda \in Sp(u_{|F}) : \exists x \in F\{0\} \subset E\{0\}, u(x) = \lambda x \Rightarrow \lambda \in Sp(u)$

Familles de vecteurs propres

1. Soit $(\lambda_1; ...; \lambda_p) \in Sp(u)^p$ distincts et $(x_1; ...; x_p) \in E^p$ des vecteurs propres associés. Alors $(x_1; ...; x_p)$ est libre
2. $E_{\lambda_i} = Ker(u - \lambda_i id_E)$ on a :
$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{p} Ker(u - \lambda_i id_E)$$
3. En dimension finie, le spectre est fini, de cardinal inférieur à $\dim(E)$

Preuve :

1. Supposons $(x_1; ...; x_p)$ liée, soit r le plus petit nombre d'éléments de la famille qui sont liés : on suppose, quitte à réaliser une permutation que ce sont les r premiers :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} \alpha_k u(x_k) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \lambda_k x_k - \lambda_1 \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k = 0\end{aligned}$$
donc on a r-1 éléments liés, contradiction

2. Soit $(y_1;...;y_p) \in E_1 \times ... \times$

$$\sum_{i=1}^{p} y_i = 0 \Leftrightarrow \exists i \in [|1;p|]/y_i \neq 0$$

   Soit $J = \{i \in [|1;p|]/y_i \neq 0\}$. $\sum\limits_{i \in J} y_i = 0$ et cette est libre, d'après ce qui précède :$\forall i \in J, y_i = 0$, on a :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

5.1.3 Polynômes d'endomorphismes

Rappels

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X], \Rightarrow P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$$

Par définition :

$$\forall x \in E, [P(u)](x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x) \in E$$

On définit le morphisme d'algèbres : $\begin{array}{cccc} \varphi_u & : & \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & & P & \mapsto & P(u) \end{array}$ on obtient :

$$Im(\varphi_u) = \{P(u)/P \in \mathbb{K}[X]\} = Vect_{k \in \mathbb{N}}(u^k) = \mathbb{K}[u]$$

C'est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u
$Ker(\varphi_u) = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(u) = 0\}$ est un idéal, c'est l'ensemble des polynômes annulateur de u. Dans le cas de la dimension finie, $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. La famille $(u^k)_{1 \leq k \leq n^2}$ est liée car elle contient $n^2 + 1$ éléments, donc u admet un polynôme annulateur non nul : $Ker(\varphi_u) \neq \{0\}$

$$\exists! \Pi_u \in \mathbb{K}[X] \text{ unitaire tel que } Ker(\varphi_u) = \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

$\forall P \in \mathbb{K}[X] P(u) = 0 \Leftrightarrow \Pi_u | P$, Π_u est la polynôme minimal de u (on gardera cette notation dans la suite du cours)

⚠En dimension infinie, il n'existe pas toujours de polynôme minimal : $\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{C}[X] & \rightarrow & \mathbb{C}[X] \\ & & P & \mapsto & XP \end{array}$

On a $\begin{array}{cccc} u^k & : & \mathbb{C}[X] & \rightarrow & \mathbb{C}[X] \\ & & P & \mapsto & X^k P \end{array}$ $\forall A \in \mathbb{C}[X], [A(u)](P) = AP$

$A(u) = 0$ alors pour $P = 1, A = 0, Ker(\varphi_u) = \{0\}$

Remarques

1. Un polynôme annulateur n'est pas forcement le polynôme minimal : $u = id_E, \Pi_u = X - 1$ et $X^2 - 1$ est annulateur de u
2. $\mathcal{L}(E)$ n'étant pas intègre, Π_u n'est pas nécessairement irréductible. Pour un projecteur $X^2 - X$ annule p, donc :

$$\Pi_p | X^2 - X = X(X-1)$$

   $X(p) = p \neq 0$
   $(X-1)(p) = p - id_E \neq 0$
   donc $\Pi_p = X^2 - X$

Commutation

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ qui commutent : $u \circ v = v \circ u$:

1. $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v
2. $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u)$ et v commutent et $Ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par v
3. Tout sous-espace propre de u est stable par v

Preuve :

1. Soit $x \in Ker(u), u(v(x)) = v(u(x)) = 0$, donc $v(x) \in Ker(u)$
   Soit $y \in Im(u), \exists x \in E/u(x) = y \Leftrightarrow v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in Im(u)$
2. Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, u^k \circ v = v \circ u^k$ et par combinaison linéaire, $P(u) \circ v = v \circ P(u)$
3. On applique 2 à $P = X\lambda$, $P(u) = u - \lambda id_E, E_\lambda = Ker(u - \lambda id_E)$

⚠Tout sous-espace stable par u ne l'est pas forcement par v. Par exemple, $E = \mathbb{R}^2$, euclidien orienté, $u = id, v = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ et $F = Vect[(0, 1)]$, u et v commutent, F est stable par u mais pas par v

Polynômes annulateurs et valeurs propres

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :
$$Ker(u - \lambda id) \subset Ker(Q(u) - Q(\lambda)id)$$
2. Si $\lambda \in Sp(u)$ et si P est annulateur de u, $P(\lambda) = 0$. Les valeurs propres figurent parmi les racines d'un polynôme annulateur
3. $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \Pi_u(\lambda) = 0$, les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal

Preuve :

1. Soit $x \in Ker(u - \lambda id), u(x) = \lambda x$, par récurrence :$\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$. On en déduit le résultat par combinaison linéaire
2. Si $\lambda \in Sp(u)$: $Ker(u - \lambda id) \neq \{0\}$. Si P annule u, $Ker(P(u) - P(\lambda)id) \neq \{0\}$, donc $P(\lambda) = 0$
3. $\lambda \in Sp(u) \Rightarrow \Pi_u(\lambda) = 0$ d'après 2
   Soit λ une racine de Π_u :
$$\Pi_u = (X - \lambda)Q$$
   Si λ n'est pas valeur propre de u, $u - \lambda id$ est injectif :
$$\forall x \in E, (\Pi_u(u)(x) = 0 = (u - \lambda id)(Q(u)(x))$$
   alors $\forall x \in E[Q(u)](x) = 0$ donc $Q(u) = 0$, absurde par définition de Π_u

⚠Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas nécessairement valeur propre :$u = id, Sp(u) = \{1\}, X^2 - X = X(X - 1)$ annule u mais $0 \notin Sp(u)$

Polynôme minimal d'une restriction

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ possédant un polynôme minimal :

1. Si F est stable par u alors : $\Pi_{u_{|F}} | \Pi_u$
2. Si $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$, on a : $\Pi_u = \bigvee_{i=1}^n \Pi_{u_{|E_i}}$ avec les E_i stables par u

Preuve :

1. Π_u annule u donc $u_{|F}$
2. On a : $\forall i \in [|1; r|], \Pi_{u_{|E_i}} | \Pi_u$

   Soit réciproquement, $x \in E, x = \sum_{i=1}^r x_i \in E_i$

$$P = \bigvee_{i=1}^r \Pi_{u_{|E_i}}, \forall i \in [|1; r|], \Pi_{u_{|E_i}}(u)(x_i) = 0$$

   donc $P(u)(x_i) = 0 \Rightarrow P(u)(x) = 0$. Ceci valant $\forall x \in E$:

$$\Pi_u | P = \bigvee_{i=1}^n \Pi_{u|E_i}$$

   Ils sont unitaires, donc

$$\Pi_u = \bigvee_{i=1}^r \Pi_{u|E_i}$$

Lemme des noyaux

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}^2[X]/A \wedge B = 1$ On a $Ker(AB(u)) = Ker(A(u)) \bigoplus Ker(B(u))$

Preuve : D'après le théorème de Bézout : $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, AU + BV = 1$
$A(u)U(u) + B(u)V(u) = id$
$\forall x \in E, (A(u) \circ U(u))(x) + (B(u) \circ V(u))(x) = x$
$x \in Ker(A(u)) \cap Ker(B(u)) \Rightarrow x = 0$, la somme est directe
$\begin{cases} x \in Ker(A(u)) \Rightarrow AB(u)(x) = B(u)(A(u)(x)) = 0 \\ x \in Ker(B(u)) \Rightarrow A(u)(B(u)(x)) = 0 \end{cases}$
donc $Ker(A(u)) \oplus Ker(B(u)) \subset Ker(AB(u))$
$x \in Ker(AB(u)) \Rightarrow AB(u)(x) = 0$
$x = x_1 + x_2 = (A(u)U(u))(x) + (B(u)V(u))(x)$
$B(u)(x_1) = A(u)(x_2) = 0$, car $A(u) \circ B(u)(x) = B(u) \circ A(u)(x) = 0$
d'où $x \in Ker(A(u)) \oplus Ker(B(u))$

Corollaire

Soit $P = P_1^{\alpha_1} ... P_k^{\alpha_k}$ avec les P_i irréductibles deux à deux distincts

1. $$Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker(P_i^{\alpha_i}(u))$$
2. Si P annule u :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker(P_i^{\alpha_i}(u))$$

Preuve :

1. Par récurrence sur k, en utilisant la fait que les irréductibles sont premiers entre-eux
2. $P(u) = 0 \Rightarrow Ker(P(u)) = E$, puis on applique le lemme des noyaux

5.2 Cas de la dimension finie

5.2.1 Éléments propres d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. λ est valeur propre de A
2. $A - \lambda I_n$ est non inversible
3. $\det(A - \lambda I_n) = 0$
4. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^*, AX = \lambda X$

On dit alors que X est vecteur propre de A associé à λ. On note $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ

Remarque

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n, u \in \mathcal{L}(E), \mathcal{B}$ base de E et $A = mat_{\mathcal{B}}(u)$. On a :

$$Sp_{\mathbb{K}}(A) = Sp(u)$$

⚠On précise toujours sur quel corps on travaille :
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A - XI_2 = \begin{pmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{pmatrix}$
$\det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$

$$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$$
$$Sp_{\mathbb{C}} = \{i; -i\}$$

Déterminons les vecteurs propres de A dans la cas complexe :

$$\begin{aligned}
AX = iX &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -y & = ix \\ x & = iy \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x - iy = 0 \\
&\Leftrightarrow x = iy / y \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = -iX \Leftrightarrow \bar{A}\bar{X} = \bar{-i}\bar{X} \Leftrightarrow A\bar{X} = i\bar{X} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrices semblables

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P \in GL_n(\mathbb{K}), A' = P^{-1}AP$
>
> 1. $Sp_{\mathbb{K}}(A) = Sp_{\mathbb{K}}(A')$
> 2. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X \Leftrightarrow A'(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X)$

Traduction matricielle de la stabilité

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim(E)_{\mathbb{K}}(E) = n, u \in \mathcal{L}(E)$
>
> 1. On suppose : $E = F \oplus G$. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de G, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ est donc une base de E
>
> $$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{F est stable par u}$$
>
> Soit p le projecteur sur G parallèlement à F. On a : $\begin{cases} A = mat_{\mathcal{B}_1}(u_{|F}) \\ C = mat_{\mathcal{B}_2}(u') \\ u' \ : \ G \ \to \ G \\ \quad\quad x \ \mapsto \ u(p(x)) \end{cases}$
>
> G est stable par u $\Leftrightarrow$ B=0
>
> 2. Soit
>
> $$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i, \forall i \in [|1;r|], \mathcal{B}_i \text{ base de } E_i, \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$$
>
> $\forall i \in [|1;r|], E_i$ est stable par u si et seulement si :
>
> $$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ base de E et $\forall i \in [|1; n|], F_i = Vect_{k \in [|1;i|]}(e_k)$

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ 0 & \diagdown & * \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|], u(e_i) \in F_i \Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|] F_i \text{ est stable par u}$$

4. $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \diagdown & 0 \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|], \exists \lambda_i \in \mathbb{K}, u(e_i) = \lambda_i e_i \Leftrightarrow \lambda_i \in Sp(u)$

5.2.2 Polynôme caractéristique

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $\begin{array}{cccc} \chi_A & : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & & \lambda & \mapsto & \det(A - \lambda I_n) \end{array}$ est une fonction polynomiale de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$, s'appelle polynôme caractéristique de A
2. $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$
3. $\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n+1} tr(A) X^{n-1} + ... + \det(A)$
4. Pour $u \in \mathcal{L}(E), \dim_{\mathbb{K}}(E) = n$, on définit : $\begin{array}{cccc} \chi_u & : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & & \lambda & \mapsto & \det(u - \lambda id_E) \end{array}$

   Si $\mathcal{B}$ base de E tel que $mat_{\mathcal{B}}(u) = A$ alors :
   $$\chi_u = \chi_A$$
5. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique

Preuve :

1

$$\chi_A = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a'_{1,\sigma(1)} ... a'_{n,\sigma(n)}$$

avec $a'_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} \text{ si } i \neq j \\ a_{i,j} - \lambda \text{ si } i = j \end{cases}$ C'est un polynôme en λ, $\deg(\chi_A) = n$, le coefficient dominant vaut $(-1)^n$

3 $a_0 = \chi_A(0) = \det(A)$
Pour obtenir le coefficient de λ^{n-1} il faut choisir σ telle que $car\{i \in [|1;n|], \sigma(i) > i\} \geq n-1, \sigma = id\}$. C'est donc $(-1)^{n+1} tr(A)$

Exemple

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \chi_A = X^2 - tr(A)X + det(A)$

Matrices triangulaires

1. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ alors
$$\chi_M = \chi_A \times \chi_C$$
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ F stable par u :
$$\chi_{u|F} | \chi_u$$
3. Si $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ alors
$$\chi_M = \prod_{i=1}^{n} (a_{1,1} - X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$$
4. Les valeurs propres d'une matrices triangulaire sont ses coefficients diagonaux
5. $\chi_{{}^tA} = \chi_A$

   1 et 3 se généralisent aux matrices triangulaires par blocs

Preuve :

1. $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda I_p & B \\ 0 & C - \lambda I_{n-p} \end{vmatrix} = \det(A - \lambda I_p)\det(C - \lambda I_{n-p}) = (\chi_A \chi_C)(\lambda)$
2. Soit G un supplémentaire de F dans E, $\mathcal{B}_1$ base de F, $\mathcal{B}_2$ base de G, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$
   $mat_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A = mat_{\mathcal{B}_1}(u_{|F})$
   donc $\chi_A \times \chi_C = \chi_M$ et $\chi_{u_{|F}} | \chi_u$
5. $\chi_{{}^tA} = \det({}^tA - \lambda I_n) = \det({}^t(A - \lambda I_n)) = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A$

Matrices semblables

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal. En revanche si deux matrices ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal, elles ne sont pas forcément semblables

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = B^2 0$, A et $B \neq 0$: $\Pi_A = \Pi_B = X^2$ et $\chi_A = \chi_B = X^4$
Mais $rg(A) = 2 \neq rg(B) = 1$, elles ne sont pas semblables

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

> Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel admet au moins une valeur propre et un vecteur propre associé. Cela s'applique par conséquent aux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Preuve : χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$
⚠C'est faux si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cf : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
et c'est faux en dimension infinie (cf exemple 3 du 5.1.1)

Application aux restrictions

> Soit E un $\mathbb{C}$ de dimension finie, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Soit λ une valeur propre de u, $F = Ker(u - \lambda id)$. Comme u et v commutent, F est stable par v. $v_{|F} \in \mathcal{L}(E)$ donc $\exists x \in F \setminus \{0\}, \exists \mu \in \mathbb{C}, v(x) = \mu x$ et $x \in F$, donc $u(x) = \lambda x$. u et v ont un vecteur propre commun

Multiplicité

> Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$. On définit $m(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant quue racine de χ_u et $n(\lambda) = \dim(Ker(u - \lambda id))$
>
> 1. $1 \leq n(\lambda) \leq m(\lambda)$
> 2. Si $m(\lambda) = 1$ alors le sous-espace propre associé à λ est une droite vectorielle

Preuve : 1. E_λ est stable par u et $u_{|E_\lambda} = \lambda id_{E_\lambda}$. Dans une base de E_λ, la matrice de $u_{|E_\lambda}$ est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n(\lambda)}(\mathbb{K}) \Rightarrow \chi_{u_{|E_\lambda}} = (X - \lambda)^{n(\lambda)} | \chi_u$
d'où $1 \leq n(\lambda) \leq m(\lambda)$

5.3 Diagonalisation

5.3.1 Définition

Définition

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :
>
> 1. u est diagonalisable
> 2. $\exists \mathcal{B}$ base de E formée de vecteurs propres de u
> 3. $\exists \mathcal{B}$ base de E tel que $mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable
> 4. $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker(u - \lambda id_E)_{\mathcal{B}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
2. A est semblable à une matrice diagonale
3. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A est diagonalisable

Exemples

1. Soit p un projecteur, le polynôme $X^2 - X$ annule p, $Sp(p) = \{0; 1\}$, d'après le lemme des noyaux :
$$E = Ker(p - id) \oplus Ker(p)$$
Un projecteur est toujours diagonalisable
2. Soit s une symétrie, le polynôme $X^2 - 1$ annule s, $Sp(s) = \{1; -1\}$. D'après le lemme des noyaux :
$$E = Ker(s - id) \oplus Ker(s + id)$$
Une symétrie est toujours diagonalisable
3. $\forall \lambda_0 \in \mathbb{K}, u = \lambda_0 id, E = Ker(u - \lambda_0 id)$, donc u est diagonalisable
4. $A = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \diagdown & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si $* = 0$ alors $A = \lambda I_n$ est diagonalisable
$\chi_A = (\lambda - X)^n \Rightarrow Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$
Si A est diagonalisable alors elle est semblable à λI_n donc $* = 0$
Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, car $\chi_A = X^2, Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable sur $\mathbb{C}$ elle serait semblable à 0_2 donc égale à 0_2, ce qui est absurde
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$
$\chi_A = X^2 + 1 = (X - i)(X + i), Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{i; -i\}$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ base de vecteurs propres
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P$$

5.3.2 Polynôme caractéristique

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$
2. $\forall \lambda \in Sp(u), n(\lambda) = m(\lambda)$
3. u est diagonalisable

Preuve :

$$\bigoplus_{\lambda\in Sp(u)} Ker(u-\lambda id) \subset E, \sum_{\lambda\in Sp(u)} n(\lambda) < n$$

Par ailleurs, $\forall\lambda \in Sp(u), 1 \leq n(\lambda) \leq m(\lambda)$, donc

$$\sum_{\lambda\in Sp(u)} \leq \sum_{\lambda\in Sp(u)} m(\lambda) \leq n = \deg(\chi_u)$$

$$\begin{aligned}
u \text{ est diagonalisable} \quad &\Leftrightarrow \quad \bigoplus_{\lambda\in Sp(u)} Ker(u-\lambda id) = E \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in Sp(u)} n(\lambda) = n \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in Sp(u)} n(\lambda) = n = \sum_{\lambda\in Sp(u)} m(\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}, \forall\lambda \in Sp(u), n(\lambda) = m(\lambda)
\end{aligned}$$

Corollaire

> $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, $^\forall\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A), m(\lambda) = n(\lambda) - rg(A - \lambda I_n)$

Exemples

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   $\chi_A = \chi_B = (X-1)^2(X-2)^3$ est scindé sur $\mathbb{R}$
   $rg(A - I_5) = rg(B - I_5) = 3$
   $rg(A - 2I_5) = 3$
   $rg(B - 2I_5) = 2 < n_A(2) = 3$ A n'est pas diagonalisable, mais B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent non nul. Si $u^r = 0$ alors X^r est annulateur de u, la seule valeur propre possible de u est 0. $Sp(u) = \{0\}$, si u était diagonalisable, on aurait u=0, absurde

Condition suffisante de diagonalisabilité

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, si χ_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1

Preuve :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i), \lambda_i$$

distincts. $\forall i \in [|1;n|], n(\lambda_i) = m(\lambda_i) = 1$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{i,i})$$

Si $\forall i \neq j, a_{i,i} \neq a_{j,j}$ alors A est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

⚠C'est une condition suffisante mais pas nécessaire !

$$\lambda I_n \text{ est diagonalisable et } Sp(\lambda I_n) = \{\lambda\}$$

Généralement la seule connaissance de χ_A ne suffit pas à savoir si A est diagonalisable ou pas

5.3.3 Polynôme annulateur

Théorème

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{L}(E) \text{ est diagonalisable} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0, P \text{ scindé à racines simples} \\ & \Leftrightarrow \quad \Pi_u \text{ est scindé à racines simples} \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} \quad & \Rightarrow \quad E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker(u - \lambda id) \\ & \Rightarrow \quad \begin{cases} \forall \lambda \in Sp(u), \Pi_{u_{|E_\lambda}} = X - \lambda \\ \Pi_u = \bigvee_{\lambda \in Sp(u)} X - \lambda = \prod_{\lambda \in Sp(u)} X - \lambda \\ \text{est scindé à racines simples} \end{cases} \\ & \Rightarrow \quad \exists P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0, (\Pi_u \text{ convient}) \\ & \Rightarrow \quad P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i) \text{ est scindé à racines simples, d'après le lemme des noyaux} \\ & \qquad E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(u - \lambda_i) \\ & \Rightarrow \quad u \text{ diagonalisable} \end{aligned}$$

Exemples

1. $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, u canoniquement associée à J_n

   $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ base de $\mathbb{K}^n$. On a vu que $u^n = id, P(X) = X^n - 1$ annule u il est scindé à racines simples :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \exp(\frac{2ik\pi}{n}))$$

donc J_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}, Sp_{\mathbb{C}}(u) \subset \mathbb{U}_n$

2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ avec $card(G) = n$. D'après le théorème de Lagrange, $\forall A \in G, A^n = I_n$, $X^n - 1$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ annule , donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$
   En revanche $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ et A n'est pas diagonalisable, le sous-groupe engendré par A est infini. Si elle l'était elle serait semblable donc égale à I_2, ce qui est faux

3. Soit $\sigma \in S_n$ et $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P_\sigma \in G$ sous-groupe des matrices de permutation, donc $P_\sigma^{n!} = I_n$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Corolaire

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et F est stable par u alors $u_{|F}$ est diagonalisable

Preuve : $\Pi_{u_{|F}} | \Pi_u$ scindé à racines simples donc $\Pi_{u_{|F}}$ aussi

5.3.4 Diagonalisation effective

Matrices compagnons

Soit

$$(a_0; ...; a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n, P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$$

On lui associe la matrice compagnon de P : $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On montre que :

$$\chi_{C_P} = P$$

On retrouve alors un résultat établi ci-avant : $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C_{X^n-1}, \chi_{J_n} = X^n - 1$, scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc J_n diagonalisable sur C semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \omega_n = \exp(\tfrac{2i\pi}{n})$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\chi_{C_P} &= \det(XI_n - C_P)\\
&= C_P = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & \diagdown & 0 & a_1 \\ 0 & \diagdown & X & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix} \text{ en développant sur la première colonne}\\
&= X\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & \diagdown & 0 & \vdots \\ 0 & \diagdown & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & \diagdown & \diagdown & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \diagdown & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}\\
&= \chi_{C_{a_1+\ldots+a_{n-1}X^{n-2}+X^{n-1}}} + (-1)^n a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & \diagdown & \diagdown & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

D'où $\chi_{C_{a_0+\ldots+a_{n-1}X^{n-2}+X^{n-1}}} = X\chi_{C_{a_1+\ldots+a_{n-1}X^{n-2}+X^{n-1}}} + a_0$
On obtient alors le résultat par récurrence en remarquant que :
$\chi_{C_{a_0+a_1X}} = \begin{vmatrix} X & a_0 \\ -1 & X+a_1 \end{vmatrix} = X(X+a_1)+a_0 = X^2+a_1X+a_0$

Matrices circulantes

Soit $(\alpha_0; ...; \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \ldots & \alpha_0 \end{pmatrix}$

$A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 J_n + \alpha_2 J_n^2 + ... + \alpha_{n-1} J_n^{n-1}$

D'après ce qui précède, A est semblable à : $\begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$

où $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_{n-1}X^{n-1}$
Ainsi :

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)$$

Notons que pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} J_n X = \omega^k X \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_n = \omega^k x_1 \\ x_1 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega^k x_n \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{C}, X = \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega^k} \\ \vdots \\ \frac{n-1}{\omega^k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \dots & \bar{\omega}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \bar{\omega}^{n-1} & \dots & (\bar{\omega}^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$

Théorème (HP)

> Soit
> $$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
> unitaire et $A = C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$
>
> On a : $\Pi_A = \chi_A = P$

Preuve : Soit u canoniquement associée à A, $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\forall i \in [|1; n-1|], u(e_i) = e_{i+1}$ et $u(e_n) = -a_0 e_1 - ... - a_{n-1} u^{n-1}(e_1)$
d'où , $P(u)(e_1) = 0$ et $\forall k \in [|1; k|]$

$$\begin{aligned} P(u)(e_k) &= P(u)(u^{k-1}(e_1)) \\ &= u^{k-1}(P(u)(e_1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

P annule u sur une base, donc il l'annule sur l'espace en entier. En outre soit

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

$Q(u) = 0 \Rightarrow Q(u)(e_1) = 0 \Rightarrow (\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1} = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre donc $Q = 0$, donc $\Pi_{C_P} = P = \chi_{C_P}$
Notons que $(e_1, u(e_1), ..., u^{n-1}(e_1))$ est une base de $\mathbb{K}^n$, u est cyclique. Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, s'il existe $x \in E / (x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de $\mathcal{B}$ de E, alors

$$mat_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&0&0&-a_0\\1&\diagdown&0&-a_1\\&&&\\0&\diagdown&0&\vdots\\0&0&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}\text{ est cyclique}$$

Matrices tridiagonales

Ce sont les matrices de la forme : $\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1&0&0&0\\\gamma_1&\ddots&\ddots&0&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\gamma_{n-2}&\alpha_{n-1}&\beta_{n-1}\\0&0&0&\gamma_{n-1}&\alpha_n\end{pmatrix}$

On peut calculer χ par récurrence en développant par rapport à la première ligne.

$$A_n=\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&\ddots&\ddots&0&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\chi_{A_n}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&0&0&0\\1&\ddots&\ddots&0&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&1&\lambda-2&1\\0&0&0&1&\lambda-2\end{vmatrix}&=(\lambda-2)\chi_{A_{n-1}}(\lambda)-\begin{vmatrix}1&1&0&0&0\\0&\lambda-2&\ddots&0&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&1&\lambda-2&1\\0&0&0&1&\lambda-2\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)\chi_{A_{n-1}}(\lambda)-\chi_{A_{n-2}}(\lambda)\end{aligned}$$

On peut calculer χ_{A_n} par récurrence linéaire, avec

$\chi_{A_1}=\lambda-2$

$\chi_{A_2}=(\lambda-2)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3$

Une méthode alternative consiste à rechercher valeurs propres et vecteurs propres simultanément.

Soit $\lambda\in\mathbb{C}, X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$

$$A_nX=\lambda X\Leftrightarrow\begin{cases}(\lambda-2)x_1+x_2=0\\x_{k-1}+(\lambda-2)x_k+x_{k+1}=0\\-x_{n-1}+(\lambda-2)x_n=0\end{cases}$$

Posons $x_0=x_{n+1}=0$ on a : $\forall k\in[|1;n|], x_{k+1}+(\lambda-2)x_k+x_{k+1}=0$

Il vient l'équation caractéristique suivante : $z^2+(\lambda-2)z+1=0$, de discriminant $\Delta=(\lambda-2)^2-4$

Supposons $\lambda\in\mathbb{R}$ et $|\lambda-2|<2, \lambda\in]0;4[$. On a $\Delta<0, X^2+(\lambda-2)X+1$ possède 2 racines complexes conjuguées, dont le produit vaut 1. Elles sont donc de la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta\in]0;\pi[, e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2cos(\theta)=2-\lambda$. Il vient : $\begin{cases}\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\\\forall k\in[|0;n+1|], x_k=\alpha e^{ik\theta}+\beta e^{-ik\theta}\end{cases}$

$\begin{cases}x_0=0\Rightarrow\beta=-\alpha\\x_k=2i\alpha sin(k\theta)=sin(k\theta)\end{cases}$ on pose $\alpha=\frac{1}{2i}$

$x_{n+1} = sin((n+1)\theta) \Leftrightarrow (n+1)\theta = p\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{p\pi}{n+1}, p \in [|1;n|]$
Réciproquement, posons pour $p \in [|1;n|]$, $\lambda_p = 2(1 - cos(\frac{p\pi}{n+1}))$
$\lambda_1 < ... < \lambda_p$, en remontant les calculs : $X_p = \begin{pmatrix} sin(\frac{p\pi}{n+1}) \\ \vdots \\ sin(\frac{np\pi}{n+1}) \end{pmatrix} A_n X_p = \lambda_p X_p$
On a n valeurs propres distinctes, ce sont les seuls, donc A_n est diagonalisable

5.3.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Énoncé

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors χ_u est annulateur de u

Démonstration

Soit $x \in E$ fixé. On veut montrer que $\chi_u(u)(x) = 0$. Notons $E_x = \{P(u)(x)/P \in \mathbb{K}[X]$ et $J_x = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(u)(x) = 0\} \subset \mathbb{K}[X]$. C'est clairement un idéal de $\mathbb{K}[X]$, car $\Pi_u \in J_x$ donc $J_x \neq \{0\}, \exists P_0 \in \mathbb{K}[X]/J_x = P_0\mathbb{K}[X]$
Soit ,

$$P_0 = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k \text{ unitaire}$$

Par division euclidienne : $\forall P \in \mathbb{K}[X], P = QP_0 + R, \deg(R) \leq m-1, P(u)(x) = R(u)(x)$
Ainsi, $E_x = Vect_{k\in[|0;n-1|]}(u^k(x))$. De plus par définition de P_0, $(u^k(x))$ est libre et

$$u^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} -\alpha_k u^k(x)$$

Alors : $mat(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \diagdown & 0 & -a_1 \\ 0 & \diagdown & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$
$P_0 = \chi_{u_{|E_x}} | \chi_u$, donc $\chi_u \in J_x$ et $\chi_u(u)(x) = 0$

Corollaire

> 1. $\Pi_u | \chi_u$ et $\deg(\Pi_u) \leq n$
> 2. $$\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)} \Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(u - \lambda_i id)^{m_i}$$

Remarque

Pour un endomorphisme cyclique : $\chi_u | \Pi_u$, pour $u = \lambda id$
1. $\Pi_u = X - \lambda$
2. $\chi_u = (X - \lambda)^n$

5.3.6 Commutation

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit le commutant :

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$$

C'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathbb{K}[u]$. On a vu que $\dim(C(u)) = n^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda id$

Commutant d'une matrice diagonalisable

Soit $Sp(u) = \{\lambda_i\}$ distinctes et

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)}$$

$\forall i \in [|1;r|], \dim(Ker(u - \lambda_i id)) = m(\lambda_i)$. Si $v \in C(u), \forall i \in [|1;r|], E_i$ est stable par v. Réciproquement, si $\forall i \in [|1;r|], E_i$ est stable par v, soit $x \in E, x = \sum_{i=1}^{r} x_i / x_i \in E_i$

$$(v \circ u)(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v(x_i)$$

$$(u \circ v)(x) = u(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v(x_i) = (v \circ u)(x)$$

Ainsi $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall i \in [|1;r|], E_i$ est stable par v $\}$. Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$, base adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$

$$v \in C(u) \Leftrightarrow mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dim(C(u)) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2}$$

Cas particulier

Si $r = n$ (n valeurs propres distinctes) :$\forall i \in [|1;n|], m_i = 1$, $\dim(C(u)) = n$. Matriciellement :
$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
$C(A) = \{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix} / A_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})\}$
Si A possède n valeurs propres distinctes : $C(A) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

Familles d'endomorphismes codiagonalisables (HP)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, (u_i) une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres communs de E formée de vecteurs propres commun à tous les (u_i), on dit qu'ils sont codiagonalisable
Preuve : $\dim(E) = 1$, rien à faire
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai lorsque $\dim(E) \leq n$. On pose $\dim(E) = n+1$
Si $\forall i \in I$, u_i est une homothétie, n'importe quelle base convient
$\exists i_0 \in I / u_{i_0}$ n'est pas une homothétie, u_{i_0} étant diagonalisable ,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u_{i_0})} Ker(u_{i_0} - \lambda id)$$

$\forall \lambda \in Sp(u_{i_0}), \dim(E_\lambda) \leq n$. Comme $\forall i \in I, u_i$ et u_{i_0} commutent E_λ est stable par u_i et $u_{i|E_\lambda}$ est diagonalisable. D'après (HR), il existe $\mathcal{B}_\lambda$ base de E_λ qui diagonalise tous les $(u_{i|E_\lambda})_{i\in I}$

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in Sp(u_{i_0})} \mathcal{B}_\lambda$$

est une base de E qui diagonalise tous les (u_i)

Exemple

Si G est un sous-groupe abélien fini de $GL_n(\mathbb{C}), \exists P_n \in GL_n(\mathbb{C}) / \forall M \in G, P_n^{-1} M P_n$ est diagonale

Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E) / \exists x_0 \in E, / \mathcal{B} = (x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ base de E. Soit $v \in C(u), \mathcal{B}$ étant une base de E :

$$\exists (\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n / v(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{i-1}(x_0) = P(u)(x_0)$$

$\forall k \in [|0; n-1|], v(u^k(x_0) = u^k(v(x_0)) = (u^k \circ P(u))(x_0) = P(u)[u^k(x_0)]$
v et $P(u)$ coïncide sur une base, donc ils sont égaux. Ainsi, $C(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$. De plus $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} \forall i \in [|0; n-1|], a_i = 0 \\ \text{car } \mathcal{B} \text{ est une base} \end{cases} \end{aligned}$$

$(id, u, ..., u^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[u], \dim(C(u)) = n$. De même la réciproque affirme que si $\dim(C(u)) = n$ alors u est cyclique

Exemple

Si u est diagonalisable avec $|Sp(u)| = n$, $Sp(u) = \{\lambda_i\}_{i\in[|1;n|]}$ distinctes. $\forall k \in [|1;n|], x_k$ vecteurs propres associés aux λ_k,

$$\begin{cases} x_0 & = x_1 + ... + x_n \\ u(x_0) & = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \\ \vdots & \\ u^{n-1} & = \lambda_1^{n-1} x_1 + ... + \lambda_n^{n-1} x_n \end{cases} \qquad (x_1, ..., x_n) \text{ est libre, c'est une base de E}$$

$\det_{(x_1,...,x_n)}(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0)) = V(\lambda_1; ...; \lambda_n) \neq 0$

$(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ est une base de E, donc u est cyclique

Notons que si $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$v \in C(u) \Leftrightarrow \exists(\mu_1; ...; \mu_n) \in \mathbb{K}^n / mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] / v = P(u)$

C'est le polynôme de Lagrange

5.4 Trigonalisation

5.4.1 Définition

Définition

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si :

$$\exists \mathcal{B} \text{ base de E}, mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$$

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}MP \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$$

Remarque

Si $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$u(e_1) = \lambda_1 e_1, \chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$

$Sp(u) = \{\lambda_i\}$. On a alors :

$$mat_{(e_n,...,e_1)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Caractérisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, les assertion suivantes sont équivalentes :

1. u est trigonalisable
2. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$
3. u admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$
4. Π_u est scindé sur $\mathbb{K}$

Preuve :

$(1) \Rightarrow (2)$: cf. remarque

$(2) \Rightarrow (3)$: d'après le théorème de Cayley-Hamilton

$(3) \Rightarrow (4)$: tout polynôme annulateur est divisible par Π_u

$(4) \Rightarrow (1)$:

$$\Pi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{s_i}$$

$\dim(E) = 1$, rien à faire
hérédité : $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose la propriété vérifiée si $\dim(E) \leq n$. On suppose $\dim(E) = n + 1$. $E_{\lambda_1} = Ker(u - \lambda_1 id)$
Si $E = E_{\lambda_1}$ alors $u = \lambda id$, toute base de E marche
Sinon, soit G un supplémentaire de E_{λ_1} dans E :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus G$$

Soit p le projecteur sur G parallèlement à E_{λ_1}, $\begin{array}{rccc} u_1 & : & G & \to & G \\ & & x & \mapsto & p(u(x)) \end{array}$
Soit $\mathcal{B}_1$ base de E_{λ_1} et $\mathcal{B}_2$ une base de G, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & B \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \\ & 0 & & C \end{pmatrix}, C = mat_{\mathcal{B}_2}(u_1)$$

On a $\Pi_u(A) = 0 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \Pi_u(C) \end{pmatrix}$, donc Π_{u_1} est scindé sur $\mathbb{K}, \Pi_{u_1} | \Pi_u$, d'après (HR), $\exists \mathcal{B}'_2$ base de G tel que :

$$mat_{\mathcal{B}'_2}(u_1) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}'_2$ est une base de E

$$mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$$

Remarque

Cette démonstration procure un procédé pour un algorithme de triangulation effective

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 3 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & -4 & \lambda+4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & -4 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & -4 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 2 \\ -2 & -2 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4) \\
&= (\lambda+2)^3
\end{aligned}$$

χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, donc M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$, si M était diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors elle serait semblable donc égale à $2I_3$, absurde. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
(M+2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x-3y+2z=0 \\ x+3y-2z=0 \\ 2x+4y-2z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=z \\ x=-z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution est : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \varepsilon_1$. On pose $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ Il vient : $u(e_1) = -2\varepsilon_1 - e_1 - e_2$ et $u(e_2) = -4\varepsilon_1 + e_1 - 3e_2$

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

On pose : $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\chi_C = (X+2)^2$

$$(C+2I_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\-x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-y/y\in\mathbb{R}$$

On pose : $\varepsilon_2=e_1-e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\varepsilon_3=e_1$

$$mat_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}(u)=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Corolaire

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire

$$\chi_M=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)$$

$$\forall k\in\mathbb{N}, tr(M^k)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^k$$

Preuve : $\exists P\in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}MP=\begin{pmatrix}\lambda_1&*&*\\0&\ddots&*\\0&0&\lambda_r\end{pmatrix}$

$P^{-1}M^kP=(P^{-1}MP)^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&*&*\\0&\ddots&*\\0&0&\lambda_r^k\end{pmatrix}$

Remarque

Si $\forall i\geq, |\lambda_1|>|\lambda_i|$, une seule valeur propre de multiplicité 1 de modula maximal :

$$|tr(M^k)|=|\lambda_1|^k|1+\sum_{i=2}^{r}(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k|\sim|\lambda_1|^k$$

$$\lambda_1=\lim_{n\to+\infty}\tfrac{tr(M^k)}{tr(M^k)}$$

Matrices nilpotentes

Si u est nilpotent alors il est trigonalisable, $\exists\mathcal{B}$ base de E telle que :

$$mat_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&*&*\\0&\diagdown&*\\0&0&0\end{pmatrix}$$

En effet, $\exists r \in \mathbb{N}^*/X^r$ annule u, ce polynôme est scindé, donc u est trigonalisable (diagonalisable sur $\mathcal{C}$, car scindé à racines simples su r$\mathbb{C}$), et $Sp_{\mathbb{C}} = \{0\}$
Réciproquement si $Sp_{\mathbb{C}} = \{0\}$ alors $\chi_u = X^n$, il annule u d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc u est nilpotent

5.4.2 Applications

Matrices de $SL_2(\mathbb{R})$

Soit $M \in SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/\det(M) = 1\}$

$\chi_M(X) = X^2 - tr(M)X + 1$

$\Delta = tr(M)^2 - 4$

1. $|tr(M)| < 2, \chi_M$ possède deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\bar(\lambda), \lambda\bar{\lambda}, \lambda\bar{\lambda} = |\lambda| = 1, \exists\theta \in]0;\pi[, \lambda = e^{i\theta}$

   $tr(M) = 2\cos(\theta)$

   $\theta = \arccos(\frac{tr(M)}{2})$

   $\chi_M = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$, scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, semblable à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. C'est la cas en particulier pour $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. $\det(R_\theta) = 1$ et $tr(R_\theta) = 2\cos(\theta)$. R_θ et M sont réelles semblables sur $\mathbb{C}$, donc elles sont semblables sur $\mathbb{R}$,

   $$\exists P \in GL_2(\mathbb{R}), M = P \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$$

   $$^\forall n \in \mathbb{Z}, M^n = P \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$$

   Notons que la suite (M^n) est bornée, car les 4 suites de coefficients de M le sont bornées

2. $|tr(M)| > 2, \chi_M$ possède deux racines réelles distinctes inverses l'une de l'autre, λ et $\frac{1}{\lambda}, |\lambda| < 1$ et $tr(M) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$

   $$\exists P \in GL_2(\mathbb{R}), M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$$

   $$\forall n \in \mathbb{Z}, M^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

   La suite (M^n) n'est pas bornée

3. $tr(M) = 2$, quitte à remplacer M par -M. $\chi_M = (X-1)^2$, soit $M = I_2$, et elle est déjà diagonale. Soit $M \neq I_2$, M n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable sur $\mathbb{R}$, donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $\exists P \in GL_2(\mathbb{R}), \exists\alpha \in \mathbb{R}, M = P \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

   Or $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable sur $\mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $\exists Q \in GL_2(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{Z}, M^n = Q(I_2 + N)^n Q^{-1}$
   $M^n = P \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Réduction des matrices de faible rang

Lemme $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), rg(M) = 1 \Leftrightarrow \exists (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$ non nul, $M = X^tY$
Preuve : Si $M = X^tY$, $\exists (i_0, j_0) \in [|1; n|]^2, x_{i_0}, y_{j_0} \neq 0$, donc $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$, en notant $(C_1; ...; C_n)$ les colonnes de M,

$$\forall j \in [|1; n|], C_j = y_j X = \frac{y_j}{y_{j_0}} c_{j_0}$$

donc $rg(M) = 1$

$rg(M) = 1, j_0 \in [|1; n|]/C_{j_0} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall j \neq j_0, \exists \lambda_j \in \mathbb{K}/C_j = \lambda_j C_{j_0}$, posons $X = C_{j_0}$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^*$

On a $M = X^tY$

Remarque $M = X'^tY', \exists \lambda \in \mathbb{K}^* / \begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \frac{1}{\lambda} Y \end{cases}$
Soit, donc $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), rg(M) = 1, (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2, M = X^tY$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à M. Soit $(\varepsilon_1; ...; \varepsilon_n)$ une base de $Ker(u)$ qu'on complète en base $\mathbb{B}$ de $\mathbb{K}^n$

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \dots & 0 & tr(u) \end{pmatrix}$$

$$\chi_u = \chi_M = X^{n-1}(X - tr(u))$$

$$tr(M) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tYX \neq 0$$

$\begin{cases} m(0) = n(0) = n - 1 \\ m(tr(M)) = n(tr(M)) = 1 \end{cases}$

M est diagonalisable

$tr(M) = 0 \Rightarrow \chi_M = X^n$
$m(0) = n > n(0) = n - 1$, M n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable sur $\mathbb{K}$ et nilpotente :

$$M^2 = X^tYX^tY = 0$$

Exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, car(\mathbb{K}) = 0$
$tr(M) = n \neq 0$

$$Ker(u) = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$$

$Ker(u-nid) = Vect(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

En posant $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1\\ \vdots & & -1 & 1 & 1\\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

On a donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & 0\\ 0 & \dots & 0 & n\end{pmatrix}$

Notons que $M^2 = nM$ et $M = \frac{1}{n}M$ est la matrice du projecteur sur $Vect[\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}//H$

Soit $(\alpha_1;...;\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul, $M = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & \alpha_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & & 0 & \alpha_n\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & 0\end{pmatrix}$. Soit u canoniquement associé à M,

$rg(M) = rg(u) = 2$
On sait que $m(0) \geq n(0) = n-1$

$$\chi_u(X) = X^{n-1}(X-\lambda)(X-\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$\text{M est semblable sur } \mathcal{C} \text{ à } \begin{pmatrix}0 & * & * & * & *\\ 0 & \diagdown & * & * & *\\ 0 & \diagdown & 0 & * & *\\ 0 & & \diagdown & \lambda & *\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$$

$tr(M) = \lambda + \mu$ et $tr(M^2) = \lambda^2 + \mu^2$. Or le coefficient (k,k) de M^2 vaut $k \in [|1;n|], \alpha_k^2$

$$k = n+1, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \Rightarrow tr(M^2) = 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

$tr(M) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\mu$
$tr(M^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 2\lambda^2$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors

$$\lambda^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 > 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0, \lambda = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$$

$\begin{cases} m(0) = n(0) = n-1\\ m(\lambda) = n(\lambda) = 1\\ m(\mu) = n(\mu) = 1\end{cases}$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, semblable à $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \diagdown & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors M est diagonalisable si et seulement si $\lambda \neq 0$

Suites récurrentes linéaires

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2, S=\{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=\alpha u_{n+1}+\beta u_n\}$, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim(S)=2$, car : $\begin{array}{cccc}\varphi & : & S & \to & \mathbb{K}^2\\ & & (u_n) & \mapsto & (u_0,u_1)\end{array}$ est un isomorphisme

Formons pour $(u_n)\in S, X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}$ Il vient :

$$\forall n\in\mathbb{N}, X_{n+1}=\begin{pmatrix}0&1\\\beta&\alpha\end{pmatrix}X_n=AX_n$$

Par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}, X_n=A^nX_0$
$\chi_A=X^2-\alpha X-\beta$
Dans $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: $\Delta=\alpha^2+4\beta\neq 0$, A est diagonalisable : $\exists z_1\neq z_2\in\mathbb{C}^2/\chi_A=(X-z_1)(X-z_2)$
$\exists P\in GL_2(\mathbb{C}), A=P\begin{pmatrix}z_1&0\\0&z_2\end{pmatrix}P^{-1}$ d'où, $X_n=P\begin{pmatrix}z_1^n&0\\0&z_2^n\end{pmatrix}P^{-1}X_0$

$$\boxed{\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2/\forall n\in\mathbb{N}, u_n=az_1^n+bz_2^n}$$

$\Delta=0, \exists z_0\in\mathbb{C}/\chi_A=(X-z_0)^2$. Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à z_0I_2, non !Mais A est trigonalisable :

$$\exists P\in GL_2(\mathbb{C})/A=P\begin{pmatrix}z_0&1\\0&z_0\end{pmatrix}P^{-1}$$

d'où, $A^n=P\begin{pmatrix}z_0^n&nz_0^{n-1}\\0&z_0^n\end{pmatrix}P^{-1}$
En développant,

$$\boxed{\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2/\forall n\in\mathbb{N}, u_n=az_0^n+bnz_0^{n-1}}$$

5.4.3 Décomposition de Dunford

Théorème

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*, u\in\mathcal{L}(E)$ et

$$\chi_u=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}, m_i\geq 1$$

avec les λ_i distincts. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux :

$$E=Ker(\chi_u(u))=\bigoplus_{i=1}^{r}Ker(u-\lambda_i id)^{m_i}=\bigoplus_{i=1}^{r}F_i$$

avec F_i sous-espace caractéristique associé à λ_i. On a : $Sp(u_{|F_i})=\{\lambda_i\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de F_i qui trigonalise $u_{|F_i}$ et $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{r}\mathcal{B}_i$

$$A = mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & & & & \\ 0 & \ddots & * & & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & * & * \\ & 0 & & & 0 & \ddots & * \\ & & & & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \text{diagonale par bloc}$$

u peut s'écrire : $u = \delta + n$ avec δ diagonalisable et n nilpotent

Preuve : Notons $l_i = \dim(F_i)$, comme $F_i = Ker(u - \lambda_i id)^{m_i}$, $(X - \lambda_i)^{m_i}$ annule $u_{|F_i}$ donc $Sp(u_{|F_i}) = \{\lambda_i\}$. Ainsi $\chi_{u_{|F_i}} = (X - \lambda_i)^{m_i}$, en réduisant par blocs dans une base adaptée :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \text{ et } \chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_{u_{|F_i}}, \forall i \in [|1;r|], l_i = m_i$$

En outre : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * & * & & & & \\ 0 & \diagdown & * & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & * & * \\ & 0 & & & 0 & \diagdown & * \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$

En formant δ et $n \in \mathcal{L}(E)$ qui ont pour matrice D et N dans $\mathcal{B}, u = \delta + n$, où δ est diagonalisable et n nilpotent. De plus , en raisonnant par blocs :

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

$$DN = ND = \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r N_r \end{pmatrix}$$

Unicité de la décomposition (HP)

Avec les mêmes notations et hypothèses. Soit $n \in \mathbb{C}[u]$ et si $u = \delta' + n'$ avec δ' diagonalisable et n nilpotent et $\delta' n' = n' \delta'$ alors $\delta = \delta'$ et $n = n'$

Preuve : Notons pour $1 \leq i \leq r, \Pi_i$ le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j=1;j\neq i}^{r} F_j$. On a :

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Pi_i$$

car $mat_{\mathcal{B}}(\Pi_i) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & I_n & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$$n = u - \delta = u - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Pi_i$$

Comme $(X - \lambda_i)^{m_i} \wedge \prod_{j=1, j\neq i}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j} = 1 = (X - \lambda_i)^{m_i} \wedge C_i$
D'après le théorème de Bézout :
$\exists (A_i, B_i) \in \mathbb{C}[X]^2 / A_i(X - \lambda_i)^{m_i} + B_i C_i = 1$

$$\forall x \in E, x = (A_i(X - \lambda_i)^{m_i}))(u)(x) + (B_i C_i)(u)(x)$$

Or $(X - \lambda_i)^{m_i} C_i = \chi_u$, donc : $(X - \lambda_i)^{m_i})(u)[B_i C_i(u)(x)] = \chi_u[B_i(u)(x)] = 0$
Ainsi $(B_i C_i)(u)(x) \in F_i$.
De plus d'après le lemme des noyaux,

$$\bigoplus_{j=1, j\neq i}^{r} F_j = Ker(C_i(u))$$

et $C_i(u)[A_i(X - \lambda_i)^{m_i}(u)(x)] = \chi_u(u)[A_i(u)(x)] = 0$ donc

$$[A_i(X - \lambda_i)^{m_i}(u)(x)] \in \bigoplus_{j=1, j\neq i}^{r} F_j$$

Ainsi $\Pi_i(x) = (B_i C_i)(u)(x)$
$\forall x \in E, \Pi_i(x) = (B_i C_i) \in \mathbb{C}[X]$
En reportant : $(\delta, n) \in \mathbb{C}[u]^2$, si à présent $u = \delta' + n' = \delta + n$
δ' commute avec n' donc avec $\delta' + n = u$ donc avec $\delta \in \mathbb{C}[u]$. De même n' commute avec $n \in \mathbb{C}[u]$.
Il vient :

$$\delta' - \delta = n - n'$$

δ et δ' sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, ils sont co-diagonalisables et $\delta - \delta'$ est diagonalisable. n et n' sont deux endomorphismes nilpotent qui commutent, soit $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2 / n^{p_1} = n'^{p_2} = 0$

$$(n - n')^{p_1+p_2} = \sum_{k=0}^{p_1+p_2} \binom{p_1 + p_2}{k} n^k (-n')^{p_1+p_2-k} = 0$$

$n - n' = \delta - \delta'$ est diagonalisable et nilpotent, c'est 0, d'où : $\begin{cases} n = n' \\ \delta = \delta' \end{cases}$

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable donc } \begin{cases} D = M \\ N = 0_3 \end{cases}$$

5.4.4 Réduction de Jordan (HP)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, si

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

On a vu que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(u - \lambda_i id)^{m_i}$$

Dans une base adaptée $\mathcal{B}$:

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & & & & \\ 0 & \ddots & * & & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & * & * \\ & 0 & & & 0 & \ddots & * \\ & & & & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

On peut l'écrire : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * & * & & & & \\ 0 & \diagdown & * & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & * & * \\ & 0 & & & 0 & \diagdown & * \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche une forme matricielle simple et unique par un endomorphisme nilpotent. Soit donc E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$

1. Soit $x_0 \in E / f^{p-1}(x_0) \neq 0$, on montre que $(x_0, ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre. On complète en une base :
$$\mathcal{B}_1 = (f^{p-1}(x_0); ...; x_0; \varepsilon_{p+1}; ...; \varepsilon_n) = (\varepsilon_1; ...; \varepsilon_n)$$
Soit $U = mat_{\mathcal{B}_1}(f)$
$P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \forall k \in [|1; n|]$ la k-ième ligne de P est la première ligne de U^{k-1}. Soit $h \in \mathcal{L}(E) / mat_{\mathcal{B}_1}(h) = P$
2. On montre que $Vect = [f^{p-1}(x_0); ...; x_0] \oplus Ker(h) = E$
3. On montre que $\forall x \in E, x \in Ker(h)$ si et seulement si $\forall k \in [|1; n|]$, la première coordonnée de $f^{k-1}(x)$ dans $\mathcal{B}_1$ est nulle. En on déduit que $Ker(h)$ est stable par f

Preuve :

1. Soit

$$(\alpha_0;...;\alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p, \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0 \Rightarrow f^{p-1}(\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x_0)) = 0$$

Soit $\alpha_0 f^{p-1}(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$
De proche en proche, on applique $f^{p-2}, f^{p-3}, ...$ et on montre que : $\forall k \in [|0;p-1|], \alpha_k = 0$.
La famille est libre

2. $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$

$U^p = 0$, car $f^r = 0$, d'où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \diagdown & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$ $rg(P) = p$
D'après le théorème du rang : $\dim(Ker(h)) = n - p$
$x \in Vect[f^{p-1}(x_0);...;x_0] \cap Ker(h)$
$X = Coord_{\mathcal{B}_1}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$PX = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \diagdown & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

d'où, $\begin{cases} Vect[f^{p-1}(x_0);...;x_0] \cap Ker(h) = \{0\} \\ \dim(Ker(h)) + \dim(Vect...) = n \end{cases}$
$E = Vect[f^{p-1}(x_0);...;x_0] \oplus Ker(h)$

3. Soit $x \in E, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Coord_{\mathcal{B}_1}(x)$

$$\begin{array}{rcl} x \in Ker(h) & \Leftrightarrow & h(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & PX = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall k \in [|1;n|], \text{ le produit de la k-ième ligne de} P \text{ par le produit ligne de } U^{p-1} \\ & \Leftrightarrow & \forall k \in [|1;n|], \mathcal{L}_1(U^{k-1})X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall k \in [|1;n|], \mathcal{L}_1(U^{k-1}X) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall k \in [|1;n|], \text{ la première coordonnée de } f^{k-1}(x) \text{ dans } \mathcal{B}_1 \text{ est nulle} \end{array}$$

$x \in Ker(h), \forall k \in [|1;n|]$ la coordonnée de $f^k(x)$ dans $\mathcal{B}$ est nulle, donc $f(x) \in Ker(h)$. Ainsi dans une base adaptée :

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & & U' \end{pmatrix}$$

$f^p = 0 \Rightarrow U'^p = 0$

Soit $u' = u_{|Ker(h)}$, u' est nilpotent d'indice $p' \leq p$, car $u'^p = 0$. Par récurrence sur la dimension de E, il existe une base de $\mathcal{B}'$ de E $/J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{n_r} \end{pmatrix}$$

Notons, si dans cette réduction n_i blocs J_i apparaissent :

$$\begin{cases} n = \dim(E) = m_1 + 2m_2 + ... + pm_p \\ \dim(Ker(f)) = m_1 + m_2 + ... + m_p \\ \dim(Ker(f^2)) = m_1 + 2m_2 + ... + 2m_p \\ \vdots \\ \dim(Ker(f^k)) = m_1 + 2m_2 + ... + km_k + ... + km_p \\ \dim(Ker(f^p)) = m_1 + 2m_2 + ... + pm_p \end{cases}$$

$\forall k \in [|1;p-1|], \dim(Ker(f^p)) - \dim(Ker(f^{p-1})) = m_k + ... + m_p$

$$\begin{array}{rcl} m_k & = & \dim(Ker(f^k)) - \dim(Ker(f^{k-1})) - \dim(Ker(f^{k+1})) + \dim(Ker(f^k)) \\ & = & 2\dim(Ker(f^k)) - \dim(Ker(f^{k-1}) - \dim(Ker(f^{k+1})) \end{array}$$

ne dépend que de f. La réduction est bien unique

Conséquences : une matrice et sa transposée son semblable dans $\mathbb{C}$, donc dans $\mathbb{R}$ (cf Dunford). De plus la dimension du commutant est supérieur ou égale à n

5.4.5 Produit Tensoriel (HP)

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,p}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1}B & \dots & a_{p,p}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

C'est la matrice dans une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & & M & \mapsto & AMB \end{array}$

Si A est diagonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alors par produits par blocs ,

$$(P^{-1} \otimes I_p)(A \otimes B)(P \otimes I_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 B & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n B \end{pmatrix}$$

On a : $(P^{-1} \otimes I_p) = (P \otimes I_p)^{-1}$

$$A \otimes B \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} \lambda_1 B & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n B \end{pmatrix}$$

Si B est diagonalisable : $\exists Q \in GL_p(\mathbb{K}), \exists(\mu_1; ...; \mu_p) \in \mathbb{K}^p$

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_p \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} (I_n \otimes Q^{-1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 B & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n B \end{pmatrix} (I_n \otimes Q) &= \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 B & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \mu_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $A \otimes B$ est diagonalisable et $Sp_{\mathbb{K}}(A \otimes B) = \{\lambda\mu / \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A), \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(B)\}$
Réciproquement, si A est diagonalisable non nul, si $A \otimes B$ est diagonalisable, $\exists i \in [|1; n|], \lambda_i \neq 0$, $\lambda_i B$ est diagonalisable, donc B l'est, par stabilité des sous-espaces d'un endomorphisme diagonalisable. Notons que :

$$\boxed{tr(A \otimes B) = tr(A) \times tr(B)}$$

Exemple

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0 & 0 & A\\ 0 & A & 0\\ A & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\otimes A = B\otimes A$$

$\chi_B = \begin{vmatrix}X & 0 & -1\\ 0 & X-1 & 0\\ -1 & 0 & X\end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1) \Rightarrow Sp(B)=\{-1;1\}$

$Be_2 = e_2$, $B(e_1+e_3)=e_1+e_3$ et $B(e_1-e_3)=e_3-e_1$

$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

M est semblable à $\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & -A\end{pmatrix}$

$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2$, A non diagonalisable. Par suite M ne l'est pas. A est semblable à $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ donc M est semblable à $\begin{pmatrix}\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix} & 0 & 0\\ 0 & \begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix} & 0\\ 0 & 0 & \begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\end{pmatrix}$. On raisonne matriciellement pour déterminer le commutant

Chapitre 6

Espaces vectoriels normés

Sommaire

6.1 Définitions

6.1.1 Normes

Définition

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit l'application : $\begin{array}{cccc} ||.|| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & ||x|| \end{array}$ est une norme si et seulement elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

1. axiome de séparation : $\forall x \in E, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. axiome d'homogénéité : $\forall x \in E, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

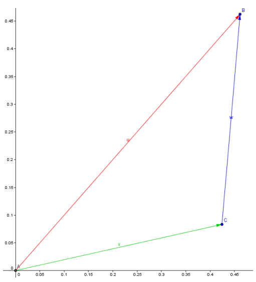


FIGURE 6.1 – Inégalité triangulaire

Remarque

Dans ce cas, $||.||$ vérifie la deuxième inégalité triangulaire :

$\forall (x, y) \in E^2, | \ ||x|| - ||y|| \ | \leq ||x - y||$

Preuve : $||x|| \leq ||x - y|| + ||y|| \Leftrightarrow ||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$
En échangeant x et y : $||y|| \leq ||y - x|| + ||x||$
Soit $||y|| - ||x|| \leq ||y - x|| = ||x - y|| \Rightarrow | \ ||x|| - ||y|| \ | \leq ||x - y||$

Normes sur $\mathbb{K}^n$

Sur $\mathbb{K}^n$, on définit : $\forall x = (x_1; ...; x_n) \in \mathbb{K}^n$,

1.
$$||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

2.
$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

3.
$$||x||_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Preuve :

1. Ces 3 applications sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $||(0; ...; 0)||_i = 0$
2. $||(x_1; ...; x_n)|| = 0 \Rightarrow \forall k \in [|1; n|], x_k = 0$
3. L'homogénéité est évidente pour les normes 1 et 2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}, (x_1; ...; x_n) \in \mathbb{K}^n$
$\forall k \in [|1; n|], |\lambda x_k| = \lambda| \cdot |x_k| \leq |\lambda| \cdot ||(x_1; ...; x_n||_\infty \Rightarrow ||\lambda(x_1; ...; x_n)||_\infty \leq |\lambda| \cdot ||(x_1; ...; x_n)||_\infty$
Pour $\lambda = 0$, égalité, $\lambda \neq 0$, on applique ce qui précède à $\lambda(x_1; ...; x_n)$ et $\frac{1}{\lambda}$, il vient :
$$||(x_1; ...; x_n)||_\infty \leq \tfrac{1}{|\lambda|} ||\lambda(x_1; ...; x_n)||_\infty$$
$$|\lambda| \cdot ||(x_1; ...; x_n)||_\infty \leq ||\lambda(x_1; ...; x_n)||_\infty$$
4. $\forall (x = (x_1; ...; x_n), y = (y_1; ...; y_n)) \in (\mathbb{K}^n)^2$:
$$||x + y||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = ||x||_1 + ||y||_1$$
$\forall k \in [|1; n|], |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq ||x_k||_\infty + ||y_k||_\infty$
Pour $||.||_2$, l'inégalité triangulaire sera vérifiée à la fin du chapitre (cf l'inégalité de Minkowski)

Remarque

Pour $n = 1$, $||.||_1 = ||.||_2 = ||.||_\infty = |.|$
$p \in [1; +\infty[$, on définit ,
$$||(x_1; ...; x_n)||_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

C'est une norme et on vérifie :
$$||x||_p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} ||x||_\infty$$

Normes d'espaces de fonctions

Si $E = \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, on définit : $\forall f \in E$

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt, \text{ norme de la convergence en moyenne}$$

$$||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \text{ norme de la convergence en moyenne quadratique}$$

$$||f||_\infty = \sup_{t\in[a;b]} |f(t)| = max_{t\in[a;b]}|f(t)|$$

Norme de la convergence uniforme

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, X un ensemble,

$$\mathcal{B}(X,E) = \{f : X \to E \text{ bornée sur X}, \exists M \geq 0, \forall x \in X, ||f(x)|| \leq M\}$$

C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on définit $\forall f \in \mathcal{B}(X,E)$:

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} ||f(x)|| < +\infty$$

C'est une norme appelée norme de la convergence uniforme sur X.

En effet :

1. $\forall f \in \mathcal{B}(X,E), ||f||_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in X, ||f(x)|| = 0 \Rightarrow f = 0$
2. $\forall (\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathcal{B}(X,E), \forall x \in X, ||\lambda f(x)|| = |\lambda| \cdot ||f(x)|| \leq |\lambda| \cdot ||f||_\infty$
   donc, $||\lambda f(x)||_\infty \leq |\lambda| \cdot ||f||_\infty$
   On a égalité si $\lambda = 0$, si $\lambda \neq 0$, on applique ce qui précède :
   $$||f||_\infty = ||\tfrac{1}{\lambda}\lambda f||_\infty \leq \tfrac{1}{|\lambda|}||\lambda f||_\infty$$
   $$|\lambda| \cdot ||f||_\infty \leq ||\lambda f||_\infty$$
   $$|\lambda| \cdot ||f||_\infty = ||\lambda f||_\infty$$
3. Enfin, $\forall (f,g) \in \mathcal{B}(X,E)^2, \forall x \in X$:
   $$||(f+g)(x)|| \leq ||f(x)|| + ||g(x)|| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$
   $$||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Exemples

Si $X = \mathbb{N}, E = \mathbb{K}$, on définit sur l'espace :

$$l_\infty(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ bornées }\}$$

$$||(u_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Algèbre normée

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $||.||$ une norme sur $\mathcal{A}$. On dit que $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre normée si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2$,

$$||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Exemple

$(\mathbb{K}, ||.||)$ ou $(\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$

Norme-produit

Soit $(E_1, ||.||_1); ...; (E_p, ||.||_p)$, p $\mathbb{K}$-evn. On définit sur $E_1 \times ... \times E_p$, la norme dite norme-produit,

$$\forall (x_1; ...; x_p) \in E_1 \times ... \times E_p, ||(x_1; ...; x_p)|| = \max_{1 \leq i \leq p} ||x_i||_i$$

6.1.2 Distances

Définition

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn :

1. $(x, y) \in E^2$, on définit $d(x, y) = ||x - y||$
   - i $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0$
   - ii $\forall (x, y) \in E^2, d(y, x) = d(x, y)$
   - iii $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

   Généralement si un ensemble E est muni d'une application, $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ vérifiant ces trois propriétés, on dit que (E, d) est un espace métrique
2. Pour $x \in E$ et $\mathcal{A} \subset E, \mathcal{A} \neq \emptyset$, on définit :
$$d(x, \mathcal{A}) = \inf_{a \in \mathcal{A}} \{||x - a||\}$$
3. Pour $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ parties non vide de E, on définit :
$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} \{||a - b||\}$$
4. On dit que $\mathcal{A} \subset E$ est bornée si set seulement si $\exists M \geq 0 / \forall a \in \mathcal{A}, ||a|| \leq M$. Dans ce cas on définit le diamètre de $\mathcal{A}$,
$$\delta(\mathcal{A}) = \sup_{(a,a') \in \mathcal{A}^2} \{||a - a'||\}$$

Remarques

Par définition, $\forall \varepsilon >, \exists a_\varepsilon \in \mathcal{A}/$

$$d(x,\mathcal{A}) \leq ||x-a_\varepsilon|| \leq d(x,\mathcal{A})+\varepsilon$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n) \in \mathcal{A}/$

$$d(x,\mathcal{A}) \leq ||x-a_n|| \leq d(x,\mathcal{A})+\frac{1}{n+1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} ||x-a_n|| = d(x,\mathcal{A})$$

⚠La suite (a_n) ne converge pas forcement ! Par exemple en prenant $E=\mathbb{R}, \mathcal{A}$ et $x=0$
⚠$d(x,\mathcal{A})$ n'est pas forcement atteinte ! Avec $\mathcal{A}=\mathbb{R}_+^*$ et $x=0$

$$d(0,\mathbb{R}_+^* = \inf_{x>0}\{|x|\}$$

Mais $0 \notin \mathbb{R}_+^*$, on peut avoir $d(x,\mathcal{A})=0$ et $x \notin \mathcal{A}$

6.1.3 Boules et sphères

Définition

Soit $(E,||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn, $a \in \mathcal{A}$

1. Pour $r \geq 0$, on définit :

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in E/||x-a|| \leq r\}$$

La boule fermée de centre a, de rayon r

$$S(a,r) = \{x \in E/||x-a|| = r\}$$

La sphère de centre a et de rayon r

2. Pour $r > 0$, on définit :

$$B(a,r) = \{x \in E/||x-a|| < r\}$$

La boule ouverte de centre a et rayon r. Notons que $\{0\} = \overline{B(a,0)} = S(a,0)$

Remarque

On passe de $B(a,r)$ à $B(a',r')$ par la translation de vecteur $a'-a$ puis l'homothétie de rapport $\frac{r'}{r}$

Exemples

Pour $E=\mathbb{R}^2$,

$S_1(0,1) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/|x|+|y|=1\}$

$S_2(0,1) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$

$B_\infty = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/max(|x|,|y|) \leq 1\} = [-1;1]^2$

6.1.4 Suite dans un espace vectoriel normé

Définition

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn, $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$, on dit que (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\lim_{n \to +\infty} ||u_n - l|| = 0$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow ||u_n - l|| \leq \varepsilon, u_n \in \overline{B(l, \varepsilon)}$
$\forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} / u_n \notin \overline{B(l, \varepsilon)}\}$ est fini

Propriétés élémentaires

1. Unicité de la limite : si au sens de norme $||.||$, (u_n) converge vers l et l' alors $l = l'$. On note alors :
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$
2. Si (u_n) converge alors elle est bornée (la réciproque est fausse , cf $(-1)^n$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} ||u_n|| = ||l||$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$ alors
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lim_{n \to +\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda l + l', \text{ linéarité de la limite}$$
Si de plus $(E, ||.||)$ est une algèbre normée ,
$$\lim_{n \to +\infty} u_n v_n = l \cdot l'$$
5. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \neq 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, ||u_n|| \geq \frac{||l||}{2} > 0$
6. Soit $(E_1, ||.||_1); ...; (E_p, ||.||_p)$ p $\mathbb{K}$-evn. Dans $(E_1 \times ... \times E_p, ||.||_\infty)$. Soit (u_n),
$$(u_n) = (u_n^{(1)}; ...; u_n^{(p)}) \in E^{\mathbb{N}}$$
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = (l_1; ...; l_p) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [|1; p|] \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{(i)} = l_i \end{cases}$

Preuve : se référer au chapitre 2
⚠La notion de convergence dépend de la norme !Par exemple, soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n \end{array}$

$$||f_n||_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$||f_n||_\infty = 1$, donc (f_n) converge au sens de norme 1 mais pas de norme infini

Suites extraites

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on dit que $(u_{\sigma(n)})$ est extraite de (u_n). Soit $\lambda \in E$, on dit que λ est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = l$$

Propriétés

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \forall \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = l$
2. Si (u_n) possède deux valeurs d'adhérence distinctes, elle diverge
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
4. λ est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n / ||u_p - \lambda|| < \varepsilon$ ce qui équivaut à dire que $\{p \in \mathbb{N}/u_p \in \{\overline{B(\lambda, \varepsilon)}\}$ est infini

Comparaison

Soit $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on dit que

$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \exists M \geq 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow ||u_n|| \leq M||v_n||$

$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow ||u_n|| \leq \varepsilon||v_n||$

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow ||u_n - v_n|| \leq \varepsilon||v_n||$

6.1.5 Comparaison des normes

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-evn muni de deux normes $||.||$ et $||.||'$

1. On dit que $||.||'$ est dominée par $||.||$ si et seulement si :

$$\exists \alpha > 0 / \forall x \in E, ||x||' \leq \alpha||x||$$

2. On dit que $||.||$ et $||.||'$ sont équivalentes, si et seulement si elles se dominent l'une l'autre : $\begin{cases} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, & \beta||x|| \leq ||x||' \leq \alpha||x|| \\ & \frac{1}{\alpha}||x|| \leq ||x|| \leq \frac{1}{\beta}||x||' \end{cases}$
   C'est une relation d'équivalence

Exemples

1. Sur $\mathbb{K}^n, ||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ sont équivalentes

2. Dans $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, on a :

$$\forall f \in E, ||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b 1^2 dt} = ||f||_2 \leq ||f||_\infty$$

Propriétés

1. Si $||.||'$ est dominée par $||.||$:
   - $\rightarrow$ toute suite bornée pour $||.||$ l'est pour $||.||'$
   - $\rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ pour $||.|| \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$ pour $||.||'$
2. Si $||.||$ et $||.||'$ sont équivalentes :
   - $\rightarrow$ une suite est bornée pour $||.||$ si et seulement si elle l'est pour $||.||'$
   - $\rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ pour $||.||$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ pour $||.||'$

Preuve : application directe de la définition

Remarque

Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on applique le 2 :
Exemple : Pour $E = \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, on a vu que $||.||_1 \leq ||.||_2 \leq ||.||_\infty$. Soit $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$

$$||f_n||_\infty = 1$$

$$||f_n||_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

$$||f_n||_2 = \sqrt{\int_0^1 t^{2n} dt} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

Si on prend $\sqrt{2n+1}f_n$ alors cette suite est bornée pour $||.||_2$ mais pas pour $||.||_\infty$. De même $(n+1)f_n$ est bornée pour $||.||_1$ mais pas pour $||.||_2$. Ces normes ne sont pas équivalentes

Cas de la dimension finie

Toute les normes sont équivalentes en dimension finie

Preuve : cf compacité

Remarque

En dimension finie, lorsqu'on parle de converge, on a pas besoin de préciser avec quelle norme on travaille. Par exemple $M_p = (a_{i,j}^{(p)})$ converge vers $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si :

$$\lim_{p\to+\infty} M_p = M \text{ au sens de } ||.||_\infty$$
$$\forall (i,j)\in[|1;n|]^2, a_{i,j}^{(p)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} a_{i,j}$$

Attention, ceci n'est plus valable en dimension infinie : soit (e_i) une base de E. $\forall x \in E, \exists!(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. Si $J \subset I$ dénombrable, on définit sur E, $J = \{i_n/n \in \mathbb{N}\}$

$$||\sum_{i\in J} x_i e_i||_\infty = \max_{i\in J} |x_i|$$

$$||\sum_{i\in J} x_i e_i||_1 = \sum_{i\in J} |x_i|$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, ||\sum_{k=0}^{n} e_{i_k}||_1 = n+1, ||\sum_{k=0}^{n} e_{i_k}||_\infty = 1$$

Ces normes ne sont pas équivalentes

Interprétation géométrique

Soit E un $\mathbb{K}$-ev muni de deux normes $||.||$ et $||.||'$. Si $||.||'$ est dominée par $||.||$:

$$\exists \alpha > 0/\forall x\in E, ||x||' \leq \alpha||x||$$

Donc $\forall (a,r) \in E\times\mathbb{R}_+^*, x \in B_{||.||}(a,r), ||x-a|| \leq r$ donc $||x-a||' \leq \alpha r$ alors $x \in B_{||.||'}(a,\alpha r)$:

$$B_{||.||}(a,r) \subset B_{||.||'}(a,\alpha r)$$

Réciproquement, si toute boule ouverte pour $||.||$ est incluse dans une boule ouverte pour $||.||'$ de même centre. En particulier,

$$\exists \alpha > 0/B_{||.||}(0;1) \subset B_{||.||'}(0,\alpha)$$

$$\forall x\in E\setminus\{0\}, ||\frac{x}{2||x||}|| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2||x||} \in B_{||.||}(0;1)$$

$||.||$ domine donc $||.||'$. Deux normes sont équivalentes si et seulement toute boule ouverte pour l'une est incluse dans une boule ouverte pour l'autre de même centre. Deux normes équivalentes définissent les mêmes parties bornées

6.2 Topologie

6.2.1 Définitions

Définition

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn

1. soit $x \in E, \mathcal{A} \subset E$, on dit que $\mathcal{A}$ est un voisinage de a et on note $\mathcal{A} \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement si $\exists r > 0/B(x,r) \subset \mathcal{A}$
2. On dit que $O \subset E$ est un ouvert de E si et seulement si :

$O = \emptyset$ ou $\forall x \in O, O \in \mathcal{V}(x)$
$\forall x \in O, \exists r_x > 0/B(x, r_x) \subset O$

$$O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x)$$

3. On dit que F est un fermé de E si et seulement si

$$E \setminus F = \complement_E F \text{ est un ouvert de E}$$

Propriétés

1. Toute réunion d'ouverts est un ouvert
2. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert
3. E et $\emptyset$ sont ouverts et fermés
4. Toute intersection de fermés est un fermé
5. Toute réunion finie de fermés est un fermé

Preuve :

1. Soit (O_i) une famille d'ouverts de E :

$$x \in \bigcup_{i \in I} O_i, \exists i_0 \in I/x \in O_{i_0} \text{ et } \exists r > 0/B(x, r) \subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

$$\bigcup_{i \in I} O_i \text{ est ouverte}$$

2. Soit $(O_1; ...; O_n)$ n ouverts de E, soit $x \in \bigcap_{k=1}^{n} O_k$. $\forall k \in [|1; n|], \exists r_k > 0/B(x, r_k) \subset O_k$.

$$r = min_{1 \leq k \leq n}(r_k) > 0, B(x, r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} O_k \text{ est un ouvert}$$

3. $\forall x \in E, B(x, 1) \subset E$ donc E est un ouvert donc $\emptyset$ est un fermé. $\emptyset$ est ouvert donc E est fermé

4. 5. S'en déduisent par passage au complémentaire

Exemples

1. Toute boule ouverte est ouverte. En effet soit $a \in E$ et $r > 0$ et $x \in B(a, r), r_x = r - ||x - a||$
   $y \in B(x, r_x), ||a - y|| \leq ||x - a|| + ||x - y|| < ||x - a|| + r_x < r$

   $$B(x, r_x) \subset B(a, r)$$

   Les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes
2. Les boules fermées sont fermées, en effet $a \in E, r \geq 0$. Soit $x \in E \setminus \overline{B(a, r)}, ||x - a|| > r$.
   La boule ouverte de rayon $r_x = ||x - a|| - r \subset E \setminus F$
   $y \in B(x, r_x), ||y - a|| \geq ||x - a|| - ||x - y|| > ||x - a|| - r_x = r$

$$y \in E \setminus \overline{B(a,r)}$$

En particulier, les singletons sont fermés

3. Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, $]0;1]$ n'est ni ouvert ni fermé. En effet :

   $\forall r > 0, B(1,r) =]1-r; 1+r[\not\subseteq]0;1]$

   $\forall r > 0, B(0,r) =]-r; r[\not\subseteq \mathbb{R} \backslash]0;1[$

Remarque

Les parties finies, réunion finies de fermés sont fermées

⚠Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}[= \{0\}, \text{ non ouvert}$$

6.2.2 Intérieur, adhérence, frontières

Définition

1. On dit que x est intérieur a $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{A} \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement si $\exists r > 0 / B(x,r) \subset \mathcal{A}$. On note $\mathring{\mathcal{A}}$ appelé intérieur de $\mathcal{A}$, l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{A}$
2. On dit que $x \in E$ est adhérent à $\mathcal{A}$ si et seulement si :
   $\forall r > 0, B(x,r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à $\mathcal{A}$ s'appelle l'adhérence de $\mathcal{A}$, notée $\overline{\mathcal{A}}$
3. On définit la frontière (ou bord)de $\mathcal{A}$, parfois aussi noté : $\partial\mathcal{A}$
   $$fr(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathring{\mathcal{A}}$$

Exemple

1. $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $]a;b[\not\subseteq \mathbb{Q}$
2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0,]x-r; x+r[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$
3. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
4. De même : $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \overset{\circ}{\setminus} \mathbb{Q} = \emptyset$

Théorème

Soit $\mathcal{A} \subset E$:

1. $\mathring{\mathcal{A}}$ est la réunion de tous les ouverts de $\mathcal{A}$ (c'est le plus grand ouvert de E dans $\mathcal{A}$)
2. $E \setminus \overline{A} = E \overset{\circ}{\setminus} A$
3. $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de E contenant $\mathcal{A}$ (c'est le plus fermé contenant $\mathcal{A}$)

Preuve :

1. $x \in \mathring{\mathcal{A}}, \exists r > 0 / B(x,r) \subset \mathcal{A}$ et $B(x,r)$ est un ouvert inclus dans $\mathcal{A}$.

$$\mathring{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{O \text{ ouvert } \subset \mathring{\mathcal{A}}} O$$

O un ouvert de $\mathcal{A}$, $x \in O, \exists r > 0 / B(x,r) \subset O \subset \mathcal{A}$, donc $x \in \mathring{\mathcal{A}}$. Ainsi

$$\bigcup_{O \text{ ouvert } \subset \mathring{\mathcal{A}}} O \subset \mathring{\mathcal{A}}$$

2.

$$\begin{aligned} x \in E \setminus \overline{\mathcal{A}} &\Leftrightarrow \exists r > 0 / B(x,r) \cap \mathcal{A} = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0 / B(x,r) \subset E \setminus \mathcal{A} \\ &\Leftrightarrow x \in E \mathring{\setminus} \mathcal{A} \end{aligned}$$

3. s'en déduit

Remarque

$\mathcal{A}$ est ouvert $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathring{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A}$ est fermé $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$

Exemples

Soit F un sev de E. Supposons $\mathring{F} \neq \emptyset$
$\exists x_0 \in F, \exists r_0 > 0 / B(x_0, r_0) \subset F$
$\forall y \in E, ||x_0 - y|| < r_0 \Rightarrow y \in F$
Soit $x \in E \setminus \{0\}$, posons $y = x_0 + \frac{r_0}{2} \frac{x}{||x||}$
Il vient, $||y - x_0|| = \frac{r_0}{2} < r_0, y \in F$
Par suite : $x = \frac{2||x||}{r_0}(x_0 - y) \in F \Rightarrow F = E$ absurde
Par contraposée si F est un sev strict de E, $\mathring{F} = \emptyset$

6.2.3 Influence de la norme

Théorème

> Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts, fermés, voisinages, intérieur et adhérences

Preuve : Si $||.||$ et $||.||'$ sont équivalentes et O ouvert pour $||.||$, soit $x \in O$:

$$\exists r > 0 / B_{||.||}(x,r) \subset O \Leftrightarrow \exists r' > 0, B_{||.||'}(x,r') \subset B_{||.||}(x,r) \subset O$$

donc O est ouvert pour $||.||'$

Remarque

En dimension finie, on n'a pas besoin de préciser lorsqu'on parle des ouverts, fermés etc... de préciser avec quelle norme on travaille

Exemple

Donc $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ soit $H = \{f \in E / f(0) = 0\} = Ker(\varphi)$ avec $\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & f(0) \end{array}$, forme linéaire non nulle. H est un hyperplan de E. Munissons E de $||.||_\infty$: soit $g \in \overline{H}, \forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in H / ||g - f_\varepsilon||_\infty < \varepsilon$ (id est : $f_\varepsilon \in B(g, \varepsilon) \cap H$)
En particulier, $\forall \varepsilon > 0, |g(0)| = |g(0) - f_\varepsilon(0)| \leq ||g - f_\varepsilon||_\infty$, donc $g(0) = 0$. Ainsi $\overline{H} = H$, qui est fermé pour $||.||_\infty$
Munissons E de $||.||_1, g \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$
Soit $\varepsilon > 0, \alpha > 0$, définissons $\begin{array}{cccc} f_\varepsilon & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{t}{\alpha} g(\alpha) \\ & & t & \mapsto & g(t), t > \alpha \end{array}$ elle est continue et $f_\varepsilon \in H$
Il vient,

$$||f_\varepsilon - g_1||_1 = \int_0^1 |f_\varepsilon - g| dt = \int_0^\alpha |\frac{t}{\alpha} g(\alpha) - g(t)| dt$$

$||f - g||_1 \leq \frac{\alpha}{2}|g(\alpha)| + \alpha ||g||_\infty \leq \frac{3\alpha}{2}||g||_\infty$
On prend $\alpha = \frac{2\varepsilon}{3||g||_\infty}$ ainsi $||f - g||_1 \leq \varepsilon$. Ainsi $g \in \overline{H}$ et $\overline{H} = E$

Points isolés, d'accumulation

Soit $\mathcal{A} \subset E$, on dit que $a \in \mathcal{A}$ est un point isolé de $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\exists r > 0 / B(a, r) \cap \mathcal{A} = \{a\}$$

On dit que $a \in E$ est un point d'accumulation de $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\forall r > 0, B(a, r) \setminus \{0\} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset, \text{ donc } a \in \overline{\mathcal{A}}$$

Exemple

0 est un point isolé de $\mathbb{Z}$ et d'accumulation de $[0;1]$

6.2.4 Caractérisation séquentielle

Théorème

1. Soit $\mathcal{A} \subset E$ et $a \in E$, on a :

$$a \in \overline{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \exists (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} / \lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

2. $\mathcal{A}$ est fermé $\Leftrightarrow \forall (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ convergente $\lim_{n \to +\infty} a_n \in \mathcal{A}$

Preuve :

1. $ii) \to i)$: soit $r > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, ||a_n - a|| \leq \frac{r}{2}$ et $a_{n_0} \in B(a,r) \cap \mathcal{A}$, donc $a \in \overline{\mathcal{A}}$
   $i) \to ii)$: $a \in \overline{\mathcal{A}} : \forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n) \in \mathcal{A}/||a_n - a|| < \frac{1}{n+1}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$
2. s'en déduit puisque $\mathcal{A}$ est fermée $\Leftrightarrow \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$

Exemple

Les sphères sont fermées. En effet soit $a \in E$ et $r \geq 0$, soit $(a_n) \in S(a,r)^{\mathbb{N}}/\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in E$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, ||a_n - a|| = r$

$$\left|\ ||a-l|| - ||a_n - a||\ \right| \leq ||a_n - l|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||a_n - a|| = ||a - l|| = r, l \in S(a,r)$

Remarques

1. a est un point d'accumulation de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\exists (a_n) \in (\mathcal{A} \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}/\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$
   ce qui équivaut à l'existence d'une suite injective de points de $\mathcal{A}$ qui converge vers a
2. On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de E est discrète si et seulement si tous ses points isolés : par exemple, $\alpha > 0$, $\alpha\mathbb{Z}$ est une partie discrète de $\mathbb{R}$

6.2.5 Topologie induite

Définitions

1. Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn, $\mathcal{A}$ une partie non vide de E. On dit que $O \in \mathcal{A}$ est un ouvert relatif de $\mathcal{A}$ si et seulement si :
   $$O = \emptyset \text{ ou } \forall x \in O, \exists r > 0, B(x,r) \cap \mathcal{A} \subset O$$
   Notons que les ouverts de $\mathcal{A}$ sont exactement les intersections de $\mathcal{A}$ avec les ouverts de E
2. On dit que $F \subset \mathcal{A}$ est un fermé (relatif) de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{A} \setminus F$ est un ouvert
3. Pour $x \in \mathcal{A}$ et $V \subset \mathcal{A}$, on dit que V est un voisinage (relatif) de x dans $\mathcal{A}$ et note $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}(x)$ si et seulement si $\exists r > 0/B(x,r) \cap \mathcal{A} \subset V$

Remarque

Les ouverts,fermés et voisinages relatifs vérifient les même propriétés ensemblistes que ceux de E

Exemple

Soit F un sev de E, on peut définir $\begin{array}{cccc} ||.||_F & : & F & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & ||x|| \end{array}$ norme dur F. On vérifie que les ouverts, fermés relatifs de F sont les ouverts, fermés de $(F, ||.||_F)$ car

$$B_{||.||}(x,r) \cap F = B_{||.||_F}(x,r) = \{y \in F/||x-y|| < r\}$$

$]\frac{1}{2}; 1]$ est un ouvert relatif de $]0;1]$

Densité

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ deux parties de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{A}$
2. $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}$
3. $\forall a \in \mathcal{A}, \forall r > 0, B(a,r) \cap \mathcal{B} \neq 0$
4. $\forall O$ ouvert de $\mathcal{A}, O \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$
5. $\forall a \in \mathcal{A}, \exists (b_n) \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$

Preuve : Si $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{A}$, soit O un ouvert de $\mathcal{A}$ non vide, soit $x_0 \in O$: $\exists r_0 > 0 / B(x_0, r_0) \cap \mathcal{A} \subset O$
Or $x_0 \in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}$, donc $B(x_0, r_0) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Si $b \in B(x_0, r_0) \cap \mathcal{B}, b \in O \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$
Réciproquement : si tout ouvert non vide de $\mathcal{A}$ reste dans $\mathcal{B}$:

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall r > 0, (B(a,r) \cap \mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$$

Exemple

$E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni de $||.||_1$, soit $H = \{f \in E / f(0) = 0\}$. On a vu que $\overline{H} = E$, donc H est dense dans E

Théorème

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{F}$ aussi un sous-espace vectoriel de E
2. Soit H un hyperplan de E : ou bien $\overline{H} = H$ et H est fermé, ou bien $\overline{H} = E$ et H est dense dans E

Preuve :

1. $O \in F \subset \overline{F}$ et soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \overline{F}^2$, $\exists (x_n), (y_n) \in F^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda x_n + y_n) = \lambda x + y \in \overline{F}$
2. $\overline{H}$ est un sev de E contenant H qui est un hyperplan, donc si $\overline{H} \neq H, \exists x_0 \in \overline{H} \setminus H$ et $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E \subset \overline{H} \to \overline{H} = E$

6.3 Limite et continuité

6.3.1 Définition de limite

Définition

Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn. Soit $\mathcal{A} \subset E$ et $f : \mathcal{A} \to F$, $a \in \overline{\mathcal{A}}, l \in F$. On dit que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in \mathcal{A}, ||x-a||_E \leq \alpha \Rightarrow ||f(x) - l|| \leq \varepsilon$$

Voisinage de $+\infty$

Soit $V \subset \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}/[A;+\infty[\subset V$. On note $V \in \mathcal{V}(+\infty)$

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}, V \subset \mathcal{A}$, on dit que V est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}, [A;+\infty[\cap\mathcal{A} \subset V$ et on note $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}(+\infty)$

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$, on dit que $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{A}$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}, [A;+\infty[\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$ si et seulement si $\exists (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

De même pour $-\infty$

Définition avec les voisinages

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}_F(l), \exists V \in \mathcal{V}_E(a)/f(V \cap \mathcal{A}) \subset W$$

Exemples

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathcal{A}, x \geq A \Rightarrow ||f(x) - l||_F \leq \varepsilon$

   On retrouve bien la définition de limite de suite, lorsque $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N} & \to & E \\ & & n & \mapsto & u_n \end{array}$

2. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \mapsto & \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \end{array}$ On réalise le changement polaire : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \frac{r^4\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2}{r^2(\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2} \\ &= r^2\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 \\ &\leq r^2 = ||(x,y)||_2 \end{aligned}$$

   Soit $\varepsilon > 0, ||(x,y)||_2 \leq \sqrt{\varepsilon} \to |f(x,y)| \leq \varepsilon$. La limite existe et vaut :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

3. $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$

   $g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2} = \cos(\theta)\sin(\theta)$

   $\begin{cases} \theta = 0 \to g(x,0) = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \to g(x,x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ pas de limite

   ⚠Dans l'exemple 3, on a $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)) = 0$, mais g n'admet pas de limite en $(0,0)$. Lorsque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ alors :

   $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = l$

   $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = l$

   Généralement, on n'a pas le droit d'intervertir deux limites sans précautions

4. $\begin{array}{rcccc} h & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \mapsto & \frac{x^2}{x^2+y^2} \end{array}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} h(x,y)) = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} h(x,y)) = 0$

6.3.2 Propriétés des limites

Composition des limites

> Soient $(E, ||.||_E), (F, ||.||_F)$ et $(G, ||.||_G)$ trois $\mathbb{K}$-evn : $f : \mathcal{A} \subset E \to \mathcal{B} \subset F$ et $g : \mathcal{B} \to G$. Soient $a \in \overline{\mathcal{A}}$ (éventuellement $\pm\infty$), $b \in \overline{\mathcal{B}}$ (idem) et $l \in G \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que :
> $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = l$

Preuve : se ramener à la définition avec les voisinages

Caractérisation séquentielle de la limite

> Soit $f : \mathcal{A} \subset E \to F, a \in \overline{\mathcal{A}}, l \in F \cup \{\pm\infty\}$
> $$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} / \lim_{n\to+\infty} a_n = a, \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$$

Preuve : cf cas de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$

Corollaire

> S'il existe $(x_n, y_n) \in (\mathcal{A}^2)^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l_1 \neq l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$. Alors f n'a pas de limite en a.

Exemples

1. $\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$

   $\begin{cases} g(\frac{1}{n+1}, 0) = 0 \\ g(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow g$ n'a pas de limite en $(0,0)$

2. $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \sin(\frac{1}{t}) \end{array}$

   $\forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} f(\frac{1}{k\pi}) = 0 \\ f(\frac{1}{(4k+1)\frac{\pi}{2}}) = 1 \end{cases} \Rightarrow f$ n'a pas de limite en 0

   En revanche $t\sin(\frac{1}{t}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

3. $$\begin{array}{rccl} \chi_{\mathbb{Q}} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & 0 \text{ si } t \notin \mathbb{Q} \\ & & & & 1 \text{ si } t \in \mathbb{Q} \end{array}$$
   Cette fonction n'admet de limite en aucun point, se qui se démontre en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite et la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Propriétés générales

1. Unicité de la limite : si f a pour limite l et l' en a alors l = l'
2. Si f a une limite finie en a, $\exists V_0 \in \mathcal{V}(a), \exists M \geq 0 / \forall x \in V_0 \cap \mathcal{A}, ||f(x)|| \leq M$ (f est bornée au voisinage de a)
3. Si de plus $\lim\limits_{x\to+a} f(x) = l \neq 0 : \exists V_0 \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in V_0 \cap \mathcal{A}, ||f(x)|| \geq \frac{||l||}{2}$
4. Si $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$
5. Linéarité : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+a} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x\to+a} g(x) = l_2 \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases} \Rightarrow \lambda f(x) + g(x) \underset{x\to+a}{\longrightarrow} \lambda l_1 + l_2$
   Si F est une algèbre normée :
   $$f(x) \times g(x) \lim_{x\to+a} l_1 \times l_2$$
6. Soit $(F_1, ||.||_1), ..., (F_p, ||.||_p)$ p$\mathbb{K}$-evn
   $\forall i \in [|1;p|], f_i : \mathcal{A} \subset E \to F_i$. Formons : $\begin{array}{rccl} f & : & \mathcal{A} & \to & F_1 \times ... \times F_p \\ & & x & \mapsto & (f_1(x); ...; f_p(x)) \end{array}$
   On a $\lim\limits_{x\to+a} f(x) = l = (l_1, ..., l_p) \Leftrightarrow \forall i \in [|1;p|], \lim\limits_{x\to a} f_i(x) = l_i$

6.3.3 Continuité

Définition

Soit $f : \mathcal{A} \subset E \to F$

1. Soit $x_0 \in \mathcal{A}$, on dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui se traduit :
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, ||x - x_0||_E \leq \alpha \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_F \leq \varepsilon$$
2. On dit que f est continue sur $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ si et seulement si elle est continue pour tout point de$\mathcal{A}'$
3. On dit que f est continue si et seulement si elle est continue en tout point de son ensemble de définition

Exemples

1. $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'a de limite en aucun point, donc est discontinue partout

2. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t \text{ si } t \in \mathbb{Q} \\ -t \text{ si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$
   Comme $|f(t)| = |t|$: $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 = f(0)$, f est continue en 0
   Soit $t_0 \neq 0, \exists (r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_0$ et $\exists (i_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}} / i_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_0$
   $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = t_0 \neq -t_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n)$
3. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \text{ si } t \notin \mathbb{Q} \\ \frac{p}{q} & \mapsto & \frac{1}{q} \text{ si } t \in \mathbb{Q} \text{ et } p \wedge q = 1 \end{array}$$
   $t_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, \{q \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{q} \geq \varepsilon\}$ est fini et $\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [t_1 - 1; t_1 + 1] / \frac{1}{q} \geq \varepsilon\}$ aussi. Ainsi $\{t \in [t_1 - 1; t_1 + 1] / f(t) \geq \varepsilon\}$ est fini :
   $$\exists \alpha_0 > 0 / \forall t \in [t_1 - 1; t_1 + 1] 0 \leq f(t) \leq \varepsilon$$

Propriétés

1. f est continue en x_0 si et seulement si $\begin{cases} \forall (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0) \end{cases}$
2. Si f est continue en x_0, elle est bornée au voisinage de x_0. Si de plus $f(x_0) \neq 0$, f ne s'annule pas au voisinage de x_0. Plus généralement : si $F = \mathbb{R}$ et si $\lambda < f(x_0) < \mu$:
   $$\exists V \in \mathcal{V}(x_0) / \forall x \in V \cap \mathcal{A}, \lambda \leq f(x) \leq \mu$$
   prendre $\varepsilon = min(\mu - f(x), f(x_0) - \lambda) > 0$

Remarque

Comme deux normes équivalentes définissent les même ouverts, fermés et voisinages, elles définissant les mêmes limites et fonctions continues

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*, i \in [|1; n|]$, $e_i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1; ...; x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$, e_i^* est continue

Théorèmes généraux de la continuité

Toute somme, produit, composée de fonctions continues est continue

Exemples

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x; y; z) & \mapsto & \sin(x^2 \sqrt{y^4 + 1} - e^z) \ln(1 + \sqrt[3]{z^4 + e^{xy}}) - z^5 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x; y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{array}$

sont continues d'après les théorèmes généraux de la continuité (TGC)

Continuité globale

Soit $f : \mathcal{A} \subset E \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur $\mathcal{A}$
2. $\forall O$ ouvert de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de $\mathcal{A}$
3. $\forall \mathcal{F}$ fermé de F, $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de $\mathcal{A}$

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) Si f est continue, soit O un ouvert de F,
si $f^{-1}(O) = \emptyset$, c'est un ouvert de $\mathcal{A}$
si $f^{-1}(O) \neq \emptyset$, soit $x_0 \in f^{-1}(O)$: $f(x_0) \in O$ ouvert, donc $\exists \varepsilon > 0/B(f(x_0), \varepsilon) \subset O$. f étant continue en x_0 ,

$$\exists \alpha > 0/\forall x \in \mathcal{A}, ||x - x_0|| < \alpha \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi $\forall x \in B(x_0, x) \cap \mathcal{A}, ||x - x_0|| \leq \alpha$, donc $f(x) \in B(x_0, \varepsilon) \subset O, x \in f^{-1}(O)$
$B(x_0, \alpha) \cap \mathcal{A} \subset f^{-1}(O)$, qui est bien un ouvert de $\mathcal{A}$

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\forall X \subset F, f^{-1}(F \setminus X) = \{x \in \mathcal{A}/f(x) \notin X\} = \mathcal{A} \setminus f^{-1}(X)$

(2) $\Rightarrow$ (1) Supposons (2) et soit $x_0 \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $O = B(f(x_0), \varepsilon)$ un ouvert de F

$$f^{-1}(O) \text{ est un ouvert de } \mathcal{A}, x_0 \in f^{-1}(O)$$

ouvert de $\mathcal{A}, \exists \alpha > 0/B(x, \alpha) \cap \mathcal{A} \subset f^{-1}(O)$, d'où $\forall x \in \mathcal{A}, ||x - x_0|| \leq \frac{\alpha}{2} < \alpha$ et $x \in f^{-1}(O), f(x) \in B(f(x), \varepsilon) \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| \leq \varepsilon$

Remarque

On utilise fréquemment ce théorème en invoquant le continuité de f pour montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathcal{A}$

Exemples

1. $\begin{array}{cccc} \det & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & M & \mapsto & \det(M) \end{array}$ est continue d'après les TGC
   $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ est donc ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
   $M_0 \in GL_n(\mathbb{K}), \exists \alpha_0 > 0/||M - M_0|| \leq \alpha_0 \Rightarrow M \in GL_n(\mathbb{K})$
   $SL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$, est un fermé
2. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$ est continue d'après les TGC
   $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est fermé

Homéomorphisme

On dit que $f : \mathcal{A} \subset E \to \mathcal{B} \subset F$ est un homéomorphisme de $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ si et seulement si :

1. f est continue
2. f est bijective
3. f^{-1} est continue

Exemple

Si f est une isométrie surjective :

$$\forall (x,y) \in E^2 : ||f(x)-f(y)||_F = ||x-y||_E$$

C'est un homéomorphisme. En effet f est bijective et f^{-1} est une isométrie

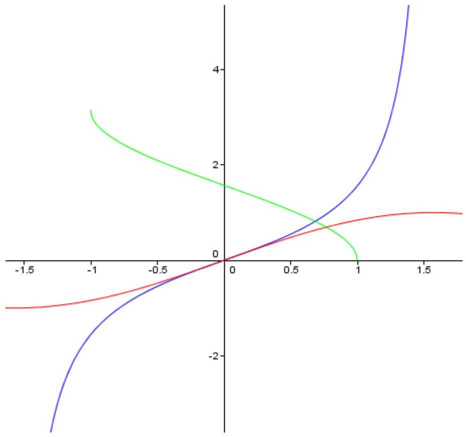
⚠On peut avoir f bijective et continue sans que f^{-1} soit continue : $\begin{array}{rccc} f & : & [0;1[\cup[2;3[& \to & [0;2] \\ & & t & \mapsto & t \text{ si } t \in [0;1] \\ & & t & \mapsto & 4-t \text{ si } t \in [2;3] \end{array}$

Théorème

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, f induit un homéomorphisme de $I \to J$
> Preuve : f est injective car strictement monotone donc induit une bijection $I \to J$. f^{-1} est strictement monotone et $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle, donc f^{-1} est continue

Exemples

1. sin : $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$
2. tan : $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$
3. arccos : $[-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$



Projection stéréographique

$$n \in \mathbb{N}, \mathcal{S}_n = \{(x_1;...;x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}, \Pi = \{(x_1;...;x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

$\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{S}_n \setminus \{P = (0;...;0;1)\} & \to & \Pi \\ & & M & \mapsto & f(M) \end{array}$ intersection de P(M) avec M

Soit $M = (x_1;...;x_{n+1}) \in \mathcal{S}_n\ \{P\}, x_{n+1} \neq 1$

$f(M) = (x'_1; ...; x'_{n+1}), x'_{n+1} = 0$
$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{Pf(M)} = \lambda \overrightarrow{PM}$
Il vient : $\lambda = \frac{1}{1-x_{n+1}}$
$\begin{cases} x'_i & = \frac{x}{1-x_{n+1}}, \forall i \in [|1;n|] \\ x'_{n+1} & = 0 \end{cases}$ f est continue
Réciproquement : soit $(x'_1; ...; x'_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(x_1; ...; x_{n+1}) \in \mathcal{S}_n \setminus \{P\}$, on a : $f(x_1; ...; x_{n+1}) = (x'_1; ...; x'_n; 0)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \Rightarrow x_{n+1}^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \frac{1 - x_{n+1}^2}{(1 - x_{n+1})^2} = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2 - 1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2 + 1}$$

Ainsi : $\forall i \in [|1;n|], x_i = x'_i(1 - x_{n+1}) = \frac{2x'_i}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}}$
Et réciproquement en remontant les calculs : f est bijective : $\mathcal{S}_n \setminus \{P\} \to \Pi$, f^{-1} est continue

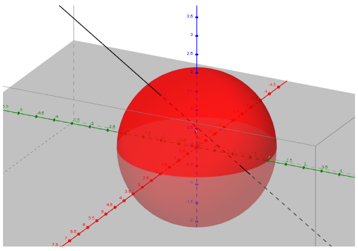


FIGURE 6.2 – Projection stéréographique

Application

Les points à coordonnées rationnelles sont denses dans la sphère :

$$\mathcal{S}_n \cap \mathbb{Q}^{n+1} \text{ est dense dans } \mathcal{S}_n$$

Remarque

$$\begin{array}{cccc} f & : & \Pi = \{(t,0)/t \in \mathbb{R}\} & \to & \mathcal{S}_1 \setminus \{(0;1)\} \\ & & t & \mapsto & (\frac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta), \frac{t^2-1}{t^2+1} = -\cos(\theta)) \end{array}, t = \tan(\frac{\theta}{2}), \theta \in]-\pi;\pi[$$

Notons : $t \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f^{-1}(t) \in \mathbb{Q}^2 \cap \mathcal{S}_1$
$(\frac{a}{b}; \frac{b}{c}) \in \mathbb{Q}^2 \cap \mathcal{S}_1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Q} / \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{b}{c} = \frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$

6.3.4 Continuité uniforme

Définition

Soit $f : \mathcal{A} \subset E \to F$

1. On dit que f est uniformément continue sur $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x,y) \in \mathcal{A}^2, ||x-y||_E \leq \alpha \Rightarrow ||f(x)-f(y)||_F \leq \varepsilon$$

2. On dit que f est k-lipschitzienne sur $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{A}^2, ||f(x)-f(y)||_F \leq k||x-y||_E$$

On dit que f est lipschitzienne si et seulement si $\exists k \geq 0 / f$ soit k-lipschitzienne (f est dite contractante si $k \in [0;1[$)

Théorème

1. Si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue
2. Si f est uniformément continue alors elle est continue

Preuve :

1. Si f est k-lipschitzienne, $\varepsilon > 0, \alpha = \frac{\varepsilon}{k+1}, ||x-y|| \leq \alpha$ alors
$$||f(x)-f(y)|| \leq k\alpha \leq \varepsilon$$
2. Si f est uniformément continue, $x_0 \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$
$$\forall y \in \mathcal{A}, ||x_0 - y||_E \leq \alpha \Rightarrow ||f(x_0) - f(x)||_F \leq \varepsilon$$

⚠Dans la définition de la continuité sur $\mathcal{A}$, α dépend de ε et x_0, dans la continuité uniforme, α ne dépend que de ε

La réciproque de ce théorème est fausse :

$\begin{array}{rccc} f & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \sqrt{t} \end{array}$ est uniformément continue

$t \neq 0, |\frac{f(t)-f(0)}{t-0}| = \frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

f n'est pas lipschitzienne

$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & t & \mapsto & t^2 \end{array}$ est continue, pour $\varepsilon = 1, x-y = \alpha$ et $x+y = \frac{2}{\alpha}, x = \frac{\alpha+\frac{2}{\alpha}}{2}, y = \frac{1}{2}(\frac{2}{\alpha}-\alpha)$

$\forall \alpha > 0, |x-y| \leq \alpha$ et $|x^2-y^2| = |x-y| \times |x+y| \geq 2$: f n'est pas uniformément continue

Théorème

1. Toute somme et composée d'applications lipschitzienne est lipschitzienne
2. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$, f est lipschitzienne si et seulement si $\forall t \in I, |f(t)| \leq k$

Preuve :

1. Revenir aux définitions
2. Inégalité des accroissements finis

Application

Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un $\mathbb{K}$-evn : $\begin{array}{rccc} d_{\mathcal{A}} & : & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & d(x,\mathcal{A}) \end{array}$

Soit $(x,y,a) \in E^2 \times \mathcal{A}, d(x,\mathcal{A}) \leq ||x-a|| \leq ||y-a|| + ||x-y||$
Il vient $\forall a \in \mathcal{A}, d(x,\mathcal{A}) \leq d(y,\mathcal{A}) + ||x-y||$ et réciproquement ,

$$|d(x,\mathcal{A}) - d(y,\mathcal{A})| \leq |x-y|$$

$d_{\mathcal{A}}$ est 1-lipschitzienne donc continue, idem pour la norme

6.3.5 Applications linéaires continues

Théorème

Soient $(E,||.||_E)$ et $(F,||.||_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est continue
2. u est continue en 0
3. u est bornée sur $\overline{B_E(0;1)}$
4. u est bornée sur $S_E(0;1)$
5. u est lipschitzienne
6. u est uniformément continue

Dans ce cas on note :

$$|||u||| = \sup_{x \in E\setminus\{(0;0)\}} \frac{||u(x)||_F}{||x||}$$

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) oui

(2) $\Rightarrow$ (3) si u est continue en 0, on a $u(0) = 0$ et pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists \alpha_1 > 0 / \forall x \in E, ||x|| \leq \alpha_1 \Rightarrow ||u(x)|| \leq 1$$

Soit $x \in \overline{B_E(0;1)}, ||\alpha_1 x||_E \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 ||x||_E \leq 1, ||u(x)||_F \leq \frac{1}{\alpha_1}$

(3) $\Rightarrow$ (4) oui

(4) $\Rightarrow$ (5) soit $M = \sup_{||x||=1} ||u(x)||$, soit $x \neq y \in E^2, |\frac{x-y}{||x-y||}| = 1$, donc $||u(x) - u(y)|| \leq M||x-y||$

(5) $\Rightarrow$ (1) oui

⚠En dimension infinie, la continuité d'une application linéaire et la valeur de $|||u|||$ dépendent des normes choisies sur E et F !

Exemples

1. $E = \mathbb{C}[X]$, soit $\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{C} \\ & & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k & \mapsto & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k \end{array}$ $, \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$

   On munit E de le norme infinie. Soit pour $n \in \mathbb{N}$,

   $$P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$$

   $||P_n||_\infty = 1$ et $\varphi(P_n) = n+1$ donc φ n'est pas continue de $(E, ||.||_\infty) \to (\mathbb{C}, |.|)$. En revanche si on munit E de $||.||_1$:

   $$||\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k||_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

   , on a $\forall P \in E, |\varphi(P)| \leq ||P||_1$, donc φ est continue de $(E, ||.||_\infty) \to (\mathbb{C}, |.|)$
   De plus $|||\varphi||| \leq 1$, d'après ce qui précède. Pour $P = 1, ||P||_1 = 1$ et $|\varphi(P)| = 1$, donc

   $$|||\varphi||| = 1$$

   ⚠Pour montrer que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue, on prouve l'existence de $M \geq 0/\forall x \in E, ||u(x)||_F \leq M||x||$. On a alors $|||u||| \leq M$

2. Avec $E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme infini $\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{C} \\ & & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k & \mapsto & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{2^k} \end{array}$

   $$\forall P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k, |\varphi(P)| = |\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{2^k}| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|a_k|}{2^k} \leq ||P||_\infty \times \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$$

   Ainsi φ est continue de $(E, ||.||_\infty) \to (\mathbb{C}, |.|)$ et $|||\varphi||| \leq 2$
   De plus, soit $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X^k, ||P_n||_\infty = 1, \varphi(P_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$
   $|||\varphi||| = 2$, mais pas atteinte

Cas de la dimension finie

Si $\dim(E) < +\infty$, toute application linéaire, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Preuve : Toutes les normes de E sont équivalentes puisque E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1; ....; e_n)$ base de E, il vient :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$$

$$||u(x)|| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \times ||u(e_i)|| \leq ||x||_\infty \sum_{i=1}^{n} ||u(e_i)|| \leq M||x||_\infty$$

u est continue

Cas des formes linéaires (HP)

Soit $(E, ||.||_E)$ un $\mathbb{K}$-evn et $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Soit $H = Ker(\varphi)$. On a : φ est continue si et seulement si $H = Ker(\varphi)$ est fermé

Preuve : si φ est continue alors : $Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé
Réciproquement si $Ker(\varphi)$ est fermé : si $\varphi = 0$ alors φ est continue. Supposons dorénavant que $\varphi \neq 0$, $E\backslash H$ est ouvert non vide (H est un hyperplan). Soit $x_0 \in E\backslash H, \exists r_0 > 0/B(x_0, r_0) \subset E\backslash H$. Ainsi

$$\forall j \in E, ||x_0 - y|| < r_0 \Rightarrow \varphi(y) \neq 0$$

Par contraposée :$\varphi(y) = 0 \Rightarrow ||x_0 - y|| \geq r_0$
Comme $x_0 \in Ker(\varphi), E = Ker(\varphi) \oplus \mathbb{K}x_0$. Soit $x \in E, x = z + \lambda_x x_0, |\varphi(x)| = |\lambda_x| \cdot |\varphi(x_0)|$
Si $\lambda_x = 0$ alors $|\varphi(x)| = 0$
Si $\lambda_x \neq 0, (x \notin Ker(\varphi), \frac{-z}{\lambda_x} \in Ker(\varphi)$, donc

$$||x_0 + \frac{z}{\lambda_x}|| \geq r_0 \Rightarrow \begin{cases} ||\frac{x}{\lambda_x}|| \geq r_0 \\ |\lambda_x| \leq \frac{||x||}{r_0} \end{cases}$$

Finalement : $\varphi(x) \leq \frac{|\varphi(x_0)|}{r_0}||x||$, vrai aussi si $\lambda_x = 0$

φ est bien continue

6.3.6 $\mathcal{L}_c(E, F)$ et $\mathcal{L}_c(E)$

Théorème-Définition

Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}_c(E)$), l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F (resp. dans E), on a :

1. $(\mathcal{L}_c(E, F), ||.||)$ est un $\mathbb{K} - evn$
2. Si $(G, ||.||_G)$ est un $\mathbb{K}$-evn, $\forall (u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G)$

$$v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G), |||v \circ u||| \leq |||v||| \cdot |||u|||$$

3. $(\mathcal{L}_c(E), |||.|||)$ est une algèbre normée

Preuve :

1. $O \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall (\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}_c(E, F)^2, \lambda u + v \in \mathcal{L}_c(E, F)$
De plus , $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), |||u||| = 0 \Rightarrow \forall x \in E||u(x)|| \leq |||u||| \cdot ||x|| = 0$ donc $u(x) = 0$ et $u = 0$
Comme de plus , $|||u||| = \sup_{x \in S(0,1)} ||u(x)||$. On a : $\forall (\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}_c(E, F)^2$
$|||\lambda u||| = |\lambda| \cdot |||u|||$ et $|||u + v||| \leq |||u||| + |||v|||$
2. $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\forall x \in E$:

$$||v(u(x))|| \leq |||v||| \cdot ||u(x)|| \leq |||v||| \cdot |||u||| \cdot ||x||$$

donc $v \circ u$ est continue et $|||v \circ u||| \leq |||v||| \cdot |||u|||$
On peut avoir inégalité stricte, $u \neq 0$ et $u^2 = 0$
3. trivial

6.4 Compacité

6.4.1 Définition

Définition de Bolzano-Weierstrass

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn, $\mathcal{A} \subset E$. On dit que $\mathcal{A}$ est un compact de E, si et seulement si toute suite d'éléments de $\mathcal{A}$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{A}$

$$\forall (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante de } \exists \lambda \in \mathcal{A} / \lim_{n \to +\infty} a_{\sigma(n)} = \lambda$$

C'est la propriété de Bolzano-Weierstrass

Exemples

1. Dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute partie fermée bornée est compacte. Soit $\mathcal{A}$ telle partie et $(a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, (a_n)$ est bornée car $\mathcal{A}$ l'est. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence. $[0;1] \cup [2;3]$, $\{3\} \cup [4;50]$, les boules fermés, sphères, sont compacts
2. Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in E$. Soit $\mathcal{A} = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$. Soit $(y_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, si $\exists a \in \mathcal{A} / \{n \in \mathbb{N} / y_n = a\}$ est infini, on peut extraire $\forall n \in \mathbb{N} (y_{\sigma(n)}) = a$.
   Si au contraire $\forall a \in \mathcal{A}, \{n \in \mathbb{N} / y_n = a\} = I_a$ est fini
   Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$.
   $\{a \in \mathcal{A} / a \notin \overline{B(l, \varepsilon)}\}$ est fini et $\{n \in \mathbb{N} / y_n \notin \overline{B(l, \varepsilon)}\} = \bigcup_{a \in \mathcal{B}} I_a$ est fini
   $$\lim_{n \to +\infty} y_n = l \in \mathcal{A}$$

Condition suffisante de non compacité

Soit $X \subset E, \exists \varepsilon_0 > 0, (x_n) \in X^{\mathbb{N}} / \forall n \neq m, ||x_n - x_m|| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow X$ n'est pas compact

Preuve : s'il existait $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante / $(x_{\sigma(n)})$ converge on aurait : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)} = 0$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, ||x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}|| < \varepsilon_0$, impossible

Exemple

$E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme infinie, $\forall n \neq m, ||X^n - X^m||_\infty = 1 = ||X^n||_\infty$, donc $S_E(0,1)$ n'est pas compacte

Propriétés

1. Tout compact est fermé borné (la réciproque est fausse en dimension infinie)
2. Toute réunion finie de compacte est compacte
3. Toute intersection de compacts est compacte
4. Soit $(E_1, ||.||_1), ..., (E_p, ||.||_p) p\mathbb{K}$-evn $E = E_1 \times ... \times E_p$ muni de la norme infinie

Preuve :

1. Soit $\mathcal{A}$ un compact, $(x_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in E$. On peut extraire $x_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathcal{A}$ alors $\lambda = l \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est fermée
   Si $\mathcal{A}$ n'est pas bornée, $\exists (x_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, ||x_n|| \geq n$. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, ||x_{\sigma(n)}|| \geq \sigma(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ avec $(x_{\sigma(n)})$ non bornée n'est pas compact : nécessairement $\mathcal{A}$ est bornée
2. Soit $(A_1; ...; A_p)$ p compacts de E, $(x_n) \in (A_1 \cup ... \cup A_p)^{\mathbb{N}}, \exists i_0 \in [|1;p|] / \{n \in \mathbb{N} / x_n \in A_{i_0}\}$ est infini. On extrait $(x_{\sigma(n)}) \in A_{i_0}^{\mathbb{N}}$ puis $(x_{(\sigma\circ\varphi)(n)})$, $\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{N} & \to & E \\ & & n & \mapsto & u_n \end{array}$ qui converge vers $l \in A_{i_0}$, compact
   ⚠C'est faux pour une réunion infinie ,

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$$

   mais $\mathbb{Z}$ n'est pas borné, donc non compact
3. Soit (A_i) une famille de compacts de E si $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$, compact
   Sinon, soit $(x_n) \in (\bigcap_{i\in I} A_i)^{\mathbb{N}}$, soit $i_0 \in I$, on peut extraire $x_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in A_{i_0}$ et $\forall i \in I, (x_{\sigma(n)}) \in (A_i)^{\mathbb{N}}$ et A, fermé (car compact), donc $\lambda \in A_i$. Ainsi $\lambda \in \bigcap_{i\in I} A_i$
4. Soit $(x_n) = (x_{n,1}; ...; x_{n,p}) \in (A_1 \times ... \times A_p)^{\mathbb{N}}$. On extrait d'abord une suite sous-suite convergente de la première : en composant et répétant l'opération sur chaque composante, on obtient une sous-suite convergente de (x_n)

Remarque

Si $\mathcal{A}$ est compacte, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $\mathbb{B}$ est compacte si et seulement si $\mathcal{B}$ est fermée. En effet, si $\mathcal{B}$ est compacte elle est fermée. Si $\mathcal{B}$ est fermée, soit $(x_n) \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \exists x_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathcal{B}$, par fermeture

6.4.2 Compacité et continuité

Théorème

Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn, $\mathcal{A}$ un compact de E et $f : \mathcal{A} \to F$, continue alors $f(\mathcal{A})$ est un compact de F. L'image d'un compact est compacte

Preuve : Soit $(y_n) \in f(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, y_n = f(x_n)$. On extrait $x_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in \mathcal{A}$, par continuité de f, $\lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)} = f(x) \in f(\mathcal{A})$

Corollaire

Si $\mathcal{A}$ est compact et $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ continue alors :

$$\exists (a_1, a_2) \in \mathcal{A}^2 / f(a_1) = \min_{x \in \mathcal{A}}(f(x)), f(a_2) = \max_{x \in \mathcal{A}}(f(x))$$

Une application réelle continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes

Preuve : $f(\mathcal{A})$ est compacte, donc fermée bornée. On peut définir $M = \sup_{x \in \mathcal{A}}(f(x)) \in \overline{f(\mathcal{A})} = f(\mathcal{A})$. En effet $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathcal{A} / M - \varepsilon < f(x) \leq M$, donc $\exists a_2 \in \mathcal{A} / f(a_2) = \max_{x \in \mathcal{A}}(f(x))$. De même pour le minimum, en appliquant ce résultat à $-f$

Théorème de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue

Preuve : Soit $\mathcal{A}$ compact de E et $f : \mathcal{A} \to F$ continue. Si f n'était pas uniformément continue :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \alpha > 0, \exists (x; y) \in \mathcal{A}^2 / ||x - y||_E \leq \alpha \text{ et } ||f(x) - f(y)||_F > \varepsilon_0$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in \mathcal{A}_2 / ||x_n - y_n|| \leq \frac{1}{n+1}$ et $||f(x_n) - f(y_n)||_F > \varepsilon_0$. On peut extraire $x_{\sigma(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \in \mathcal{A}$, comme $\lim_{n \to +\infty}(x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}) = 0$, $\lim_{n \to +\infty} y_n = x$, d'où par continuité de f, $\lim_{n \to +\infty} f(x_{\sigma(n)}) = \lim_{n \to +\infty} f(y_{\sigma(n)}) = f(x)$
ce qui est contredit par $\forall n \in \mathbb{N}, ||f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})|| > \varepsilon_0$

Remarque

En particulier, toute application continue d'un segment de $\mathbb{R} \to F$ est uniformément continue sur ce segment

6.4.3 Compacité en dimension finie

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}^p$ muni de la norme infinie

1. Les compacts de $(\mathbb{K}^p, ||.||_\infty)$ sont exactement les fermés bornés
2. De toute suite bornée sur un compact, on peut extraire une sous-suite convergente

Preuve :

1. Les compacts sont fermés, bornés. Soit alors $\mathcal{A} \subset E$ fermée et bornée dans $(E, ||.||_\infty)$: $\exists M \geq 0 / \forall x = (x_1; ...; x_p) \in \mathcal{A}, ||x||_\infty \leq M$, donc $\mathcal{A} \subset [-M; M]^2$. Or $[-M; M]$ est compact dans $\mathbb{R}$ (pour $\mathbb{C}$ se ramener à $\mathbb{R}^2$) donc $[-M; M]^p$ est compact dans $\mathbb{R}^p$. $\mathcal{A}$ fermée dans un compact, alors $\mathcal{A}$ est un compact
2. s'en déduit

Équivalence des normes en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, fixons une base $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_p)$ de E. Soit

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E, ||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq p} |x_i|$$

Soit $||.||$ une autre norme sur E. L'application $\begin{array}{ccccc} \varphi & : & (S_{E,||.||}(0,1), ||.||_\infty) & \to & (S_{\mathbb{K}^p,||.||_\infty}(0,1), ||.||_\infty) \\ & & x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_p & \mapsto & (x_1; ...; x_p) \end{array}$

est un homéomorphisme, car c'est une isométrie bijective. Donc $S_{E,||.||}(0,1)$ est compacte dans $(E, ||.||_\infty)$.
On a

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E, ||x|| \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \cdot ||e_i|| \leq (\sum_{i=1}^{p} ||e_i||)||x||_\infty = \beta||x||_\infty$$

On cherche à présent
$\alpha > 0/\forall x \in E, \alpha||x||_\infty \leq ||x|| \Leftrightarrow \forall x \in E\setminus\{0\}, \alpha \leq \frac{||x||}{||x||_\infty} = ||\frac{x}{||x||_\infty}|| \Leftrightarrow \forall x \in S_{E,||.||}(0,1)||x|| \geq \alpha$
Or $\forall (x,y) \in E^2, |\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x-y|| \leq \beta||x-y||_\infty$ donc β-lipschitzienne de $(E, ||.||_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$, donc elle est continue. Or $S_{E,||.||}(0,1)$ est compacte dans $(E, ||.||_\infty)$, donc :

$$\exists x_0 \in S_{E,||.||}(0,1)/||x_0|| = \min_{x\in S_{E,||.||}(0,1)} ||x|| > 0$$

car x_0. Il suffit de poser $\alpha = ||x||$

Corollaire

> Les compacts en dimension finie sont exactement les fermés bornés

Remarque

Généralement, soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n) & \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n/||u_n - \lambda|| \leq \varepsilon \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists k \geq n/u_k \in \overline{B(\lambda, \varepsilon)} \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, \lambda \in \overline{\{u_k/k \geq n\}} \end{array}$$

Ainsi l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) est donc $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k/k \geq n\}}$ fermé

Caractérisation des suites convergentes en dimension finie

> En dimension finie une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence

Preuve : Si λ est l'unique valeur d'adhérence de (u_n) bornée. Si (u_n) ne converge pas vers λ :

$$\exists \varepsilon > 0/\{n \in \mathbb{N}/||u_n - \lambda|| > \varepsilon\} \text{ est infini}$$

On peut extraire $(u_{\sigma(n)})/\forall n \in \mathbb{N}, ||u_{\sigma(n)} - l|| > \varepsilon$. On peut ré-extraire $(u_{(\sigma\circ\varphi)(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda'$ et $||\lambda - \lambda'|| \geq \varepsilon > 0$, impossible

Théorème d'Alembert-Gauss

> Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$

Lemme très utile (HP) Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie
$f : E \to \mathbb{R} / \lim\limits_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$ continue
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in E, ||x|| \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$
Alors : $\exists x_0 \in E / f(x_0) = \min\limits_{x \in E} f(x)$
Preuve : $\exists B_0 \in \mathbb{R} / \forall x \in E, ||x|| \geq B_0 \Rightarrow f(x) \geq f(0), B(0, B_0)$ est compacte car fermée bornée, f étant continue, $\exists x_0 \in \overline{B(0, B_0)} / f(x_0) = \min\limits_{||x|| \leq B_0} (f(x))$
Comme $0 \in \overline{B(0, B_0)}, f(x_0) \leq f(0)$. Donc $\forall x \in E, ||x|| > B_0, f(x) \geq f(0) \geq f(x_0)$. Ainsi $f(x_0) = \min\limits_{x \in E}(f(x))$

Preuve Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant
Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, |P(z)| = |a_n z^n| |\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}|$$

$$|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}| \leq \sum_{k=0}^{n} |\frac{a_k}{a_n}| \cdot |z|^{k-n} \underset{|z| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } |P(z)| \geq |a_n z^n| \cdot |\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n} - 1| \geq \frac{|a_n z^n|}{2}$$

Ainsi $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$
$|P|$ étant continue, d'après le lemme : $\exists z_0 \in \mathbb{C} / |P(z_0)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$
Supposons $|P(z_0)| = \rho_0 > 0$, soit $P(z_0) = \rho_0 e^{i\theta_0}$
Soit $Q(X) = P(X + z_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k, \deg(Q) \geq 1$. Soit $m = \min\{k \in [|1; n|] / b_k \neq 0\}$
$\forall h \in \mathbb{C}, P(z_0 + h) = Q(h) = P(z_0) + b_m h^m + ... + b_n h^n = \rho_0 e^{i\theta_0} + b_m h^m (1 + \varepsilon(h))$
Soit $t > 0$, si $b_m = \rho e^{i\theta}$, posons $h(t) = t e^{i\alpha}$ avec α tel que $\arg(b_m h^m) \equiv \theta + m\alpha [2\pi] \equiv \theta_0 + \pi [2\pi]$
$h(t) = t \exp(i \frac{\theta_0 + \pi - \theta}{m}) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$
Comme $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(h(t)) = 0, \exists t_0 > 0 / |\varepsilon(h(t_0))| \leq \frac{1}{2}$
Il vient : $|P(z_0 + h(t_0))| \leq |P(z_0) + b_m h^m(t_0)| + \frac{1}{2}|b_m h^m(t_0)| \leq \rho_0 - \frac{1}{2}\rho t_0^m < \rho_0 = |P(z_0)|$, contradiction

Sous-espaces de dimension finie

> Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn et F un sev de E de dimension finie. Alors F est fermé dans $(E, ||.||)$

Preuve : Soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in E$. On dispose sur F de la norme $||.||_F$ qui coïncide sur F avec $||.||$. (x_n) est bornée pour $||.||_F$. Or d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans F : on peut extraire $(x_{\sigma(n)})$, qui converge vers $x' \in F$, pour $||.||_F$. Par unicité de la limite $x = x' \in F$

Théorème

> Soit E un $\mathbb{K}$-evn, F un sev de dimension finie , $x_0 \in E, \exists y \in F / ||x_0 - y|| = d(x, F)$

Preuve : $\begin{array}{cccc} f & : & F & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & ||x_0 - y|| \end{array}$ continue et vérifie :

$$\forall y \in F, f(y) \geq ||y|| - ||x_0|| \underset{||y|| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Un théorème précédent permet de conclure
⚠Il n'y a pas nécessairement unicité : $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty), F = Vect[(0,1)]$
$\forall y = (0, b) \in F, ||x_0 - y||_\infty = \max(1, |b|) \geq 1, \forall b \in [-1; 1], ||x_0 - (0, b)|| = 1$, donc $d(x_0, F) = 1$ est atteinte en tous les $(0, b), b \in [-1; 1]$
⚠Ce résultat est faux en dimension infinie, par exemple avec F hyperplan dense et $x_0 \notin F, d(x_0, F) = 0$. On peut même avoir F fermé et la distance à x_0 non atteinte

Remarque

En dimension finie la distance d'un point à un fermé est toujours atteinte. Soit en effet $\mathcal{F}$ fermé $\neq \emptyset, x_0 \in E$ (dimension finie). Soit $(y_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n \to +\infty} ||x_n - y_n|| = d(x, \mathcal{F}), (y_n)$ est bornée, on peut extraire une sous suite qui converge dans $\mathcal{F}$, de sorte que la distance soit atteinte

6.4.4 Théorème de Riesz (HP)

Énoncé

> Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn de dimension infinie. Alors $\overline{B(0,1)}$ et $S(0,1)$ ne sont pas compacte

Lemme

Soir $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn et F un sev fermé strict de E. Alors $\exists x \in E / ||x|| = 1$ et $d(x, F) \geq \frac{1}{2}$
Preuve : Soit $x_1 \in E \setminus F, d(x_1, F) > 0$, car si $d(x_1, F) = 0$ on aurait $x_1 \in \overline{F} = F$
$\exists y_1 \in F / d(x_0, F) \leq ||x_1 - y_1|| < 2d(x_1, F)$. On a $d(x_1 - y_1, F) = d(x_1, F)$, car
$\{||x_1 - y_1 - y|| / y \in F\} = \{||x_1 - y'|| / y' \in F\}$
$\begin{array}{cccc} : & F & \to & F \\ & y & \mapsto & y + y_1 \end{array}$ bijective . Posons $x = \frac{x_1 - y_1}{||x_1 - y_1||}$, $(x_1 \neq y_1$ car $x_1 \notin F)$
$||x|| = 1, d(x, F) = \frac{d(x_1 - y_1, F)}{||x_1 - y_1||}$. Généralement :$\forall \lambda > 0, \forall x \in E, d(\lambda x, F) = \lambda d(x, F)$, puisque $\{||\lambda x - y|| / y \in F\} = \{\lambda ||x - y'|| / y' \in F\}$

$$d(x, F) = \frac{d(x_1 - y_1, F)}{||x_1 - y_1||} = \frac{d(x_1, F)}{||x_1 - y_1||} > \frac{1}{2}$$

Démonstration

Soit $x_1 \in S(0,1), n \in \mathbb{N}^*$, supposons $(x_1; ...; x_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ définis tel que :

$$\forall i \neq j \in [|1; n|]^2, ||x_i - x_j|| \geq \frac{1}{2}$$

On applique le lemme à $F_n = Vect[(x_1; ...; x_n]$ sev de dimension finie donc fermé $\neq E$, d'après le lemme :
$\exists x_{n+1} \in S(0,1)/d(x_{n+1}, F_n) \geq \dfrac{1}{2}$
$\forall i \in [|1; n|], ||x_{n+1} - x_i|| \geq \dfrac{1}{2}$
On a construit $(x_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$, par récurrence $\forall n \neq m, ||x_n - x_m|| \geq \dfrac{1}{2}$
(x_n) ne possède donc pas de valeurs d'adhérence, $S(0,1)$ n'est pas compacte (ni $\overline{B(0,1)}$)

6.5 Séries dans un espace vectoriel normé

6.5.1 Définitions

Définition

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn, $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On dit que la série $\sum u_n$ converge dans $(E, ||.||)$ si et seulement si la suite (S_n) converge dans $(E, ||.||)$. Dans ce cas, on note :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n \text{ la somme totale}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Théorème

L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-evn et si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum \lambda u_n + v_n = \lambda \sum u_n + \sum v_n \text{ converge}$$

Critère de non convergence

$\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Espaces l^p

On définit pour $p \in [1; +\infty[$

$$l^p = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty\}$$

C'est l'ensemble des suites de puissances p-ième sommable

$$l^\infty = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ bornée } \}$$

$l^1 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\}$ ensemble des suites absolument convergentes (sommables)

l^2 ensemble des suites de carré sommables

Théorème

On définit sur l^p

$$||(u_n)||_p = (\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad ||(u_n)||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Alors $(l^p, ||.||_p)$ est un $\mathbb{C}$-evn

Preuve : confer Hölder et Minkowski. Notons que pour $p = 1$ ou ∞, c'est trivial. Pour $p = 2, (l^2, ||.||_2)$ est un espace préhilbertien

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Si $((u_n), (v_n)) \in l^2$ alors $(u_n v_n) \in l^2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2}$$

6.5.2 Cas de la dimension finie

Théorème

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $\sum u_n$ une série à termes dans E. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ||u_n|| < +\infty$, on dit que $\sum u_n$ converge absolument. On a alors :

$$\sum u_n \text{ converge }, ||\sum_{n=0}^{+\infty} u_n|| < \sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||$$

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_p)$ une base fixée de E et :

$$||\sum_{i=1}^{p} x_i e_i||_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$$

Comme $\dim E < +\infty, \exists \alpha > 0 / ||.||_\infty \leq \alpha ||.||$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||_\infty \leq \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n|| < +\infty$$

Soit pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{i=1}^{n} u_{n,i} e_i$. Comme $\forall i \in [|1; p|], |u_{n,i}| \leq ||u_n||_\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,i}| < +\infty \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,i} \text{ converge absolument}$$

donc converge. Ainsi $\sum u_n$ converge (car elle converge pour $||.||_\infty$). De plus ,

$$\forall N \in \mathbb{N}, ||\sum_{n=0}^{N} u_n|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||u_n||$$

et on peut passer à la limite

Familles sommables

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, I dénombrable et $(a_i) \in E^I$.
On dit (a_i) est sommable si et seulement si $\sum\limits_{i \in I} ||a_i|| < +\infty$

Théorème

Si $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_p)$ une base de E et si

$$\forall i \in I, a_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} e_k$$

(a_i) est sommable si et seulement si $\forall k \in [|1;p|], (a_{i,k})$ l'est, on définit alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^{p} (\sum_{i \in I} a_{i,k}) e_k$$

Preuve : (a_i) est sommable pour $||.||$ si et seulement si elle l'est pour $||.||_\infty$

Propriétés

1. Si (a_i) et (b_i) sont sommables, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda a_i + b_i)$ l'est et
$$\sum_{i \in I} \lambda a_i + b_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$
2. Si on a la partition : $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$
$$(a_i) \text{ est sommable } \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i \in I_k} a_i \text{ l'est} \\ ii) \sum_{k=0}^{+\infty} (\sum_{i \in I_k} ||a_i||) < +\infty \end{cases}$$
3. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$: $\sum_{i \in I} a_i$ est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}$ l'est. Dans ce cas on a égalité

Preuve : raisonner sur les coordonnées

Théorème de Fubini

Soit $(u_{n,p}) \in E^{\mathbb{N}^2}, \dim(E) < +\infty$

$$(u_{n,p}) \text{ est sommable } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p=0}^{+\infty} ||u_{n,p}||) < +\infty \text{ ou } \sum_{p=0}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} ||u_{n,p}||) < +\infty$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}) = \sum_{p=0}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p})$$

Produit de Cauchy

Soit $(\mathcal{A}, ||.||)$ une algèbre normée de dimension finie. Soit $\sum u_p$ et $\sum v_q$ deux séries absolument convergentes. Alors $(u_p v_q)$ est sommable et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{p+q=n} u_p v_q) \text{ converge absolument}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{p+q=n} u_p v_q) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = (\sum_{p=0}^{+\infty} u_p) \times (\sum_{q=0}^{+\infty} v_q)$$

Preuve : On utilise une partition de $\mathbb{N}^2$

6.5.3 Algèbre normée de dimension finie

Exponentielle

Soit $(\mathcal{A}, ||.||)$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Soit $a \in \mathcal{A}$, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \text{ converge absolument}$$

On a :

1. $\exp(0) = 1_{\mathcal{A}}$
2. a,b commutent $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\forall a \in \mathcal{A}, \exp(a) \in \mathcal{A}^{-1}, \exp(a)^{-1} = \exp(a)$

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, ||\frac{a^n}{n!}|| \leq \frac{||a||^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{||a||^n}{n!} < +\infty$

1. trivial
2. Si a et b commutent, formons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p+q=n} \frac{a^p}{p!} \times \frac{b^q}{q!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

Par produit de Cauchy pour des séries absolument convergente :

$$\exp(a+b) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \exp(a) \times \exp(b)$$

3. a et $-a$ commutent, en appliquant ce qui précède :

$$\exp(a) \times \exp(-a) = \exp(a-a) = \exp(0) = 1_{\mathcal{A}}$$

Cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $||.||$ une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$, on lui associe sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$|||M||| = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}} \frac{||MX||}{||X||}$$

c'est une norme d'algèbre. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qu'on décompose, $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente, vérifiant $DN = ND$. On a alors

$$\exp(A) = \exp(D) \times \exp(N)$$

Or, si $D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!} = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_1}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_n}{k!} \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \exp(D) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Notons plus généralement que si $A' = P^{-1}AP$ alors $\exp(A') = P\exp(A)P^{-1}$
Par ailleurs si $N^{r-1} \neq 0$ et $N^r = 0$ alors :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{r} \frac{N^k}{k!}$$

Dans la pratique pour calculer l'exponentielle d'une matrice, on la diagonalise, sinon on la trigonalise, puis on utilise la décomposition de Dunford

Déterminant

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\exp(A)) = \exp(tr(A))}$$

Preuve : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\det(\exp(A)) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} = \exp(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k) = e^{tr(A)}$$

Inverse de $1_{\mathcal{A}} - a$, $||a|| < 1$ (HP)

Soit $(\mathcal{A}, ||.||)$ une algèbre normée de dimension finie, $a \in \mathcal{A}/||a|| < 1$, alors $1_{\mathcal{A}} - a$ est inversible et

$$(1_{\mathcal{A}} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \text{ converge absolument}$$

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, ||a||^n \leq ||a||^n$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ||a^n|| < +\infty$$

$$(1_{\mathcal{A}} - a)(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a^n)(1_{\mathcal{A}} - a) = 1_{\mathcal{A}}$$

6.5.4 Utilisation de la densité de $GL_n(\mathbb{C})$

Théorème

$GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Preuve : $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est ouvert
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), Sp_{\mathbb{C}}(M)$ fini. $\{p \in \mathbb{N}/M - \frac{I_n}{p+1}$ est non inversible$\}$ est fini, donc :
$\exists p_0 \in \mathbb{N}/\forall p \geq p_0, M - \frac{1}{p+1}I_n$ est inversible. La suite $(M - \frac{I_n}{p+1}) \in (GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ et converge vers M

On notera qu'on a perturber quelque coefficients de la matrice, pour construire une suite donc certain coefficient tendent vers 0, pour obtenir la limite souhaitée : cette méthode est à retenir

Corollaire

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_{AB} = \chi_{BA}$

Preuve : si $A \in GL_n(\mathbb{C}), AB = A(BA)A_{-1}$. AB et BA sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique
Si $A \notin GL_n(\mathbb{C})$, soit $(A_p) \in GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}/\lim_{n \to +\infty} A_p = A, \lambda \in \mathbb{C}$ fixé
$\det(\lambda I_n - A_p B) = \det(\lambda I_n - BA_p)$
Par passage à la limite : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda) \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$

6.6 Convexité, connexité

6.6.1 Barycentres

Paramétrage d'un segment

$$z \in [x, y] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1]/z = tx + (1 - t)y$$

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1; ...; x_p) \in E^p$, $(\lambda_1; ...; \lambda_p) \in \mathbb{R}^p / \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$. On définit le barycentre du système de points pondérés $((x_1, \lambda_1); ...; (x_p, \lambda_p))$

$$\boxed{g = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i}$$

On note $g = bar((x_1, \lambda_1); ...; (x_p, \lambda_p))$. On note :

$$\mu = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i, \mu g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

En posant, $\forall i \in [|1; p|], t_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$, on a $\begin{cases} g = bar((x_1, t_1); ...; (x_p, t_p)) \\ \sum_{i=1}^{p} t_i = 1 \end{cases}$

Associativité du barycentre

Soit $(x_1; ...; x_p; x_{p+1}; ...; x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_1; ...; \lambda_p; \lambda_{p+1}; ...; \lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tel que :

$$\begin{cases} \mu_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0 \\ \mu_2 = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \neq 0 \end{cases}, \mu = \mu_1 + \mu_2 \neq 0$$

On a : $g_1 = bar((x_1, \lambda_1); ...; (x_p, \lambda_p))$ et $g_2 = bar((x_{p+1}, \lambda_{p+1}); ...; (x_n, \lambda_n))$
$g = bar((x_1, \lambda_1); ...; (x_n, \lambda_n)) = bar((g_1, \mu_1), (g_2, \mu_2))$

Preuve :

$$\frac{\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2}{\mu} = \frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu_1} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) + \frac{\mu_2}{\mu}\left(\frac{1}{\mu_2} \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Remarque

Par récurrence on a plus généralement soit I fini$= \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ partition de I.

$$(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I / \forall k \in [|1; n|], \mu_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i \neq 0 \text{ et } \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$$

Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ et $\forall k \in [|1; n|], g_k = bar((x_i, \lambda_i))_{i \in I_k}$ $bar(x_i, \lambda_i)_{i \in I} = bar(g_k, \mu_k)_{k \in [|1;n|]}$
On peut de proche en proche toujours se ramener à des barycentres de deux points

6.6.2 Convexité

Segment

Soit $(x;y) \in E^2$, on définit le segment :

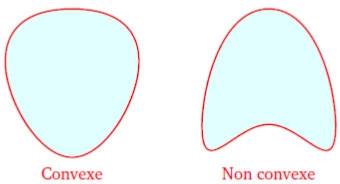
$$[x;y] = \{tx + (1-t)y / t \in [0;1]\} = \{bar((x,t_1),(y,t_2))/(t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^2, t_1 + t_2 = 1\}$$

Parties convexes

On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est convexe si et seulement si

$$\forall (x;y) \in \mathcal{C}^2, [x;y] \subset \mathcal{C}, \forall t \in [0;1], tx + (1-t)y \in \mathcal{C}$$

$\emptyset$ est convexe car on ne peut pas trouver de points mettant l'hypothèse en défaut



Exemples

1. Tout sous-espace vectoriel est convexe
2. Tout segment est convexe
3. Si $(E, ||.||)$ est un $\mathbb{R}$-evn, les boules ouvertes et les boules fermées sont convexes

Preuve :

1. trivial
2. Soit $(x;y) \in E^2$ et $(x_1,x_2) \in [x;y]^2$:$\exists (t_1,t_2) \in [0;1]^2 / \begin{cases} x_1 = t_1 x + (1-t_1)y \\ x_2 = t_2 x + (1-t_2)y \end{cases}$
   Soit $t \in [0;1], tx_1 + (1-t)x_2 = (tt_1 + (1-t)t_2)x + (t(1-t_1) + (1-t)(1-t_2)x_2 = t'x + (1-t')x_2$
   Découle de l'associativité du barycentre
3. Soit $a \in E, r \geq 0$(resp. $r > 0$). Soit $(x,y) \in \overline{B(a,r)}^2$ (resp. $B(a,r)^2$) et $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} ||a - (tx + (1-t)y)|| &= ||ta + (1-t)a - (tx + (1-t)y)|| \\ &= ||t(a-x) + (1-t)(a-y)|| \\ &\leq t||a-x|| + (1-t)||a-y|| \leq r \end{aligned}$$

   (resp. $< r$, car t ou $1 - t \neq 0$)

Intersection de parties convexes

Toute intersection de parties convexes est encore convexe

Preuve : Soit $(\mathcal{C}_i)$ une famille de parties convexes, $(x;y) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$ et $t \in [0;1]$.
$\forall i \in I, tx+(1-t)y \in \mathcal{C}_i$ convexe, donc $(tx+(1-t)y) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, φ une forme linéaire non nulle, $H = Ker(\varphi)$ hyperplan, on définit

$$\begin{aligned} H^+ &= \{x \in E/\varphi(x) \geq 0\} \\ H^- &= \{x \in E/\varphi(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

demi-espaces défini par H. Alors H^+ et H^- sont convexes

Preuve : $\forall (x,y) \in (H^+)^2$ (resp.$(H^-)^2$), $\forall t \in [0;1], \varphi(tx+(1-t)y) = t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y) \geq 0$ (resp. ≤ 0)

Enveloppe convexe

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $\mathcal{A}$ une partie de E, on définit l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ comme l'intersection de tous les convexes de E contenant $\mathcal{A}$, on la note $conv(\mathcal{A})$: c'est le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$. On a :

$$conv(\mathcal{A}) = \{bar((x_1,t_1);...;(x_p,t_p))/p \in \mathbb{N}^*(x_1;...;x_p) \in \mathcal{A}^p, (t_1;...;t_p) \in \mathbb{R}_+^p \text{ et } \sum_{i=1}^p t_i = 1\}$$

c'est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'un nombre fini de points de $\mathcal{A}$

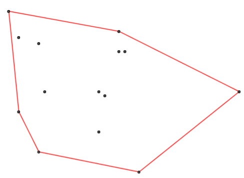


FIGURE 6.3 – Enveloppe convexe d'un ensemble de points

Preuve : notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{A}$.
Soit $\begin{cases} x = bar((x_1,t_1);...;(x_p,t_p)) \\ y = bar((y_1,s_1);...;(y_m,s_m)) \end{cases}$

$$(t_1;...;t_p) \in \mathbb{R}_+^p, \sum_{i=1}^p t_i = 1 \text{ et } (s_1;...;s_m) \in \mathbb{R}_+^m \sum_{i=1}^m s_i = 1$$

Soit $t \in [0;1]$,

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{p} t_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-t) s_j y_j = bar((x_1, t_1); ...; (x_p, t_p); (y_1, s_1); ...; (y_m, s_m)) \in \mathcal{B}$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^{p} t_i + \sum_{j=1}^{m} (1-t) s_j = 1$$

$\mathcal{B}$ est convexe et $\forall x \in \mathcal{A}, x = bar(x, 1) \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
Soit $\mathcal{C}$ partie convexe de E, contenant $\mathcal{A}$, tout barycentre d'un point ou de x de $\mathcal{A}$ affectés de coefficients positifs est dans $\mathcal{C}$ (car $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ convexe)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que tout barycentre de p points à coefficients positifs d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{C}$, soit $(x_1; ...; x_{p+1}) \in \mathcal{A}^{p+1}$ et $(t_1; ...; t_{p+1}) \in \mathbb{R}_+^p / \sum\limits_{i=1}^{p} t_i = 1$
si $t_{p+1} = 0, g = bar((x_1, t_1); ...; (x_{p+1}, t_{p+1})) = \sum\limits_{i=1}^{p} t_i x_i \in \mathcal{C}$, d'après (HR)
$t_{p+1} = 1, g = x_{p+1} \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$
$t_{p+1} \in]0, 1[, \sum\limits_{i=1}^{p} t_i = 1 - t_{n+1}$, par associativité du barycentre, en notant $g_1 = bar((x_1, t_1); ...; (x_p, t_p)) \in \mathcal{C}$, d'après (HR) :

$$g = bar((g_1, 1 - t_{p+1}), (x_{p+1}, t_{p+1})) \in \mathcal{C}$$

par convexité, d'où $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$

6.6.3 Fonctions convexes

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $\mathcal{C}$ une partie convexe de E. On dit que $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe si et seulement :

$$\forall (x; y) \in \mathcal{C}^2, \forall t \in [0;1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad (1)$$

Le graphe reste au-dessus de ses cordes, la partie située au dessus du graphe de la fonction est convexe.

f est strictement convexe $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in \mathcal{C}^2, \forall t \in]0;1[, f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$
$\Leftrightarrow$ f est convexe et on a égalité dans (1)
$\Leftrightarrow$ $x = y$ ou $t \in \{0;1\}$

Concavité

On dit que f est concave (resp. strictement concave) si et seulement si -f est convexe (resp. strictement convexe)

Exemples

1. Toute norme est convexe : en effet
$$\forall (x,y)\in E^2, \forall t\in[0;1], ||tx+(1-t)y||\leq t||x||+(1-t)||y||$$
2. Si $||.||$ est une norme euclidienne (notée $||.||_2$), si on a égalité : $tx=0$ ou $\exists\lambda\geq 0/(1-t)y=\lambda tx$. Si $t\in]0,1[$ et $x\neq 0$: $y=\frac{\lambda t}{1-t}\in\mathbb{R}_+x$ et réciproquement

Parties de convexes de $\mathbb{R}$

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$

Preuve : si $I=[a,b]$ ou $]a,b[$, c'est une boule pour $|.|$ (de centre $\frac{a+b}{2}$) donc convexe
si $I=\mathbb{R}$, I est convexe
si $I=[a;+\infty[$ (resp. $]a;+\infty[$) : $\forall(x,y,r)\in I^2\times[0;1], tx+(1-t)y\geq a$ (resp. $>a$)
De même si $I=]-\infty;a]$ ou $]-\infty;a[$
Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de $\mathbb{R}$ non vide. Soit $\begin{cases}\alpha=\inf(\mathcal{C})\\ \beta=\sup(\mathcal{C})\end{cases}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$
$\forall x\in\mathcal{C},\alpha\leq x\leq\beta$ et soit $x\in]\alpha;\beta[$, si $\exists(x_1,x_2)\in\mathcal{C}^2,\alpha\leq x_1<x<x_2\leq\beta$ et $x\in[x_1;x_2]\subset\mathcal{C}$, par convexité. Donc $]\alpha;\beta[\subset\mathcal{C}$, notons que α,β appartiennent ou non à $\mathcal{C}$
$$\mathcal{C}=[\alpha;\beta] \text{ ou }]\alpha;\beta] \text{ ou } [\alpha;\beta[\text{ ou }]\alpha;\beta[$$
C'est bien un intervalle

Fonction d'une variable réelle

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$, les propositions suivantes sont équivalentes :
1. f est convexe
2. $\forall(x,y,z)\in I^3, x<y<z, \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$
3. $\forall a\in I, \begin{array}{cccc}\tau_a & : & I\setminus\{a\} & \to & \mathbb{R}\\ & & t & \mapsto & \frac{f(t)-f(a)}{t-a}\end{array}$ est croissante

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) $x<y<z$, soit $t\in[0;1]/z=tx+(1-t)y$. On a $t=\frac{y-z}{y-x}$ et $1-t=\frac{z-x}{y-x}$
Si f est convexe, $f(z)\leq\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)=tf(x)+(1-t)f(y)$
$f(z)-f(x)\leq(1-t)(f(y)-f(x))$, d'où $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. Par ailleurs :
$$\begin{aligned}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z} &\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(y-z)\leq(y-x)(f(x)-f(z))\\ &\Leftrightarrow f(z)(y-x)\leq(y-x)f(y)+(y-z)(f(x)-f(y))\\ &\Leftrightarrow f(z)(y-x)\leq f(y)(z-x)+f(x)(y-z)\\ &\Leftrightarrow f(z)\leq\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\end{aligned}$$
qui est vrai

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $t_1 < t_2 \in (I \setminus \{a\})^2$ si $t_1 < t_2 < a$, on utilise (2) avec $x = t_1$ et $z = t_2, y = a$,

$$\tau_a(t_1) < \tau_a(t_2)$$

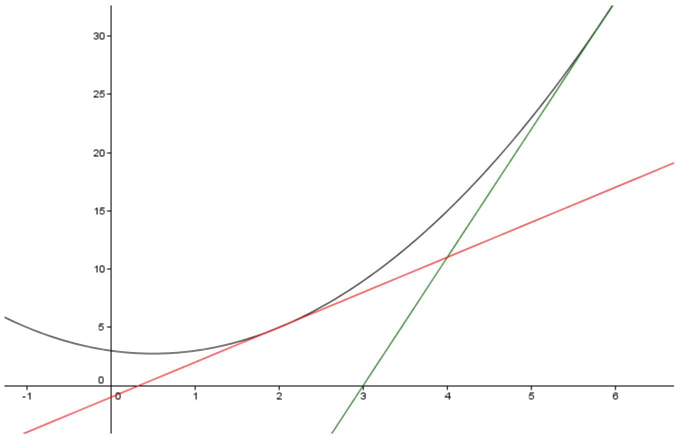
Si $t_1 < a < t_2$ alors on utilise (2) avec $x = t_1, z = a, y = t_2$
Si $a < t_1 < t_2$ alors on pose $x = a, y = t_2, z = t_1$. Dans tous les cas :

$$t_1 < t_2 \Rightarrow \tau_a(t_1) < \tau_a(t_2)$$

(3) $\Rightarrow$ (1) soit $x < y \in I^2, t \in]0;1]$. On pose :$a = tx + (1-t)y$. D'après (3) :

$$\begin{aligned}
\tau_a(x) \leq \tau_a(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \\
&\Leftrightarrow \quad (y-a)(f(a)-f(x)) \leq (a-x)(f(y)-f(a)) \\
&\Leftrightarrow \quad (y-x)f(a) \leq (y-a)f(x) + (a-x)f(y) \\
&\Leftrightarrow \quad f(a) = f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) = \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y)
\end{aligned}$$

f est convexe



Propriétés analytiques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, alors :

1. f admet en tout point $a \in I$ une dérivée à gauche $f'_g(a)$ et une dérivée à droite $f'_d(a)$
2. f est continue sur $\mathring{I}$
3. $\forall x < a < b < y \in I^4, \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$

Preuve :

1. Soit $a \in \mathring{I}, \tau_a$ étant croissante sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite à gauche et à droite en a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = \sup_{x<a}(\tau_a(x)) = f'_g(x) \leq f'_d(x) = \lim_{y \to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \inf_{y>a}(\tau_a(y))$$

2. f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathring{I}$, donc continue en a :

$$\forall x < a, f(x) = f(a) + (x-a)f'_g(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$

3. D'après le théorème de la limite monotone et le (1) :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$$

Remarque

f n'est pas nécessairement continue sur I ! $\begin{array}{cccc} f & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 0 \text{ si } x \in]0;1[\\ & & 0 & \mapsto & 1 \\ & & 1 & \mapsto & 1 \end{array}$ est convexe mais discontinue sur $[0;1]$

Caractérisation des fonctions dérivables

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable

f est convexe (resp. strictement) $\Leftrightarrow$ f' est croissante (resp. strictement)

Si de plus f est 2 fois dérivable :

f est convexe (resp. strictement) $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ (resp. > 0) sur I et $\{x \in I / f''(x) = 0\}$ est discret

Preuve : si f est convexe d'après un théorème précédent (resp. strictement) : $\forall a \leq b \in I^2, f'(a) \leq f'(b)$ (resp. $f'(a) < f'(b)$ car si $f'(a) = f'(b), \forall x \in [a;b], f'(x) = f'(a) = f'(b)$, f' constante donc f affine, absurde)
Réciproquement supposons f' croissante (resp. strictement), soit $x < a < y \in I^3$, d'après l'égalité des accroissements finis ,

$$\exists t_1 \in]x;a[/ \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = f'(t_1)$$

$$\exists t_2 \in]a;y[/ \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(t_2)$$

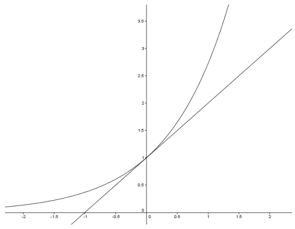
$t_1 < a < t_2$, d'où $f'(t_1) \leq f'(t_2)$ (resp. $f'(t_1) < f'(t_2)$, d'où $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ (resp.<)
Posons $t \in]0;1[$, en posant $a = tx + (1-t)y$, on obtient que f est convexe car :

$$f(a) = f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \text{ (resp. } <)$$

Enfin si f est 2 fois dérivable alors f' est croissante (resp. strictement) si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I (resp. f">0 et l'ensemble des points d'annulation est discret)

Exemples

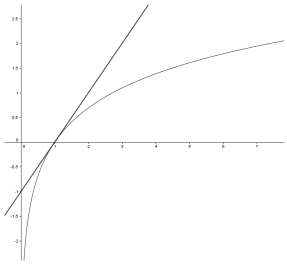
1. exp est convexe car $\exp'' = \exp > 0$



2. ln est convexe car $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ln''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$. Il vient :
$\forall t \in [0;1], \forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, t\ln(x) + (1-t)\ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$
exp et ln étant strictement croissante il vient l'inégalité de concavité de ln :

$$x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ avec égalité si $x = y$



Inégalité de Jensen

Soit f convexe (resp. strictement), $\mathcal{C}$ convexe $\subset E \to \mathbb{R}$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1; ...; x_p) \in \mathcal{C}^p, \forall (t_1; ...; t_p) \in \mathbb{R}_+^p / \sum_{i=1}^{p} t_i = 1$$

$$f(\sum_{i=1}^{p} t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{p} t_i f(x_i)$$

(resp. on a égalité si tous les x_i sont égaux ou $\exists i_0 \in [|1;p|], t_{i_0} = 1$)

Preuve : par récurrence sur p, vrai si $p = 1$ ou 2
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour $p \in \mathbb{N}^*$
Soit $(t_1; ...; t_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{p+1}$ et $(x_1; ...; x_{p+1}) \in \mathcal{C}^{p+1}, \sum_{i=1}^{p+1} t_i = 1$. Le résultat est vrai si $t_{p+1} = 0$ ou $t_{p+1} = 1$, d'après (HR). Si $t_{p+1} \in]0;1[$,

$$f(\sum_{i=1}^{p} t_i x_i) = f((1 - t_{p+1}) \sum_{i=1}^{p} t'_i x_i + t_{p+1} x_{p+1})$$

où, $\forall i \in [|1;p|], t'_i = \frac{t_i}{\sum\limits_{i=1}^{p} t_i} \geq 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{p} t'_i = 1$
Il vient par complexité et (HR) :

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i) &\leq (1 - t_{p+1}) f(\sum_{i=1}^{p} t'_i x_i) + t_{p+1} f(x_{p+1}) \\ &\leq (1 - t_{p+1}) \sum_{i=1}^{p} t'_i f(x_i) + t_{p+1} f(x_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} t_i f(x_i) \end{aligned}$$

Inégalité de convexité

Si f est convexe sur I alors elle est au-dessus de ses tangentes, ce qui se traduit lorsque f est dérivable,

$$\forall (x, a) \in I^2, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Inégalité de la moyenne

Soit $(x_1; ...; x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Avec égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n$

Preuve : stricte concavité de ln

$$\ln(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i) = \ln(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i})$$

On applique l'exponentielle

6.6.4 Inégalités de Hölder et Minkowski (HP)

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, (p,q) \in]1;+\infty[/\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Inégalité de Hölder

Soit $(x_1;...;x_n),(y_1;...;y_n) \in (\mathbb{C}^n)^2$ (resp. si $n=+\infty, (x_k),(y_k) \in l \times l^n$). On a :

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\cdot|y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}} = ||(x_1;...;x_n)||_p \times ||(y_1;...;y_n)||_q$$

Avec égalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{C}/(x_i^p)=\lambda(y_i^q)$ ou $(y_i)=0$

Preuve : Soit $x=(x_i)$ et $y=(y_i)$. Ce résultat est vrai si x ou y est nul. On les suppose dorénavant non nuls :
$x'=\frac{x}{||x||_p}$ et $y'=\frac{y}{||y||_q}$
$\forall i \in [|1;n|], x'_i=\frac{x_i}{||x||_p}$ et $y'_i=\frac{y_i}{||y||_q}$
On a $\forall i \in [|1;n|], |x'_i|\times|y'_i| = (|x'_i|^p)^{\frac{1}{p}}(|y'_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ avec $\begin{cases} \frac{1}{p},\frac{1}{q} \in]0;1[\\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{cases}$
Par concavité de ln : $|x'_i|\times|y'_i| \leq \frac{1}{p}|x'_i|^p+\frac{1}{q}|y'_i|^q$. En posant $t=\frac{1}{q}$ et $1-t=\frac{1}{p}$ et en sommant

$$\sum_{i=1}^n |x'_i||y'_i| \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n |x'_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n |y'_i|^q$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq ||x||_p||y||_q$$

avec égalité si et seulement si par stricte concavité du ln

$$\forall i \in [|1;n|], |x'^i|^p = |y'_i|^q \Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|], |x_i|^p = \frac{||x||_p^p}{||y||_q^q}|y_i|^q$$

Remarque

Pour $p=q=2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Notons que lorsque $n=+\infty$ si $x \in l^p$ et $y \in l^q$, on a

$$(x_k y_k) \in l^1 \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k y_k| \leq ||x||_p||y||_q < +\infty$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ du cas fini

Inégalité de Minkowski

Soit $((x_1;...;x_n),(y_1;...;y_n)) \in (\mathbb{C}^n)^2$ (resp. l^2). On a : $||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$

Preuve :

$$||x+y||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

D'après l'inégalité de Hölder :

$$||x+y||_p^p \leq (||x||_p + ||y||_p)(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{p-1})^q)^{\frac{1}{q}} \leq ||x||_p + ||y||_p \times ||x+y||_p^{\frac{p}{q}}$$

Or $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 2 \Rightarrow p+q = pq \Rightarrow pq - q = p$
Si $x+y=0$ c'est bon
Si $x+y \neq 0, ||x+y||_p = ||x+y||_p^{p-\frac{p}{q}} \leq ||x||_p + ||y||_p$
On a égalité si $x+y \neq 0$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ / \forall i \in [|1;n|], |y_i|^p = \lambda(|x_iy_i|^{p-1})^q, \exists \mu \in \mathbb{R}_+ / \forall i \in [|1;n|], |y_i|^p = \mu(|x_iy_i|^{p-1})^q$ et $\forall i \in [|1;n|], |x_i+y_i| = |x_i|+|y_i|$. Si et seulement si $y=0$ ou $\exists \alpha \geq 0 / \forall i \in [|1;n|], |x_i| = \alpha|y_i|$ et $|x_i+y_i| = |x_i|+|y_i|$ si et seulement si $y=0$ ou $\exists \alpha \geq 0 / x = \alpha y$

Remarque

On peut généraliser Hölder et Minkowski lorsque $p=1$ et $q=+\infty$

$$\lim_{q\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q)^{\frac{1}{q}} = \sup_{i\in[|1;n|]}|x_i| = ||x||_\infty$$

6.6.5 Connexité par arcs

Définition

1. Soit E un $\mathbb{K}$-evn, on appelle chemin toute application de $[a,b] \subset \mathbb{R} \to E$, $\gamma \ : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & E \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$ arc paramétré continu sur $[a,b]$
   Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que c'est un chemin fermé ou un lacet
2. On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ est connexe par arcs (cpa) si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathcal{A}^2, \exists \gamma : [0,1] \to \mathcal{A}$ continu tel que : $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Remarque

Soit $\gamma : [0;1] \to E$ continue $/\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$, on note $[\tilde{a;b}] = \begin{cases} [a;b] \text{ si } a<b \\ [b;a] \text{ si } b<a \end{cases}$ On peut définir $\gamma_1 \ : \begin{array}{ccc} [\tilde{a;b}] & \to & E \\ u & \mapsto & \gamma(\frac{u-a}{b-a}) \end{array}$ continue et vérifie $\gamma_1(a) = 0$ et $\gamma_1(b) = 1$. Et si $\gamma([0;1]) \subset \mathcal{A}$, on aussi $\gamma_1([\tilde{a;b}]) \subset \mathcal{A}$

Théorème

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$

Preuve : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, (x;y) \in I^2$. $\begin{array}{cccc} \gamma & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & tx+(1-t)y \end{array}$ est continue et I étant convexe, $\gamma([0;1]) \subset I$. Donc I est connexe par arcs.
Réciproquement : soit $\mathcal{A}$ une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Soit $x<y \in \mathcal{A}^2$ et $\begin{array}{cccc} \gamma & : & [0;1] & \to & \mathcal{A} \\ & & t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$ continue $/\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$. Soit $z \in]x;y[$, on peut définir :

$$t_0 = \sup\{t \in [0;1]/\gamma(t) < z\} = \sup(\mathcal{B})$$

$\mathcal{B} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{B}$. Il existe une suite $(t_n) \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}/\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0$ et γ continue donc $\gamma(t_0) \leq z$. Donc $t_0 \neq 1$ car $\gamma(1)=y>z$. Si $\gamma(t_0)<z$, par continuité $\exists t \in]t_0;1[/\gamma(t)<z$, ce qui contredit la définition de t_0. Donc $\gamma(t_0)=z$. Ainsi $z \in \mathcal{A}$, qui est convexe, c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$

Parties étoilées

On dit qu'une partie $\mathcal{A} \subset E$ est étoilée par rapport à $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{A}, [x_0;x] \subset \mathcal{A}$. On a :

1. Si $\mathcal{A}$ est convexe non vide elle est étoilée par rapport à chacun de ses points
2. Si $\mathcal{A}$ est étoilée par rapport à x_0 elle est connexe par arcs

Preuve :

1. oui
2. Si $\mathcal{A}$ est étoilée par rapport à x_0, soit $(x;y) \in \mathcal{A}^2$, on peut définir :
$$\begin{array}{ccccc} \gamma & : & [0;1] & \to & \mathcal{A} \\ & & t & \mapsto & x+t(x_0-x) \text{ si } t \in [0;\frac{1}{2}] \\ & & & \mapsto & 2x_0-y+2t(y-x_0) \text{ si } t \in [\frac{1}{2};1] \end{array} \quad \text{continue}$$

Remarque

S'il existe $x_0 \in \mathcal{A}/\forall x \in \mathcal{A}, \exists \gamma : [0;1] \to \mathcal{A}$ continue $/\gamma(0)=x_0$ et $\gamma(1)=x$ pour $(x;y) \in \mathcal{A}^2$, on peut former $\begin{cases} \gamma_1 : [0;\frac{1}{2}] \to \mathcal{A} \\ \gamma_2 : [\frac{1}{2};1] \to \mathcal{A} \end{cases}$ continues tel que :
$\gamma_1(0)=x, \gamma_1(\frac{1}{2})=x_0, \gamma_2(\frac{1}{2})=x_0, \gamma_2(1)=y$
Alors soit $\begin{array}{ccccc} \gamma & : & [0;1] & \to & \mathcal{A} \\ & & t & \mapsto & \gamma_1(t) \text{ si } t \leq \frac{1}{2} \\ & & & \mapsto & \gamma_2(t) \text{ si } t > \frac{1}{2} \end{array}$ continue et $\gamma(0)=x, \gamma(1)=y$, donc $\mathcal{A}$ est connexe par arcs

Exemples

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ est connexe par arcs. En effet, soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$, si $(0;0) \notin [x;y]$ alors $[x;y] \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. Si $(0;0) \in [x;y]$, soit $z \notin (xy) : (0;0) \notin [x;z], (0;0) \notin [z;y]$. On relie x et y en passant par z
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x;0)/x \leq 0\}$ est connexe par arcs, car étoilé par rapport à $(1;0)$
3. Les boules sont connexes par arcs ainsi que les sphères en dimension supérieure supérieure ou égale à 2. En effet les boules sont convexes, soit par ailleurs E de dim ≥ 2 et soit $(x;y) \in S(0;1)$. Si $0 \notin [x;y]$: on forme $\begin{array}{ccccc} \gamma & : & [0;1] & \rightarrow & S(0;1) \\ & & t & \mapsto & \frac{x+t(y-x)}{||x+t(y-x)||} \end{array}$ continue avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Si $0 \in [x;y] : \exists t \in [0;1]/tx + (1-t)y = 0$. Il vient $t||x|| = (1-t)||y||$, donc $t = \frac{1}{2}, y = -x$. Comme $\dim(E) \geq 2, \exists z \in S(0;1) \setminus \{x;-x\}$ et on relie x à y en passant par z
4. Si $\dim \geq 2, E \setminus B(0;1)$ est connexe par arcs. Soit en effet $(x;y) \in (E \setminus \overline{B(0;1)})^2, ||x|| > 1$ et $||y|| > 1$. Comme $S(0;||x||)$ est connexe par arcs, on relie x à $y\frac{||x||}{||y||}$ sur cette sphère, puis ce point à y sur le segment correspondant
5. $GL_n(\mathbb{R})^+ = \{M \in GL_n(\mathbb{R})/ \det(M) > 0\}$ est connexe par arcs. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})^+$, on peut écrire $M = \prod M_i$ où chaque (M_i) est une transvection ou dilatation $D_n(\det(A))$. On forme si $M_{i_0} = D_n(\det(M))$ et si $\forall k \neq i_0, M_k = T_{i_k,j_k}(\lambda_k)(i_k \neq j_k)$
   $\begin{array}{ccccc} \gamma_{i_0} & : & [0;1] & \rightarrow & GL_n(\mathbb{R})^+ \\ & & t & \mapsto & D_n(t\det(M) + (1-t)) \end{array}$
   $\forall k \neq i_0, \begin{array}{ccccc} \gamma_k & : & [0;1] & \rightarrow & GL_n(\mathbb{R})^+ \\ & & t & \mapsto & T_{i_k,j_k}(t\lambda_k) \end{array}$
   $\begin{array}{ccccc} \gamma = \gamma_1...\gamma_r & : & [0;1] & \rightarrow & GL_n(\mathbb{R})^+ \\ & & t & \mapsto & \gamma_1(t)...\gamma_r(t) \end{array}$ continue et vérifie $\gamma(0) = I_n, \gamma(1) = M$

Théorèmes des valeurs intermédiaires

Soit $\mathcal{A} \subset E$ connexe par arcs et $f : \mathcal{A} \rightarrow F$ continue alors $f(\mathcal{A})$ est connexe par arcs. L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs

Preuve : soit $(y_1;y_2) \in f(\mathcal{A})^2, \exists (x_1;x_2) \in \mathcal{A}^2/f(x_i) = y_i, \forall i \in [|1;2|], \exists \gamma : [0;1] \rightarrow \mathcal{A}$ continu. $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Alors $f \circ \gamma : [0;1] \rightarrow f(\mathcal{A})$ continu et $(f \circ \gamma)(1) = y_2$

Corollaire : cas réel

Soit $\mathcal{A}$ connexe par arcs $\subset E$ et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $(a,b) \in f(\mathcal{A})^2$ alors $\forall c \in [\widetilde{a;b}], c \in f(\mathcal{A})$

Preuve : $f(\mathcal{A})$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle

Remarque

On utilise fréquemment ce corollaire pour monter que des parties ne sont pas connexes par arcs

Exemples

1. Soit E un $\mathbb{R}$-evn et H un hyperplan fermé, soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ continue telle que $H = Ker(\varphi)$. Soit $x_0 \notin H, \varphi(x_0)\varphi(-x_0) < 0$. Si $E \setminus H$ était connexe par arcs alors $\varepsilon(E \setminus H) \subset \mathbb{R}^*$ le serait aussi et $(\varphi(x_0); \varphi(-x_0))$ sont de signes opposés, impossible
2. $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs, $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs et det est continue

Composantes connexes par arcs

Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un evn E. On définit sur $\mathcal{A}$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\gamma : [0;1] \to \mathcal{A} \text{ continu } / \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalences sont appelées les composantes connexes par arcs de $\mathcal{A}$ (elles forment une partition de $\mathcal{A}$)

Exemples

1. Les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
2. Les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n(\mathbb{R})^+$ et $GL_n(\mathbb{R})^-$. En effet ces parties sont connexes par arcs, elles forment une partition de $GL_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas connexe par arcs

Application

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall i \in [|1;n|]$,

$$a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

C'est une matrice à diagonale strictement dominante à coefficients diagonaux positifs. On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices à diagonales strictement dominante. Soit $(A;B) \in \mathcal{A}^2, t \in [0;1], \forall i \in [|1;n|]$

$$\sum_{j \neq i} |ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j}| \leq \sum_{j \neq i} t|a_{i,j}| + (1-t)|b_{i,j}| < ta_{i,i} + (1-t)b_{i,i}$$

$tA + (1-t)B \in \mathcal{A}$ qui est convexe donc connexe par arcs. On a vu que $\det(A) \subset \mathbb{R}^*$ (résoudre AX=0, jouer sur l'encadrement de chaque coefficient et conclure), d'après le TVI $\det(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et $I_n \in \mathcal{A}$, donc $\forall A \in \mathcal{A}, \det(A) > 0$

Remarque

Si $\mathcal{A}$ est connexe par arcs et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est continue, $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ est incluse dans une des composantes connexes par arcs de $\mathcal{B}$

⚠L'intersection de connexes par arcs n'est pas toujours connexes par arcs!!!

Notion de connexe (HP)

Généralement, on dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de E est connexe si et seulement si les suites de parties de $\mathcal{A}$ à la fois ouverte et fermées dans $\mathcal{A}$ sont $\emptyset$ et $\mathcal{A}$

Théorème (HP)

E est connexe. Soit en effet $\mathcal{B} \subset E$ ouverte et fermée. Si $\mathcal{B} \neq \emptyset$, soit $x_0 \in \mathcal{B}$ et $y \in E$
Soit $t_0 = \sup\{t \in [0;1]/ty + (1-t)x \in \mathcal{B}\} = \sup \mathcal{D}$. $\exists (t_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}^*} / \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0$ et $\mathcal{B}$ étant fermée, $t_0y+(1-t_0)x_0 = z_0 \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ étant ouverte, si $t_0 < 1, \exists \alpha > 0/\forall t \in [t_0;\alpha], ty+(1-t)x_0 \in \mathcal{B}$, ce qui contredit la définition de t_0. Donc $t_0 = 1, y \in \mathcal{B}, \mathcal{B} = E$

6.7 Compléments (HP)

6.7.1 Semi-continuité inférieure du rang

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r, alors

$$\exists V \in \mathcal{V}(\mathcal{A})/\forall M \in V, rg(M) \geq r$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_p = A, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, rg(A_n) \geq n$

Preuve : par définition, il existe une sous-matrice carrée de rang r extraite de A, notons la $A_r = (a_{i,j})$. Or l'application : $\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & & M & \mapsto & \det(M) \end{array}$ est continue. $f(A) \neq 0$, par continuité :$\exists V \in \mathcal{V}(A)/\forall m \in V, f(A) \neq 0$, donc $rg(A) \geq r$
⚠On peut avoir $rg(A) > r$ cf $A = 0$

Application

Si $(A_p) \in \mathcal{S}_A^{\mathbb{N}}$ converge vers A', notons pour $\lambda \in \mathbb{C}, n(\lambda) = n - rg(A - \lambda I_n)$ et $n_{A'}(\lambda) = n - rg(A - \lambda I_n) = n_{A_p}(\lambda)$
On a par semi-continuité inférieure du rang : $n_{A'}(\lambda) \geq n_A(\lambda)$. Si A est diagonalisable :

$$n = \sum_{\lambda \in Sp(A)} n_A(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in Sp(A)} n_{A'}(\lambda) \leq n$$

donc $\forall \lambda Sp(A), n_{A'}(\lambda) = n_A(\lambda)$, A' est diagonalisable

6.7.2 Résultant

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X], \mathbb{K}$ corps commutatif, $\deg(P) = n, \deg(Q) = m$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$

L'application $\begin{array}{cccc} \varphi & : & E = \mathbb{K}_{n-1}[X] \times \mathbb{K}_{m-1}[X] & \to & \mathbb{K}_{n+m-1}[X] \\ & & (A,B) & \mapsto & BP+AQ \end{array}$ est linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda(A,B)+(A',B')) & = & \varphi((\lambda A+A', \lambda B+B')) \\ & = & (\lambda B+B')P+(\lambda A+A')Q \\ & = & \lambda(BP+AQ)+(B'P+A'Q) \\ & = & \lambda\varphi((A,B))+\varphi((A',B')) \end{array}$$

φ est bijective si et seulement si $P \wedge Q = 1$. Si φ est bijective alors 1 admet un antécédent par φ :

$$\exists (A,B) \in E^2 / \varphi(A,B) = 1 \Leftrightarrow BP+AQ = 1$$

D'après le théorème de Bézout, $P \wedge Q = 1$. Réciproquement si φ n'est pas bijective alors elle n'est pas injective : $\exists (A,B) \in E \setminus \{(0,0)\}, \varphi(A,B) = PB+AQ = 0, P \wedge Q = 1, Q|PB \Rightarrow Q|B$, d'après le théorème de Gauss
$\deg(B) \leq m-1$ et $\deg(Q) = m \Rightarrow \deg(B) = -\infty, B = 0 \Rightarrow A = 0$, contradiction, on a le résultat par passage à la contraposée
On pose $\mathcal{B}_1 = ((1,0);(X,0);...;(X^{n-1},0);(0,1);...;(0,X^{n-1}))$ et $\mathcal{B}_2$ est la base canonique de $\mathbb{K}_{n+m-1}[X]$

$$mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ b_m & \cdots & b_0 & a_n & \cdots & a_0 \\ 0 \quad b_m & & \vdots & 0 \quad \ddots & 0 & 0 \\ 0 \quad 0 & \ddots & \vdots & \vdots \quad 0 & \ddots & 0 \\ 0 \quad 0 & & b_m & 0 \quad 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$\det(mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\varphi)) = R(P,Q)$, résultante $R(P,Q) \neq 0 \Leftrightarrow P \wedge Q = 1$
On pose : $E_n = \{$ P unitaire, $\deg(P) = n$, scindé à racines simples sur $\mathbb{K}\}$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}, P \in E_n \Leftrightarrow P \wedge P' = 1 \Leftrightarrow R(P,P') \neq 0$
$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C} \\ & & P & \mapsto & R(P,Q) \end{array}$ est continue, $E_n = \psi^{-1}(\mathbb{C}^*)$, donc E_n est un ouvert
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme infini. Soit $P_0 \in E_n, P_0 = a_n(X-\lambda_1)...(X-\lambda_n), \lambda_1 < ... < \lambda_n$. Au voisinage de chaque λ_i, P_0 change de signe, soit $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < ... < \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1}, \forall i \in [|1;n|], P_0(\mu_i)P_0(\mu_{i+1}) < 0$. Pour $i \in [|1;n|], \mu_i$ et μ_{i+1} étant fixés, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\mu_i)P(\mu_{i+1}) \end{array}$ est continue, donc il existe $r > 0/||P_0 - P|| < r \Rightarrow \forall i \in [|1;n|], P(\mu_i)P(\mu_{i+1}) < 0, P$ s'annule une fois sur chaque intervalle $]\mu_i;\mu_{i+1}[$ et $\deg(P) \leq n$, donc P possède n racines distinctes. On a même, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0/||P_0 - P||_\infty \leq \alpha$ alors les racines de P sont de la forme $\nu_1 < ... < \nu_n$ où $\forall i \in [|1;n|], |\nu_i - \lambda_i| \leq \varepsilon$, choisir $\forall i \in [|1;n|]\mu_i = \lambda_i - \varepsilon, \mu_{i+1} = \lambda_{i+1}\varepsilon$. On a continuité des racines dans le cas réel, donc E_n est encore ouvert sur $\mathbb{R}$

⚠$X^2+\frac{1}{n}$ est scindé $X^2+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X^2$
Dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on pose Δ_n l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{K}$ à n valeurs propres :

$$A\in\Delta_n \Leftrightarrow \chi_A\in E_n \Leftrightarrow R[\chi_A,\chi_A']\neq 0$$

$A\to(\chi_A,\chi_{A'})$ est continue, Δ_n est ouvert

6.7.3 Continuité des racines

Soit un polynôme

$$P_0(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k=\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)\in\mathbb{C}[X] \text{ unitaire}$$

scindé à racines simples. On munit $\mathbb{C}_n[X]$ de la norme infinie. Soit

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k=\prod_{j=1}^{n}(X-\mu_j) \text{ unitaire}$$

Pour $\varepsilon>0$ fixé, soit $i\in[|1;n|]$, supposons $\forall j\in[|1;n|],|\lambda_i-\mu_j|\geq\varepsilon$, alors :

$$\begin{aligned}|P(\lambda_i)| &= |\prod_{j=1}^{n}(\lambda_i-\mu_j)|\geq\varepsilon^n\\ &= |(P-P_0)(\lambda_i)|\\ &= |\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)\lambda_i^k| \underset{P\to P_0}{\longrightarrow} 0\\ &\leq ||P-P_0||_\infty\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda_i|^k\end{aligned}$$

$\exists\alpha>0/||P-P_0||_\infty\leq\alpha\Rightarrow\forall i\in[|1;n|],|(P-P_0)(\lambda_i)|\leq\frac{\varepsilon^n}{2}$ et d'après ce qui précède, $\forall i\in[|1;n|],\exists j\in[|1;n|],|\lambda_i-\mu_j|\leq\varepsilon$. Si de plus on s'impose $\varepsilon<\dfrac{1}{2}\min_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|$ alors $\forall i_1\neq i_2,\overline{B(\lambda_{i_1},\varepsilon)}\cap\overline{B(\lambda_{i_2},\varepsilon)}=\emptyset$
$\forall k\in\mathbb{N},\exists\sigma(k)\in[|1;n|]/|\lambda_k-\mu_{\sigma(k)}|\leq\varepsilon$. On a n disques disjoints, σ est bijective et P possède n racines distinctes

6.7.4 Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Matrices trigonalisables

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Soit P scindé sur $\mathbb{R}$,

$$P(X)=\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)$$

Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$,

$$|P(z)|=|\prod_{j=1}^{n}(a+ib-\lambda_j)|=\prod_{j=1}^{n}|a-\lambda_j+ib|\geq\prod_{j=1}^{n}|b|\geq|Im(z)|^n$$

Supposons $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |Im(z)|^n$. Soit λ racine de P, $0 \geq |Im(\lambda)|^n, \lambda \in \mathbb{R}$
On pose $S_n = \{P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n, scindé sur $\mathbb{R}\}$. L'application qui à un polynôme associe son coefficient dominant est continue. Soit $(P_k) \in \mathbb{R}_n[X]^{\mathbb{N}}$, supposons qu'elle converge vers $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall k \in \mathbb{N}, |P_k(z)| \geq |Im(z)|^n$, par continuité du module, $|P(z)| \geq |Im(z)|^n$, donc P est scindé sur $\mathbb{R}$
Soit $(M_k) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \forall k \in \mathbb{N}, M_k$ trigonalisable converge vers M
$\forall k \in \mathbb{N}, \chi_{M_k}$ est scindé $\chi : M \mapsto \chi_M$ est continue, donc χ_M est scindé car $M = \lim\limits_{k \to +\infty} M_k \Rightarrow \chi_M = \lim\limits_{k \to +\infty} \chi_{M_k}$, donc l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé, ce qui n'est pas le cas pour celui des matrices diagonalisables

Matrices stochastiques

$A = (a_{i,j})$ est une matrice stochastique si et seulement si $\forall (i,j) \in [|1;n|]^2$ et

$$\forall i \in [|1;n|] \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

On a alors $\forall \lambda \in Sp(A), |\lambda| \leq 1$. De plus si $AX = X$ alors avec les notations précédentes, $J = [|1;n|]$:

$$\forall j \in J, x_j = x_{i_0}, X = x_{i_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

car on a toujours $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à la valeur propre 1 pour une matrice stochastique
Soit une suite de variables aléatoires qui prennent un nombre fini de valeurs dans $[|1;n|]$. On dit qu'il s'agit d'un processus stochastique si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [|1;n|]^2, \forall p \in \mathbb{N}, P_{X_p=j}(X_{p+1} = i) = p_{i,j}$$

est indépendant de p. Ce processus ne tient compte à l'étape $p+1$ uniquement des états à l'étape p, d'après le formule des probabilités totales :

$$\forall i \in [|1;n|], \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = 1$$

$A = (p_{i,j})$ est stochastique et ${}^tA$ est encore stochastique. On note dès lors $p_{i,j}^{(m)}$ la probabilité $P_{X_0=j}(X_m = i)$

$$p_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} P_{X_m=k}(X_{m+1} = i) \times P_{X_0=j}(X_m = k) = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} p_{k,j}$$

Généralement, (A^m) ne converge pas, par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A^2 = I_2, A^{2m+1} = A$ et $A^{2m} = I_2$

Par contre

$$(\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} A^k)$$

converge. En effet si A et B sont stochastiques, $A \times B$ l'est : les coefficients de AB sont positifs et vérifient :

$$AB\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

Il vient que A^k est stochastique, donc les coefficients de A^k sont dans $[0;1]$
De plus, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$\begin{cases}\forall x \in E, (u(x)^k) \text{ est bornée}\\ E = Im(u-id) \oplus Ker(u-id)\\ (\frac{1}{m+1}\sum\limits_{k=0}^{m} u^k(x)) \text{ converge vers le projecteur sur } Ker(u-id)//Im(u-id)\end{cases}$$

$\forall x \in E, (\frac{1}{m+1}\sum\limits_{k=0}^{m} u^k(x))(u-id)(x) = \frac{u^{m+1}(x)-x}{m+1} \underset{m\to 0}{\longrightarrow} 0$
$y \in Ker(u-id) \cap Im(u-id), \exists x \in E/y = (u-id)(x)$ et $u(y) = y$:

$$(\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} u^k)(y) = y = (\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} u^k)(u-id)(x) \longrightarrow 0$$

donc $y = 0$, on a :
$\begin{cases}Im(u-id) \oplus Ker(u-id)\\ \dim(Im(u-id)) + \dim(Ker(u-id)) = m\end{cases} \Rightarrow E = Im(u-id) \oplus Ker(u-id)$
Soit $x \in E, x = x_1 + y_1$ avec $x_1 \in Ker(u-id)$ et $y_1 = (u-id)(x_2) \in Im(u-id)$. Il vient :

$$(\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} u^k)(x) = x_1 + \frac{u^{m+1}(x_2)-x_2}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} x_1$$

Remarque Soient $f, g : \mathcal{A} \subset E \to F$ continues telle que : $\exists \mathcal{B}$ dense dans $\mathcal{A}, f_{\mathcal{B}} = g_{\mathcal{B}}$
$\forall a \in \mathcal{A}, \exists (b_n) \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}/ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}, f(b_n) = g(b_n)$ par continuité, $f(x) = g(x)$ et $f = g$.
Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales

Suites de matrices de limite diagonalisable

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose que (M^p) est bornée :

$$\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M), |\lambda| \leq 1, |\lambda| = 1 \Rightarrow m(\lambda) = n(\lambda)$$

Preuve : on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme triple d'algèbre :

$$|||M||| = \sup_{||X||=1} \frac{||MX||}{||X||}$$

$$\begin{aligned}\exists X \in \mathbb{C}^n, MX = \lambda X &\Rightarrow M\frac{X}{||X||} = \lambda\frac{X}{||X||}, X' = \frac{X}{||X||}, ||X'|| = 1\\ &\Rightarrow MX' = \lambda X'\\ &\Rightarrow M^pX' = \lambda^p X'\end{aligned}$$

$||M^pX'|| = |\lambda^p| \leq |||M|||^p$, donc $|\lambda| \leq 1$
Si $|\lambda| = 1$: $n(\lambda) \leq m(\lambda), \chi_M = (X-\lambda)^{m(\lambda)}Q(X), Q(\lambda) \neq 0$

$$\mathbb{C}^n = Ker(u - \lambda id) \oplus Ker(Q(u))$$

(u^p) est bornée donc $(u^p_{|F})$ l'est aussi. On trigonalise $u_{|F} = \lambda id_E + n$ avec n nilpotent, $r = \nu(n)$

$$(u_{|F})^p = (\lambda id_E + n)^p = \sum_{k=0}^{r-1}\binom{p}{k} n^k\lambda^{p-k}id_E$$

En trigonalisant n, si il est non nul alors la première diagonale non nulle de sa matrice représentative est la k-ième, alors les (n^j) ne sont pas bornés, donc $n = 0$, d'où $n(\lambda) = m(\lambda)$

Corollaire : Si $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et (M^p) est bornée alors M est diagonalisable :

$$\forall\lambda \neq 0 \in Sp_{\mathbb{C}}(M), |\lambda| \leq 1, \tfrac{1}{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(M^{-1}) \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \text{ et } |\tfrac{1}{\lambda}| \leq 1 \text{ donc } |\lambda| = 1$$

D'après ce qui précède, il n'y a pas de composante nilpotente dans la décomposition de Dunford, donc la matrice est diagonalisable

Théorème de Perron-Frobenius

Soit A une matrice stochastique, on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A. $\forall p \in \mathbb{N}, A^p$ est stochastique à coefficients dans $[0;1]$, donc bornée, d'après le théorème précédent, $|\lambda| \leq 1$
$|\lambda| = 1$, alors

$$|x_{j_0}| = |\lambda|\cdot|x_{j_0}| = \sum_{i=1}^n a_{i,j}|x_i| \leq \sum_{i=1}^n a_{i,j}|x_{j_0}|, x_{j_0} = \max_{i\in[|1;n|]} x_i$$

d'où, $\forall i \in [|1;n|], |x_i| = |x_{j_0}|$

$$|\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_i| = \sum_{i=1}^n a_{i,j}|x_i|, X = x_{j_0}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \lambda = x_{j_0} = 1$$

$\dim(Ker(u - id)) = 1$ car ${}^tAX = X \Rightarrow X \in Vect[\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

Le sous-espace propre est égal ou sous-espace caractéristique, $1 = n(1) = m(1)$, en trigonalisant :

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & & \cdots & & 0 & & \\ & \lambda_1 & * & * & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & * & 0 & & 0 & \\ & 0 & 0 & \lambda_r & & & & \\ \vdots & & 0 & & \ddots & & 0 & \\ & & & & & \lambda_r & * & * \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 & \ddots & * \\ & & & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}P$$

Sur chaque sous-espace propre / caractéristique, $u_{|F} = \lambda id + n$

$$u_{|F}^p = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} n^k \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement : $A^r \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

Chapitre 7

Fonction d'une variable réelle

Sommaire

7.1 Dérivation

7.1.1 Définition

Définition

Soit dans tout le chapitre I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : I \to E$ et $t_0 \in I$, on dit que f est dérivable (resp. à droite, à gauche) en t_0 si et seulement si $\begin{array}{cccc} \tau_{t_0} & : & I \setminus \{t_0\} & \to & E \\ & & t & \mapsto & \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \end{array}$ admet une limite (resp. à droite, à gauche) en t_0 :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \in E$$

f est dérivable en $t_0 \in \mathring{I}$ si et seulement si elle l'est à droite et à gauche :

$$f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$$

On dit que f est dérivable sur I si et seulement si elle l'est en tout point de I. On note alors : $\begin{array}{cccc} f' & : & I & \to & E \\ & & t & \mapsto & f'(t) \end{array}$. On la note également parfois $\frac{df}{dt}$ ou $D(f)$, on évitera cependant les notations $\frac{df}{dt}(t)$ et $\frac{df(t)}{dt}$

Propriétés, théorèmes généraux

1. f est dérivable en $t_0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon : I \backslash \{t_0\} \to E / \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0, f(t_0+h) = f(t_0) + hf'(t_0) + h\varepsilon(h)$
f admet un $dl_1(t_0)$ si et seulement si elle dérivable en t_0
2. Si f est dérivable en t_0 (resp. sur I) alors elle y est continue. La réciproque est fausse (cf $|.|$ en 0)
3. Si f et g sont dérivables en t_0 (resp. sur I), $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\lambda f + g$ l'est et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$. Si de plus E est une algèbre normée alors $f \times g$ l'est et $(fg)' = f'g + fg'$
4. Si $g : J \subset \mathbb{R} \to I$ est dérivable en u_0 et f en $t_0 = g(u_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en u_0 et $(f \circ g)'(u_0) = g'(u_0) f'(g(u_0))$
5. Si $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ est bijective , dérivable en t_0, $f'(t_0) \neq 0$ et si f^{-1} est continue en $u_0 = t_0$ alors f^{-1} est dérivable en u_0 et
$$(f^{-1})'(u_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(u_0)}$$
6. Soit $E_1 \times ... \times E_p$ p $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, $\begin{array}{cccc} \Phi & : & I & \to & E \\ & & (x_1; ...; x_p) & \mapsto & \Phi(x_1; ...; x_p) \end{array}$ p-linéaire. Soit $i \in [|1;p|], f_i : I \to E$ dérivable en t_0 alors $\begin{array}{cccc} \psi & : & I & \to & E \\ & & t & \mapsto & \Psi(f_1(t); ...; f_p(t)) \end{array}$ est dérivable en t_0 et
$$\psi(t_0) = \sum_{i=1}^{p} \Phi(f_1(t_0); ...; f'_i(t_0); ...; f_p(t_0))$$

Remarque

Soit φ une application p-linéaire en dimension finie alors elle est continue

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si f est dérivable en t_0, $u \circ f$ l'est et :

$$(u \circ f)'(t_0) = u(f'(t_0))$$

Preuve : utiliser un dl_1 de f et la linéarité de u

Dérivation dans une base

Soit $(e_1; ...; e_n)$ une base de E, si $\forall t \in I, f_i : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$$

f est dérivable en t_0 si et seulement si $\forall i \in [|1;n|], f_i$ l'est. Alors :

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t)e_i$$

Dérivée du déterminant

Soit $\mathcal{B}$ une base de $E, \forall i \in [|1;n|], f_i : I \to E$ dérivable en t_0, alors $t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t); ...; f_n(t))$ l'est et

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1(t); ...; f_n(t))' = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(f_1(t_0); ...; f_i'(t_0); ...; f_p(t_0))$$

7.1.2 Dérivées d'ordre supérieures

Définition

Soit $f : I \to E$, on définit par récurrence :

1. $f^{(0)} = f$, si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est dérivable alors f est dite $n+1$ fois dérivable sur I et
$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$
2. On dit que f est n fois dérivable ne $t_0 \in I$ si et seulement si f est $n-1$ fois dérivable sur I et $f^{(n-1)}$ est dérivable en t_0
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est } n \text{ dérivable sur } I \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } I \end{cases}$

   On dit sue f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est $\mathcal{C}^n$ si et seulement si f est n fois dérivable à dérivée continue sur I

Remarque

$$\begin{aligned} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall k \in [|0;n|], f^{(k)} \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [|0;n|], f^{(k)} \text{ est de classe } \mathcal{C}^{n-k} \end{aligned}$$

On a alors $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$

⚠Une fonction peut-être dérivable sur I sans que sa dérivée soit continue, on étudie la fonction :

$$\begin{array}{cccc} f' & : & I & \rightarrow & E \\ & & t & \mapsto & f'(t) \end{array}$$

On a montré dans le cours de MPSI qu'elle est n fois dérivable (TGD) mais pas $\mathcal{C}^n$

⚠f est dérivable en $t_0 \Leftrightarrow f$ admet un $dl_1(t_0)$

f est dérivable n fois $\Rightarrow f$ admet un $dl_n(t_0)$, d'après la formule de Taylor-Young. La réciproque est fausse pour $n \geq 2$: on pose $f(x) = x^{n+1}\sin(\frac{1}{x^{n+1}})$ et $f(0) = 0$

$f(x) = 0 + o(x^n)$ admet un $dl_n(0)$ mais n'est pas dérivable 2 fois car f' n'est pas continue en 0

Formule de Leibniz

> Soit $\mathcal{B} : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ bilinéaire, avec E_1, E_2, E $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, $f : I \rightarrow E_1$ et $g : I \rightarrow E_2$ n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n$) alors $\mathcal{B}(f,g)$ l'est et :
>
> $$\mathcal{B}(f,g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

Preuve : par récurrence sur n

Théorème généraux de la classe

> 1. Soit E une algèbre normée de dimension finie. Si f et $g : I \rightarrow E$ sont n fois dérivables (resp. $\mathcal{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) sur I alors $f \times g$ l'est ainsi que $\lambda f + g$
> 2. Soit $f : I \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow I$ n fois dérivables (resp. $\mathcal{C}^n$), alors $f \circ g$ l'est aussi
> 3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ qui ne s'annule pas sur I. Si f est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n$) alors $\frac{1}{f}$ l'est

Preuve : cf cours de MPSI

7.1.3 $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

Définition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On dit que $f : I \to J$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si et seulement si :

1. f est $\mathcal{C}^k$
2. f est bijective
3. f^{-1} est $\mathcal{C}^k$

Théorème de caractérisation

Soit $f : I \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^k (k \geq 1)$. Si $\forall t \in I, f'(t) \neq 0$ alors f induit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $I \to J = f(I)$

Preuve : f' continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, donc y reste de signe constant : f est strictement monotone donc injective. D'après le théorème des bijections, f induit une bijection de $I \to f(I) = J$ intervalle, alors $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone et $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle, donc f^{-1} est continue. On sait alors que f^{-1} est dérivable : on montre alors par récurrence que f^{-1} est bien de classe $\mathcal{C}^k$

Exemples

1. tan définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]-\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$
2. sin définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]-\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[\to]-1;1[$ et un homéomorphisme de $[-\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}] \to [-1;1]$
3. On a $\forall x \in]-1;1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\arcsin''(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}'} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{1-x^2}\arcsin'(x) \qquad (1)$$

Par récurrence triviale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / \forall x \in]-1;1[, \arcsin^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

avec $P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + 2x(n-\frac{1}{2})P_n(x)$
d'où, $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (2n-1)XP_n \qquad (2)$
Ces polynômes sont égaux car ils coïncident sur $[-1;1]$ infini. Par ailleurs d'après (1) : $(1-x^2)\arcsin''(x) = x\arcsin'(x)$. D'après la formule de Leibniz,

$\forall x \in]-1;1[, (1-x^2)\arcsin^{(n+2)}(x) - 2nx\arcsin^{(n+1)}(x) - n(n+1)\arcsin^{(n)}(x) = x\arcsin^{(n+1)}(x) + n\arcsin^{(n)}(x)$

$$P_{n+2} = (2n+1)XP_{n+1} + n^2(1-X^2)P_n \qquad (3)$$

On obtient une équation différentielle en fonction de P_n, ce qui permet d'en déduire directement ses coefficients. De plus par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1[, \arcsin^{(n)} \geq 0$$

7.1.4 Fonctions $\mathcal{C}^k$ par morceaux

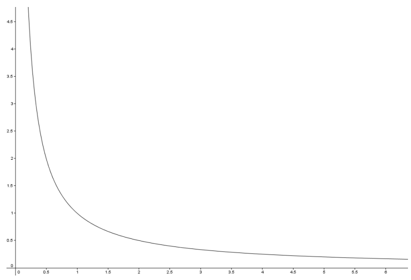
Définition

1. Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}(a < b)$. On appelle subdivision de $[a;b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b)$
   On note $\Sigma([a;b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a;b]$. Pour $\sigma \in \Sigma([a;b])^2$, on définit le pas de σ
   $$\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq p-1}(a_{i+1} - a_i) > 0$$
   Soit $(\sigma, \sigma') \in \Sigma([a;b])^2$ on dit que σ' est plus fine que σ si et seulement si $\sigma \subset \sigma'$
2. On dit que $f : [a;b] \to E$, $\mathbb{R}$-evn est $\mathcal{C}^k$ par morceaux (noté $\mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}$) sur $[a;b]$ si et seulement si $\exists \sigma = (a_0; ...; a_p) \in \Sigma([a;b])/$
   (a) f admet une limite à droite (resp. à gauche) $f(a^+)$ (resp. $f(b^-)$) en a (resp. en b)
   (b) $\forall i \in [|1; p-1|], f$ admet une limite à droite et à gauche $f(a_i^-$ et $f(a_i^+)$ en a_i
   (c) $\forall i \in [|0; p-1|]$, $\begin{array}{cccc} \tilde{f}_i & : & [a_i; a_{i+1}] & \to & E \\ & & t & \mapsto & f(t) \text{ si } t \in]a_i; a_{i+1}[\\ & & a_i & \mapsto & f(a_i^+) \\ & & a_{i+1} & \mapsto & f(a_{i+1}^-) \end{array}$ est $\mathcal{C}^k$

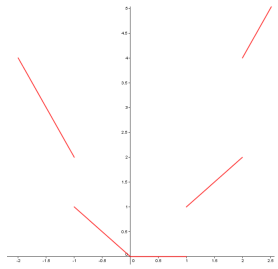
   On dit que σ est adaptée à f (toute subdivision plus fine que σ l'est aussi)
3. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est $\mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}$ sur I si elle l'est sur chaque $[a;b] \subset I$

Exemples

1. $\begin{array}{ccccc} f & : &]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ continue, comme $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, on ne peut pas prolonger f en une fonction continue par morceaux sur $[0;1]$



2. $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & xE(\frac{1}{x}) \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. $\forall [a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\mathcal{A} = \{k \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{k} \in [a;b]\}$.
   On forme $\sigma = (a_0 = a; \frac{1}{\max(\mathcal{A})}; ...; \frac{1}{\min(\mathcal{A})}; b)$ adaptée à f. Notons que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, mais f n'est pas prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0;1]$ car elle est y admet une infinité de discontinuités



3. On dit que $f : [a;b] \to E$ est en escalier sur $[a;b]$ si et seulement si elle admet une subdivision adaptée $\sigma = (a_0; ...; a_p) \in \Sigma([a;b]) / \forall i \in [|0; p-1|], f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ est constante. Les fonctions en escaliers sont $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux
4. On dit que $f : I \to E$ est en escalier sur I si et seulement si $\exists [a;b] \subset I / f$ est en escalier sur $[a;b]$ et $f = 0$ sur $I \setminus \{[a;b]\}$
5. Les fonctions affines par morceaux continues sont sont $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux

Régularité

On dit que f fonction continue par morceaux : $[a;b] \to E$ est régulière si et seulement si :

$$\forall x \in]a;b[, f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

avec $f(a) = f(a^+)$ et $f(b) = f(b^-)$
Lorsque f est $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$, on défini f' par $f'(a) = f'_d(a)$ et $f'(b) = f'_g(b)$. $\forall x \in]a;b[, f'(x) = \frac{f'_g(x)+f'_d(x)}{2}$. Si f est $\mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}$, f ainsi définie est $\mathcal{C}^{k+}_{\mathcal{M}}$

Théorèmes généraux

1. Toutes combinaison linéaire, produit de fonctions $\mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}$ l'est encore. L'ensemble $\mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}([a;b], E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
2. Toute fonction continue par morceaux sur un segment y est borné (les bornes ne sont pas forcement atteintes !)

Exemple

$$\begin{array}{rccc} f : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \\ & 1 & \mapsto & 0 \end{array}$$ est continue par morceaux mais les bornes ne sont pas toutes atteintes

7.2 Théorème des accroissements finis

7.2.1 Le théorème

Inégalité des accroissements finis

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie. Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b, f : [a;b] \to E$, telle que :

1. f est continue sur $[a;b]$
2. f est $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$ et $\exists M \geq 0 / \forall x \in [a;b], ||f'(x)|| \leq M$

alors,

$$||f(a) - f(b)|| \leq M|b-a|$$

Preuve : on reprend la démonstration de MPSI en remplaçant la valeur absolue par la norme

⚠Si $\dim E \geq 2$, on n'a plus égalité des accroissements fini ni théorème de Rolle. $\begin{array}{ccccc} f & : & [0;2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & e^{it} \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$, $\forall t \in [0;2\pi], f'(t) = ie^{it} \neq 0$, mais $f(0) = f(2\pi) = 1$

Corollaire

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to E, \mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$ et continue :

1. Soit $k \geq 0, f$ est k-lipschitzienne sur I si et seulement si $\forall x \in I$ en lequel f est dérivable $||f'(x)|| \leq k$
2. f est constante sur I si et seulement si en tout point de dérivabilité de $f' = 0$

Preuve :

1. Si f est k-lipschitzienne : $\forall t_0 \in I, \forall h \in \mathbb{R}^*/t_0 + h_i n I$, $||\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}|| \leq k$ donc quand $h \longrightarrow 0^+$ et 0^- : $||f'_g(t_0)|| \leq k$ et $||f'_d(t_0)|| \leq k$
   Réciproquement si $\forall t \in I, ||f'(t)|| \leq k$, d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall (a,b) \in I^2$ avec $a < b$: $||f(b) - f(a)|| \leq k(b-a)$
2. f est constante si et seulement si elle est 0-lipschitzienne

7.2.2 Complétude, suites de Cauchy (HP)

Suites de Cauchy

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn. On dit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, ||u_n - u_m|| \leq \varepsilon$$

Cette propriété est interne dans la suite

Théorèmes

1. Toute suite convergente est de Cauchy
2. Toute suite de Cauchy est bornée
3. Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence λ alors elle converge vers λ
4. Un espace est dit complet lorsque toute suite de Cauchy converge dans cet espace

Preuve :

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow ||u_n - l|| \leq \varepsilon$
   Alors, $\forall n \geq N, \forall m \geq N, ||u_n - u_m|| \leq ||u_n - l|| + ||u_m - l|| \leq \varepsilon$
2. Si (u_n) est de Cauchy, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \forall m \geq N_1, ||u_n - u_m|| \leq 1$. En particulier $\forall n \geq N_1, ||u_n - u_m|| \leq 1$, d'où $||u_n|| \leq ||u_{N_1}|| + 1$
   $$\forall n \in \mathbb{N}, ||u_n|| \leq \max(||u_0||, ..., ||u_{N_1}||, ||u_{N_1}|| + 1)$$
3. Si $\lim_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = \lambda$ et si (u_n) est de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$
   $$\exists N_1 \in \mathbb{N}/\forall n \geq N_1, ||u_n - u_m|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   $$\exists N_2 \in \mathbb{N}/\forall n \geq N_2, ||u_{\sigma(n)} - \lambda|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Alors $\forall n \geq \max(N_1, N_2), ||u_n - \lambda|| \leq ||u_n - u_{\sigma(n)}|| + ||u_{\sigma(n)} - \lambda|| \leq \varepsilon$

⚠Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse !Dans $(\mathbb{R}[X], ||.||_\infty)$, soit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k+1} \Rightarrow P_m - P_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{X^k}{k+1} \Rightarrow ||P_m - P_n|| = \frac{1}{n+2}$$

Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n+2} \leq \varepsilon$ et si $n \geq N$ et $m \geq N, ||P_n - P_m||_\infty \leq \varepsilon$

$$(P_n) \text{ est de Cauchy}$$

Supposons que (P_n) converge, vers $P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq k_0$

$$|\frac{1}{k_0+1} - a_{k_0}| \leq ||P_n - P||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $a_{k_0} = \frac{1}{k_0+1}$, impossible car $\{k \in \mathbb{N}/a_k \neq 0\}$ est fini

Espaces de Banach, complétude

On dit que $(E, ||.||)$ est un espace de Banach ou complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans E converge

Exemples

1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets
2. Tout $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimension finie est complet
3. Les espaces l^p sont complets
   Preuve : si (u_n) est de Cauchy dans $(E, ||.||)$ de dimension finie, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une valeur d'adhérence λ, d'après ce qui précède, elle converge vers λ

⚠$\mathbb{Q}$ n'est pas complet : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers $e \notin \mathbb{Q}$. Pour faire de l'analyse on se place toujours dans un espace complet

Critère de Cauchy

Soit $(E, ||.||)$ un espace complet et $(E_1, ||.||_1)$ un $\mathbb{K}$-evn. $f : \mathcal{A} \subset E \to F$ et $a \in \mathcal{A}$. On dit que f vérifie les critères de Cauchy au voisinage de a si et seulement si :

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, ||x - a||_E \leq \alpha$
2. $||y - a||_E \leq \alpha \Rightarrow ||f(a) - f(y)|| \leq \varepsilon$

Si c'est le cas, f admet une limite finie en a

Preuve : soit $(a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ associé par le critère de Cauchy : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, ||a_n - a||_E \leq \alpha$ alors $\forall n \geq N, \forall m \geq N, ||f(a_n) - f(a_m)|| \leq \varepsilon$ et $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy dans $(F, ||.||)$ elle converge. On sait qu'alors f admet une limite finie en a

7.2.3 Théorème de prolongement de la dérivée

Prolongement d'une fonction lipschitzienne au voisinage d'un point

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie (donc complet), soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f :]a; b] \to E$, k-lipschitzienne. Alors f admet une limite finie en a^+

Preuve : soit $\varepsilon > 0$, si $(x; y) \in]a; a + \frac{\varepsilon}{k+1}]^2, |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{k+1}$ et $||f(x) - f(y)|| \leq k\frac{\varepsilon}{k+1} \leq \varepsilon$, f vérifie le critère de Cauchy au voisinage de a donc admet une limite finie en ce point. De même sur $[c; a[$

Corollaire

Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f :]a; b] \to E$. On suppose que f est $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$ sur $]a; b]$ et continue telle que : $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l \in E$, alors :

1. f admet une limite finie en a, $f(a^+)$
2. $$\begin{array}{rcrcl} \tilde{f} & : & [a; b] & \to & E \\ & & a & \mapsto & f(a^+) \\ & & x & \mapsto & f(x) \text{ sinon} \end{array}$$ est dérivable en a
3. $\tilde{f}'_d(a) = l$

Preuve :

1. f' admet une limite finie en a, donc elle est bornée au voisinage de a

$$\exists k \geq 0, \exists c \in]a;b]/\forall x \in]a;c], ||f'(x)|| \leq k$$

f est alors k-lipschitzienne sur $]a;c]$, le théorème précédent permet de conclure

2. Soit $\varepsilon > 0$: $\exists \alpha > 0/$ si $x \in]a;a+\alpha], ||f'(x) - l|| \leq \varepsilon$. Soit alors $y \in]a;a+\alpha]$ fixé et $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \widetilde{[x;y]} & \to & E \\ & & t & \mapsto & f(t)-f(y)-(t-y)l \end{array}$ $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$ continue.

$\forall y \in \widetilde{[x;y]}, ||\varphi'(t)|| = ||f'(t) - l|| \leq \varepsilon$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq \varepsilon|x-y| \Rightarrow ||f(x) - f(y) - l(x-y)|| \leq \varepsilon|x-y|$$

Pour x fixé, lorsque $y \longrightarrow a^+, ||f(x) - f(a^+) - l(x-a)|| \leq \varepsilon|x-a| \Rightarrow ||\frac{f(x)-f(a^+)}{x-a} - l|| \leq \varepsilon$
Ainsi $\tilde{f}$ est dérivable à droite en a et $\tilde{f}'_d(a) = l$

Prolongement de la dérivée

> Soit $f : [a;b] \to E$ (evn de dimension finie), telle que :
> 1. f est continue sur $[a;b]$
> 2. $f \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}(]a;b], E)$ et $\exists l = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x) \in E$
>
> Alors f est dérivable en a à droite et $f'_d(a) = l$

Preuve : on peut appliquer le corollaire avec $\tilde{f} = f$. Ce résultat est aussi vrai à gauche sur $[c;a]$

⚠La continuité en a est essentielle ! !

$\begin{array}{ccccc} f & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & 0 & \mapsto & 1 \\ & & x & \mapsto & 0 \text{ si } x \neq 0 \end{array}$ $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$ sur $[0;1]$ et $\forall x \neq 0, f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, mais f n'est pas dérivable à droite en 0^+ (car non continue à droite en 0)

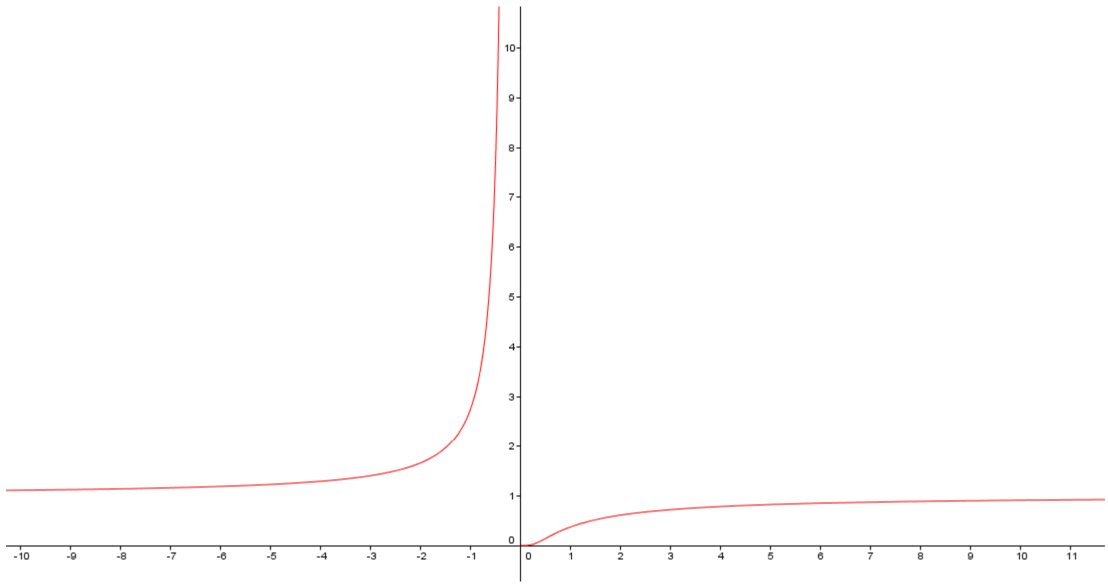
Exemples

1. $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ & & x & \mapsto & 0 \text{ si } x \leq 0 \end{array}$

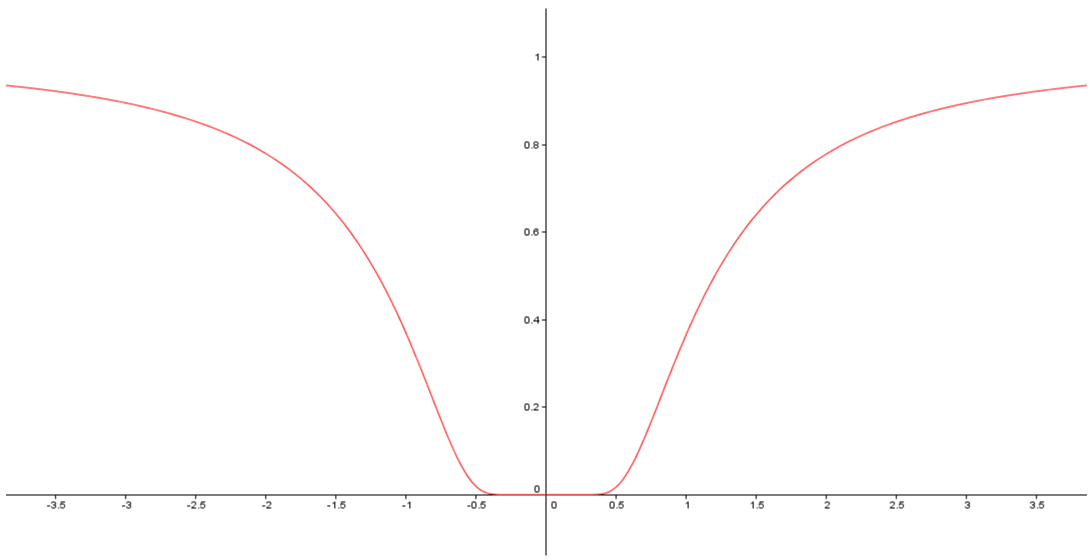
   D'après les théorèmes généraux de la classe, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ est continue

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-2x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$$

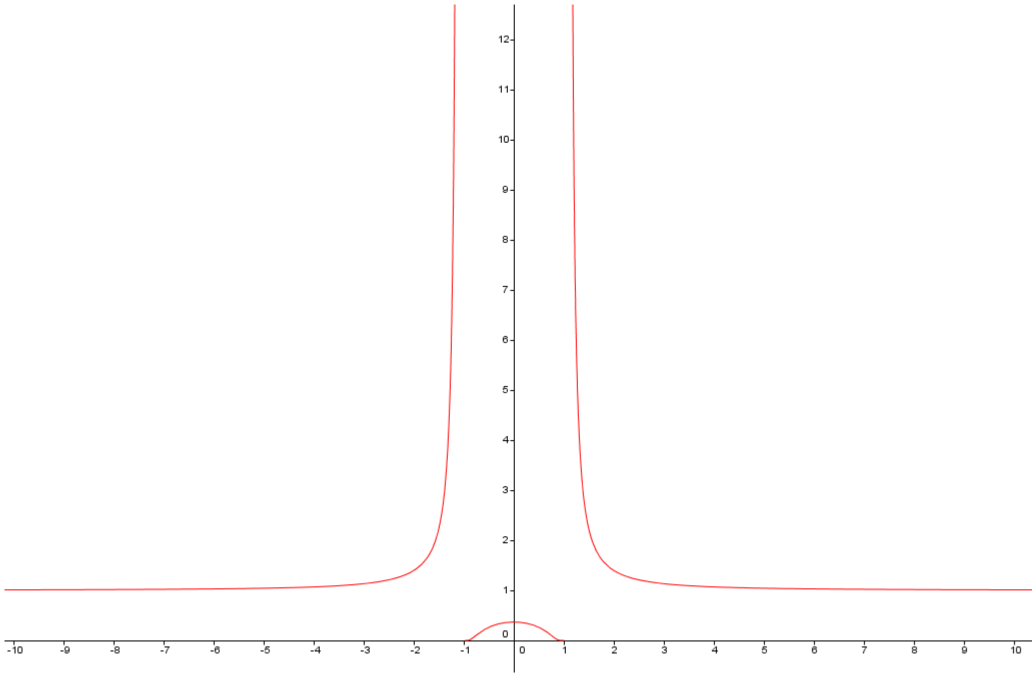
   Par récurrence triviale : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X]/\forall x > 0 : f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$
   $\forall x < 0, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. En appliquant par récurrence le théorème de prolongement de la dérivée, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}, f^{(n)}(0) = 0, f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$



2. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ & & 0 & \mapsto & 0 \end{array}$ De même, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. Notons que $\forall x \neq f(x) > 0$. De manière générale, on ne peut pas raccorder un polynôme à cette fonction : il serait $\mathcal{C}^n$ mais pas $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n = \deg P$



3. $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \exp(-\frac{1}{(1-x)(1+x)}) = \exp(-\frac{1}{1-x^2}) \text{ si } x \in]-1;1[\\ & & x & \mapsto & 0 \text{ si } |x| \geq 1 \end{array}$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$



4. $$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 0 \text{ si } x \leq 0 \\ & & x & \mapsto & 1 \text{ si } x \geq 1 \\ & & x & \mapsto & a\int\limits_0^x \exp(-\frac{1}{t(1-t)})dt \text{ si } x \in]0;1[\end{array}$$

avec $a = \dfrac{1}{\int\limits_0^1 \exp(-\frac{1}{t(1-t)})dt} > 0$

7.2.4 Formules de Taylor

Taylor-Young

Soit $f : I \to E, t_0 \in I, f$ est n fois dérivable en t_0. On a :

$$\forall (x,a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Remarque

C'est un résultat local, il indique le comportement de f au voisinage de a

Taylor avec reste intégral

Soit $f : [a\tilde{;}b] \to E$. On la suppose $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{n+1}_{\mathcal{M}}$ sur $[a\tilde{;}b]$. On a :

$$\forall (x,a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to E$ $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{n+1}_{\mathcal{M}}$. On pose

$$M_{n+1} = \sup_{t \in [a;b]} ||f^{(n+1)}(t)||$$

$$\forall (x,a) \in I^2, ||f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)|| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque

La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont des résultats globaux à l'inverse de Taylor-Young qui est locale. L'inégalité de Taylor-Lagrange généralise l'inégalité des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable

$$\exists (a,b) \in I^2, f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a;b[, f'(c) = 0$$

Égalité des accroissements finis

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable $]a;b[$, alors

$$\exists c \in]a;b[, f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Égalité de Taylor Lagrange (HP)

Soi $f \in \mathcal{C}^n([a\tilde{;}b], \mathbb{R}), \exists c \in]a\tilde{;}b[/$

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Preuve :

$$f(b)-f(a)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k=\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt=R_n$$

Notons $m_n=\min\limits_{t\in[a;b]}(f^{(n)}(t))$ et $M_n=\max\limits_{t\in[a;b]}(f^{(n)}(t))$

$$m_n\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt=m_n\frac{(b-a)^n}{n!}\leq R_n\leq M_n\frac{(b-a)^n}{n!}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a le résultat car $f^{(n)}$ est $\mathcal{C}^1$

7.3 Arcs paramétrés

7.3.1 Définition

Définition

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, $\begin{array}{cccc}\gamma & : & I & \to & E\\ & & t & \mapsto & \gamma(t)\end{array}$ $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}$

On dit que γ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ (ou $\gamma(I)\subset E$)

Arcs équivalents

On dit que 2 arcs $\mathcal{C}^k,\gamma_1$ et γ_2 sont $\mathcal{C}^k$ équivalents si et seulement si $\exists\varphi:J\to I,\mathcal{C}^k$-difféomorphisme tel que $\gamma_2=\gamma_1\circ\varphi$. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$. Si $E=\mathbb{R}^n$, on note :

$$\gamma(t)=(x_1(t);...;x_n(t)),x_i:I\to\mathbb{R},\mathcal{C}^k$$

Considérations cinématique

Traditionnellement, on considère que $\gamma(t)\in E$ en tant qu'espace affine et les dérivées successives d'ordre supérieur ou égal à 1 comme des vecteurs

Exemples

1. $\begin{array}{cccc}\gamma_1 & : & [0;2\pi[& \to & \mathbb{R}^2\\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\end{array}$ arc paramétré du cercle
2. $\begin{array}{cccc}\gamma_2 & : &]0;2\pi] & \to & \mathbb{R}^2\\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix}\cos(t)=\cos(2\pi-t)\\ -\sin(t)=\sin(2\pi-t)\end{pmatrix}\end{array}$ γ_1 et γ_2 sont équivalents
3. Ils ne sont pas équivalents à $\begin{array}{cccc}\gamma_3 & : & [0;2\pi[& \to & \mathbb{R}^2\\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}\end{array}$ car $\gamma_3(0)=\gamma_3(\pi)$, on aurait $\gamma_1(\psi(0))=\gamma_1(\psi(\pi))$, mais γ_1 injective et ψ bijective : absurde

On retiendra que deux arcs sont équivalents lorsqu'ils décrivent le même courbe en passant par les mêmes points le même nombre de fois

Graphe

On dit $\begin{array}{cccc} \gamma & : & I & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$ est un graphe si et seulement si $\exists i \in [|1;n|]/\forall t \in I, x_i(t) = t$

Tangente

Soit $\gamma : I \to E$ un arc $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, soit $t_0 \in I$. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*/f^{(n)}(t_0) \neq 0$, on définit $p = \min\{n \in \mathbb{N}^*/f^{(n)}(t_0) \neq 0\}$. La formule de Taylor-Young fournit alors :

$$f(t_0+h) = f(t_0) + \frac{h^p}{p!}(f^{(p)}(t_0) + \varepsilon(h)) \Rightarrow f(t_0+h) - f(t_0) \sim_{h\to 0} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(t_0)$$

La droite passant par les points $f(t_0)$ et $f(t_0+h)$ se rapproche de la droite passant par $f(t_0)$ de vecteur directeur, $f^{(p)}(t_0)$ appelée tangente à l'arc au point $f(t_0)$ (notée $\tau_{f(t_0)}$)

Points réguliers

On dit que f présente un point régulier en $f(t_0)$ si et seulement si $f(t_0) \neq 0 (p=1)$. La tangente en $f(t_0)$ est alors orientée par $f'(t_0)$. On dit que l'arc est régulier si et seulement si $\forall t \in I, f'(t) \neq 0$. Si $f'(t_0) = 0$, on dit que f présente un point stationnaire en t_0

Théorème

Soient $f : I \to E$ et $g : J \to E$ deux arcs $\mathcal{C}^k$ équivalents. Soit $\begin{array}{ccccc} \varphi & : & J & \to & I \\ & & u & \mapsto & \varphi(u) = t \end{array}$ $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, tel que $g = f \circ \varphi$. Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in J/\varphi(u_0) = t$, donc $f(t_0) = g(u_0)$. S'il existe $p = \min\{n \geq 1/f^{(n)}(t_0) \neq 0$ et $g^{(n)}(t_0) \neq 0\}$ et $g^{(p)}(u_0)$ est colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$. La tangente à f en $f(t_0)$ est celle à g en $g(t_0) = f(t_0)$. La tangente est donc une notion géométrique indépendante du paramétrage et non cinématique

Preuve : par récurrence sur p
$p = 1$: si $f'(t_0) \neq 0$: $g'(u_0 = \varphi'(u_0) \times f'(t_0) \neq 0$ et ils sont colinéaires
hérédité : si le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $p-1$
Supposons $p = \min\{n \in \mathbb{N}^*/f^{(n)}(t_0) \neq 0\}$. On a $f'(t_0) = ... = f^{(p-1)}(t_0)$, donc par hypothèse de récurrence : $g'(u_0) = ... = g'^{(p-2)}(u_0) = 0$ et $g^{(p-1)}(u_0)$ est colinéaire à $f^{(p-1)}(t_0) = 0$. On vérifie alors par récurrence que $g^{(p)}(u_0) = \varphi^{(p)}(u_0) \times f^{(p)}(t_0)$

7.3.2 Étude locale d'un arc plan

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2, \mathcal{C}^k$, soit $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe $p = \min\{n \in \mathbb{N}^* / f^{(n)}(t_0) \neq 0\}, q = \min\{m \geq p+1 / f^{(n)}(t_0)$ est non colinéaire à $f^{(p)}(t_0)\}$. La formule de Taylor-Young fournit :

$$f(t_0+h) = f(t_0) + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t_0) + \ldots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + h^q \varepsilon(h)$$

Dans le repère affine de $\mathbb{R}^2, \mathcal{R}_0 = (f(t_0); f^{(p)}(t_0); f^{(q)}(t_0))$, les coordonnées de $f(t_0+h)$, s'écrivent :

$$f(t_0+h) = \begin{pmatrix} x(t_0+h) = \frac{h^p}{p!} + o(h^p) \\ y(t_0+h) = \frac{h^q}{q!} + o(h^q) \end{pmatrix}$$

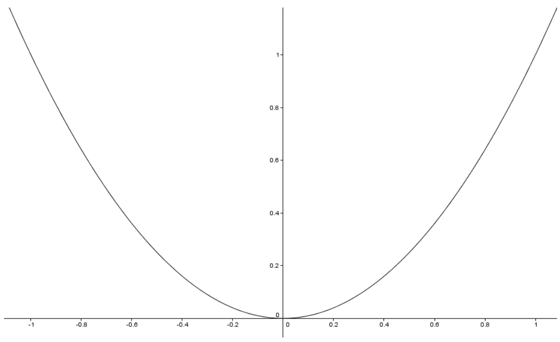
Étude des cas possibles

1. points biréguliers, p impair et q pair
2. points d'inflexion, p impair et q impair
3. point de rebroussement de première espèce, p pair et q impair
4. point de rebroussement de seconde espèce, p pair et q pair

Exemples

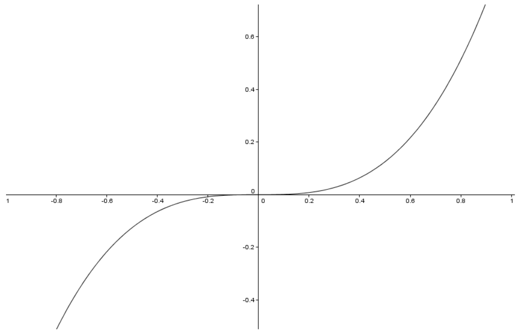
1. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow f''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

   En $t = 0$: $f'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, p = 1, q = 2$: c'est un point birégulier



2. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow f''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix} \Rightarrow f'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

   En $t = 0, f'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p = 1, f''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, q = 3, 0$ est un point d'inflexion



3. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = f^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f''(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, f^{(4)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix} \end{cases}$

$p = 2, q = 4$,point de rebroussement de seconde espèce

Points multiples

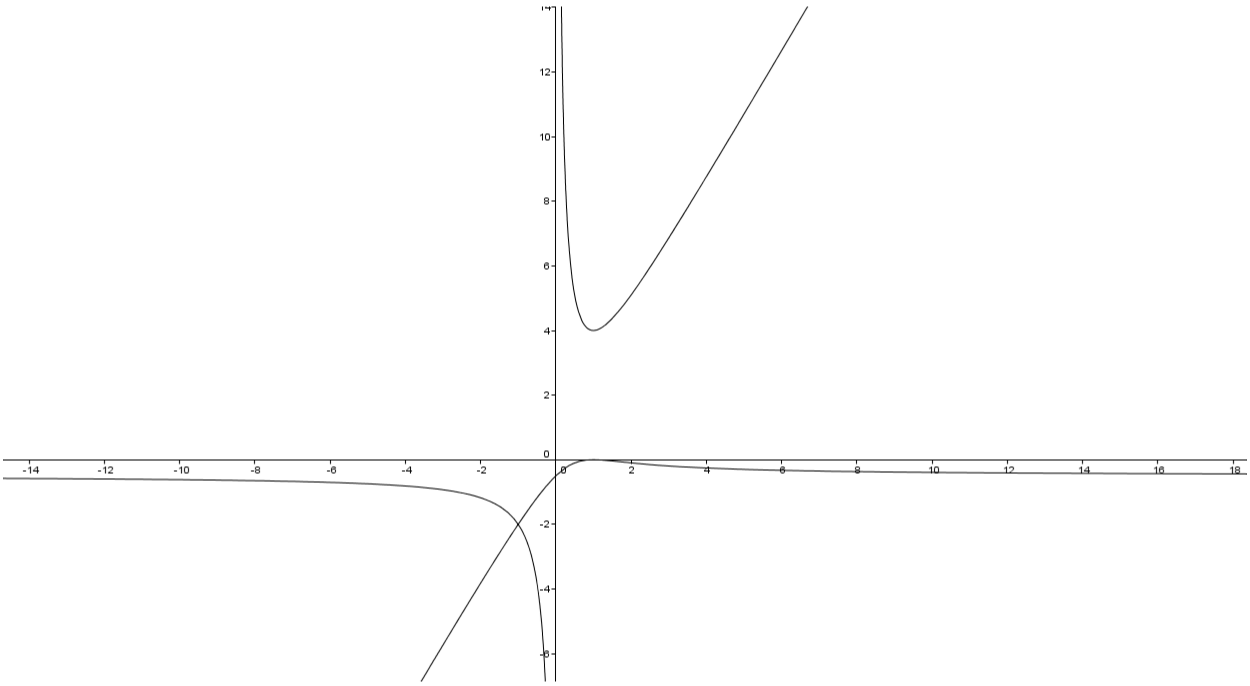
> On dit que f présente un point multiple en $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $card\{t \in I / f(t) = M\} \geq 2, \exists (t_1, t_2) \in I^2, M = f(t_1) = f(t_2)$

Exemple

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} \setminus \{-1;1\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} x(t) = \frac{2t-1}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases} \end{array}$$

$M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est un point multiple de f si et seulement si $\exists (t_1 \neq t_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{-1;1\})^2 / \forall i \in \{1;2\}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_0 = \frac{2t_i-1}{t_i^2-1} \\ y_0 = \frac{t_i^2}{t_i-1} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 t_i^2 - 2t_i + 1 - x_0 = 0 \\ t_i^2 - y_0 t_i + y_0 = 0 \\ x_0 \neq 0 \text{ sinon } t_1 = t_2, \text{ non} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 X^2 - 2X + 1 - x_0 \\ X^2 - y_0 X + y_0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x_0 y_0 \\ 1 - x_0 = x_0 y_0 \\ y_0^2 - 4y_0 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$



7.3.3 Tracé d'un arc plan

1. On étudie les symétries et périodicités éventuelles pour restreindre le domaine de définition
2. On forme les tableaux de variations concomitant de $x(t)$ et $y(t)$
3. On étudie les points stationnaires $(x'(t_0) = y'(t_0) = 0)$ et la tangente en ces points
4. On étudie les points multiples
5. On étudie les éventuelles branches infinies :

$$\alpha \in \overline{I}, \lim_{t\to\alpha} ||f(t)|| = +\infty : \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty \end{cases}$$

   Dans ce cas si $\lim\limits_{t\to\alpha} \frac{x(t)}{y(t)} = a$, on dit que $y = ax$ est direction asymptotique quand $t \to \alpha$. Si de plus $\lim\limits_{t\to\alpha} y(t) - ax = b$,, on dit que $y = ax + b$ est asymptote quand $t \to \alpha$

   ⚠On peut avoir une direction asymptotique sans asymptote : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln(t) \end{cases} \Rightarrow$ $\frac{x(t)}{y(t)} \lim\limits_{t\to+\infty} 0$

   Lorsque $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, on dit qu'on a une branche parabolique
6. On place les points remarquables avec leurs tangentes, les asymptotes éventuelles, enfin on trace

Exemples

1. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \end{array}$ est 2π-périodique

$f(-t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix} = \mathcal{S}_{Ox}(f(t))$

$f(t+\pi) = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mathcal{S}_{Oy}(f(t))$

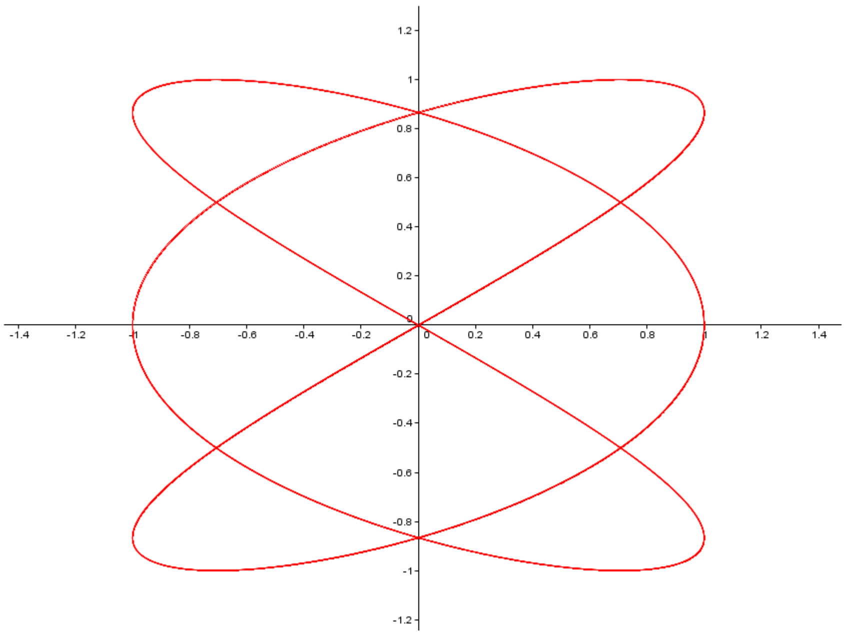
On fait l'étude sur $[0; \dfrac{\pi}{2}]$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Tout les points sont biréguliers, sauf un :

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3\sin(3t) & -9\cos(3t) \\ 2\cos(2t) & -4\sin(2t) \end{vmatrix} = 12\sin(3t)\sin(2t) + 18\cos(2t)\cos(3t) = 15\cos(t) - 3\cos(5t)$$

Le point birégulier vérifie $\cos(5t) = \dfrac{15}{3}\cos(t)$



2. $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{2t-1}{t^2-1} \Rightarrow x'(t) = -2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2} < 0 \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \Rightarrow y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2} \end{cases}$$

Branches infinies : $\begin{cases} x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$ $x = 0$ est asymptote

$\begin{cases} x(t) \underset{t\to-1^-}{\longrightarrow} -\infty \\ y(t) \underset{t\to-1^-}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $y = -\dfrac{1}{2}$ asymptote

$\begin{cases} x(t) \underset{t\to-1^+}{\longrightarrow} +\infty \\ y(t) \underset{t\to-1^+}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) \underset{t\to1^-}{\longrightarrow} -\infty \\ y(t) \underset{t\to1^-}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$

$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{t^2(t+1)}{2t-1} \underset{t\to1}{\longrightarrow} 2, y = 2x$ direction asymptotique

$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2+2t-1}{t+1} \underset{t\to1^-}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}, y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote

$\begin{cases} x(t) \underset{t\to1^+}{\longrightarrow} +\infty \\ y(t) \underset{t\to1^+}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$ $, y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote

$\begin{cases} x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$ $x = 0$ est asymptote

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖		$-$		‖		$-$		
$x(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	0
$y'(t)$		$+$			0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$y(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

7.3.4 Théorème de relèvement (HP)

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\begin{array}{rccc} f & : & I & \to & \mathbb{U} \\ & & t & \mapsto & f(t) \end{array}$ $\mathcal{C}^k$. On appelle relèvement de f toute application $\theta : I \to \mathbb{R} / \forall t \in I, f(t) = e^{i\theta(t)}$

1. Si θ_1 et θ_2 sont deux relèvements continue de f alors $\exists k \in \mathbb{Z} / \forall t \in I, \theta(t) = \theta_1(t) + 2k\pi$
2. Si $k \geq 1$ alors il existe un relèvement de classe de classe $\mathcal{C}^k$ de f

Preuve :

1. $\forall t \in I, e^{i(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1$, car $e^{i\theta_1(t)} = e^{i\theta_2(t)} = f(t), \exists k(t) \in \mathbb{Z} / \theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$
   Alors $\begin{array}{rccc} k & : & I & \to & \mathbb{Z} \\ & & t & \mapsto & k(t) \end{array}$ est continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle est constante
2. Si θ existe : $\forall t \in I, f(t) = e^{i\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = i\theta'(t)e^{i\theta(t)}$, d'où $\theta'(t) = -i\frac{f'(t)}{f(t)}$
   Soit $t_0 \in I, \theta_0 = \theta(t_0)$
   $$\theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$
   Réciproquement soit pour $t_0 \in I$ fixé et θ_0 un argument de $f(t_0)$. Soit : $\begin{array}{rccc} \theta & : & I & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du \end{array}$ est $\mathcal{C}^k$ et $\theta'(t) = -i\frac{f'(t)}{f(t)}$.
   On pose $g(t) = f(t)e^{-i\theta(t)} \Rightarrow g(t_0) = 1$ et $g'(t) = (f'(t) - i\theta'(t)f(t))e^{-i\theta(t)} = 0$, donc g est constante : $\forall t \in I, g(t) = 1, f(t) = e^{i\theta(t)}$, or $|f(t)| = 1$, donc $\theta : I \to \mathbb{R}$

Remarque

C'est encore vrai si $k = 0$

7.3.5 Abscisses curvilignes (HP)

Définition

Soit $f : I \to E$, $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, $[a; b] \subset I / f_{|[a;b]}$ est $\mathcal{C}^1$
Soit $\sigma = (a_0; ...; a_n) \in \Sigma([a; b])$. On lui associe la ligne polygonale

$$\boxed{LP(\sigma) = \bigcup_{i=0}^{n-1} [f(a_i); f(a_{i+1})]}$$

On défini la longueur de la ligne polygonale :

$$\boxed{l(LP(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n-1} ||f(a_{i+1}) - f(a_i)|| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} ||f'(t)||dt = \int_{a_0}^{a_n} ||f'(t)||dt}$$

Théorème

La longueur de l'arc entre les points de paramètres a et b est définie par

$$\sup_{\sigma\in\Sigma([a;b])} l(LP(\sigma)) = \int_a^b ||f'(t)||dt$$

Preuve : on vient de voir que $\forall\sigma \in \Sigma([a;b]), l(LP(\sigma)) \leq \int\limits_a^b ||f'(t)||dt$. Soit alors $\varepsilon > 0$, on sait que

$$\exists\alpha \geq 0/\delta(\sigma) \leq \alpha \Rightarrow |\int_a^b ||f'(t)||dt - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)||f'(a_i)||\ |$$

sommes de Riemann associées à $||f'||$ continue sur $[a;b]$. Par ailleurs :

$$|\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)||f'(a_i)|| - \sum_{i=0}^{n-1}||f(a_{i+1})-f(a_i)||\ | \leq \sum_{i=0}^{n-1}|\int_{a_i}^{a_{i+1}}||f'(a_i)||dt - ||f(a_{i+1})-f(a_i)||\ \ |$$

f étant uniformément continue, $\exists\alpha' > 0/\forall(x;y) \in [a;b]^2, |x-y| \leq \alpha' \Rightarrow ||f(x)-f(y)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Si $\delta(\sigma) \leq \alpha', \forall i \in [|0;n-1|], \forall t \in [a_i;a_{i+1}], ||f'(t)-f'(a_i)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$||\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)dt - f'(a_i)(a_{i+1}-a_i)|| \leq \int_{a_i}^{a^{i+1}} ||f'(t)-f'(a^i)||dt \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{|a_{i+1}-a_i|}{b-a}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}||\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)dt - f'(a_i)(a_{i+1}-a_i)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire :

$$|\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)||f'(a_i)|| - \sum_{i=0}^{n-1}||f(a_{i+1})-f(a_i)||\ \ | \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement : si $\delta(\sigma) \leq \max(\alpha,\alpha')$ alors

$$|l(LP(\sigma)) - \int_a^b ||f'(t)||dt| \leq \varepsilon$$

Application

En physique, si δ désigne l'abscisse curviligne d'un arc, on écrit :

$$d\delta^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow (\frac{d\delta}{dt})^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2$$

Puis on intègre

Chapitre 8

Suites et séries de fonctions

Sommaire

8.1 Modes de convergence

8.1.1 Convergence simple

Définition

Soient $(E, ||.||_E), (F, ||.||_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{A} \subset E$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{A} \to F$

1. On dit que la suite (f_n) converge simplement (cvs) vers $f : \mathcal{A} \to F$ si et seulement si
$$\forall x \in \mathcal{A}, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$
2. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathcal{A}$ si et seulement si $\forall x \in \mathcal{A}$, la série $\sum f_n(x)$ converge. On définit alors la fonction somme :
$$S : \begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \to & F \\ x & \mapsto & S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \end{array}$$

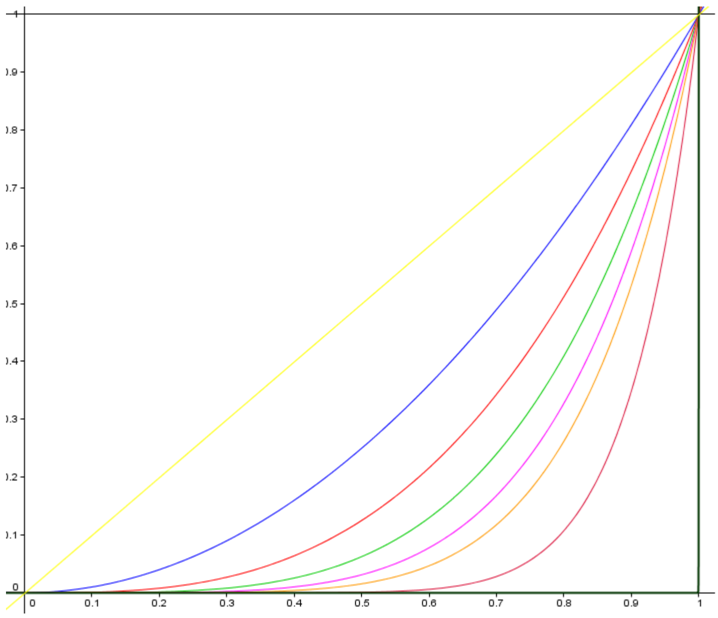
et la fonction reste $\begin{array}{cccc} R_n & : & \mathcal{A} & \to & F \\ & & x & \mapsto & \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \end{array}$

Ainsi que les sommes partielles : $\begin{array}{cccc} S_n & : & \mathcal{A} & \to & F \\ & & x & \mapsto & S(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$

Exemples

1. $\begin{array}{ccccc} f_n & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n \end{array}$ converge simplement vers $\begin{array}{ccccc} f & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & 1 & \mapsto & 1 \\ & & x & \mapsto & 0 \end{array}$

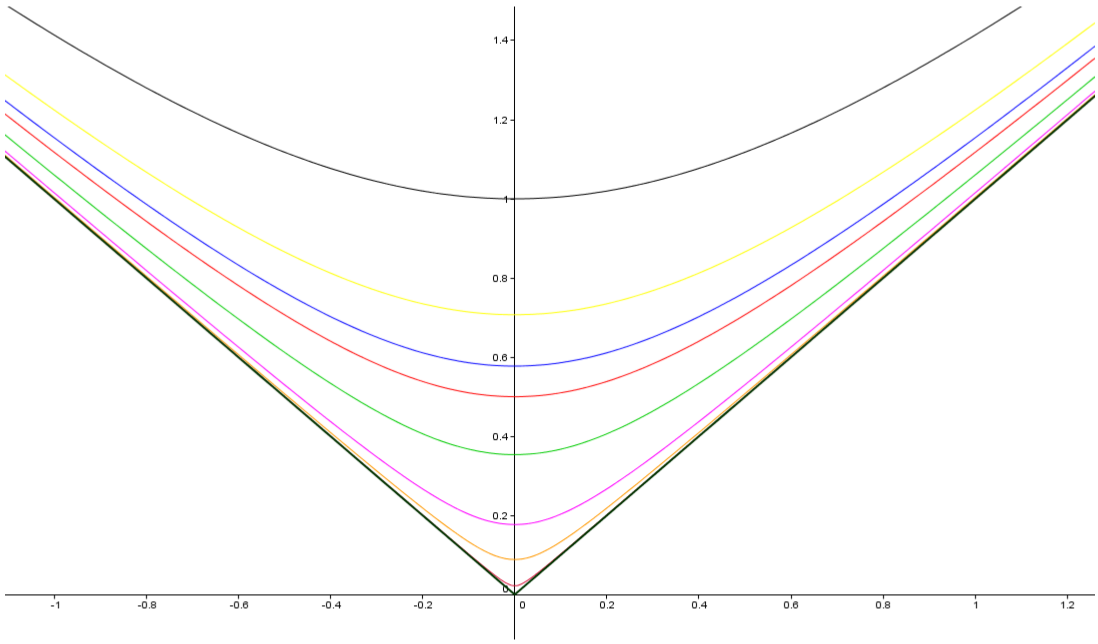


⚠$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ ne l'est pas : cela découle de l'interdiction d'intervertir les limites :

$$\lim_{x\to1^-}\left(\lim_{n\to+\infty} x^n\right) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to1^-} x^n\right) = 1$$

2. $\begin{array}{ccccc} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \end{array} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = |x|$

   (f_n) converge simplement vers $|.|$



⚠ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas sa limite

3. $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{nx}{1+n^2x} \end{array}$ $\mathcal{C}^\infty$ impaire

   $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   $\forall x \neq 0, f_n(x) = \frac{1}{nx+\frac{1}{nx}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f_n'(x) = n\frac{1-(nx)^2}{(1+(nx)^2)}$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

4. $\begin{array}{rcccc} \zeta & : & \{z \in \mathbb{C}/Re(z) > 1\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-z\ln(n)} \end{array}$

   Pour $\begin{array}{rcccc} f_n & : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \frac{1}{n^z} \end{array}$, $\sum f_n$ converge simplement vers ζ sur $\mathcal{A}$

5. Soit $\forall n \geq 1$, $\begin{array}{rcccc} f_n & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n^x} \end{array}$ D'après le CSSA, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

Théorème

> Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est paire (resp. impaire, T-périodique, croissante, décroissante, convexe) et si la suite $\sum f_n$ converge simplement alors sa limite simple possède les mêmes propriétés

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est convexe :

$$\forall (x,y)\in\mathcal{A}^2, \forall t\in[0;1], f_n(tx+(1-t)y)\leq tf_n(x)+(1-t)f_n(y)$$

En somment :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(tx+(1-t)y)\leq t\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)+(1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(y)$$

⚠La convergence simple conserve des propriétés analytiques ! ! Mais pas la continuité : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n \end{array}$
et on ne peut pas non plus intervertir avec $\int$

$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (n+1)^2t^n \\ & & 1 & \mapsto & 0 \end{array} \Rightarrow f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Mais $\int_0^1 f_n(t)dt = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On retiendra qu'on n'a pas le droit sans précautions d'intervertir $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\int$ ce qui revient à intervertir deux limites

8.1.2 Convergence uniforme

Définition

Soit $\forall n\in\mathbb{N}, f_n:\mathcal{A}\to F$. On dit que (f_n) converge uniformément (cvu) vers f sur $\mathcal{A}$ si et seulement si :

1. $\forall n\in\mathbb{N}, f_n-f$ est bornée sur $\mathcal{A}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n-f||_{\infty,\mathcal{A}}=0$

ce qui équivaut à dire que (f_n) converge vers f au sens de $||.||_{\infty,\mathcal{A}}$:

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, \forall t\in\mathcal{A}, ||f_n(t)-f(t)||_F\leq\varepsilon$$

Remarque

La convergence simple s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0, \forall t\in\mathcal{A}, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, ||f_n(t)-f(t)||_F\leq\varepsilon$$

Théorème

La convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque est fausse

$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n \end{array}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=0$ mais $||f_n||_{\infty,[0;1[}=1$ donc (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 (ni vers une autre, car la limite uniforme est une limite simple)

Remarque graphique

Graphiquement si $F=\mathbb{R}, (f_n)$ converge vers f sur $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, \forall t\in\mathcal{A}, f(t)-\varepsilon\leq f_n(t)\leq f(t)+\varepsilon$$

si et seulement si le graphe de f_n est dans un tube de largeur 2ε autour de celui de f

En pratique

Pour montrer que (f_n) converge vers f sur $\mathcal{A}$, on peut :

* évaluer $\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n - f||_{\infty,\mathcal{A}}$
* ou bien exhiber $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$:
  (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$
  (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathcal{A}, ||f_n - f||_F \leq \alpha n$

Remarque

Il peut advenir qu'on n'ai pas convergence uniforme sur $\mathcal{A}$ mais seulement sur certaines parties, à préciser, de $\mathcal{A}$

Exemples

1. $f_n : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ La limite simple est 0, mais f ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0;1[$. Mais pour $\alpha \in [0;1[$, fixé, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;\alpha], |f_n(x)| \leq \alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   donc (f_n) cvu vers 0 sur $[0;\alpha]$
2. $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{nx}{1+n^2x} \end{array}$ Pour x fixé, $f_n(x) \sim \frac{nx}{n^2x} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ sur $\mathbb{R}_+$
   Mais on a pas cvu sur $\mathbb{R}_+$, car $||f_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{2}$
   En revanche pour $\alpha > 0$ fixé, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq \alpha$. L'étude de f_n montre que $\forall n \geq n_0, f_n$ est décroissante positive sur $[\alpha;+\infty[$, donc $||f_n||_{\infty,[\alpha;+\infty[} = f(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\alpha;+\infty[, \forall \alpha > 0$ (mais pas sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$
3. $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}$ (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $|.|$
   $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{1}{n(\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{n}})} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
   $||f_n - |.|\,||_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, (f_n) converge uniformément vers $|.|$ sur $\mathbb{R}$

8.1.3 Cas d'une série de fonctions

Convergence normale

Soit F un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, $\sum f_n$ une série de fonctions $\mathcal{A} \subset E \to F$. On dit que $\sum f_n$ converge normalement, cvn sur $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n||_{\infty,\mathcal{A}} < +\infty$$

si et seulement si $\exists \sum u_n$ SATP convergente telle que $||f_n||_{\infty,\mathcal{A}} \leq u_n$

Théorème

Si $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathcal{A}$ alors elle converge uniformément sur $\mathcal{A}$

Preuve : si $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathcal{A}$, soit $t \in \mathcal{A}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n(t)||_F < ||f_n||_{\infty,\mathcal{A}}$$

Ainsi $\sum f_n(t)$ converge absolument dans F donc converge, donc converge simplement sur $\mathcal{A}$, notons $\begin{array}{cccc} S & : & \mathcal{A} & \to & F \\ & & t & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \end{array}$ De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} ||\sum_{k=0}^{n} f_k(t) - S(t)|| &= ||\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)||_F \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k(t)||_F \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k||_{\infty,\mathcal{A}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément vers S sur $\mathcal{A}$

⚠$\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathcal{A}$ vers S si et seulement si $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ sur $\mathcal{A}$ si et seulement si

$$||\sum_{k=0}^{n} f_k - \sum_{k=0}^{+\infty} f_k||_{\infty,\mathcal{A}} = 0$$

donc : $||\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k||_{\infty,\mathcal{A}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui équivaut à

$$\exists (\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} / \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \\ \forall t \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}, ||\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)||_F \leq \alpha_n \end{cases}$$

On majore la norme du reste par une suite de limite nulle indépendante de t

Exemples

1. $\begin{array}{cccc} \zeta & : & \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) > 1\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = f_n(z) \end{array}$

   $\forall z \in \mathcal{A}, \forall n \geq 1, |f_n(z)| = e^{-Re(z)\ln(n)} = \frac{1}{n^{Re(z)}}$ terme général d'une SATP convergente d'après le critère de Riemann
   $\forall \varepsilon > 0, 1 + \varepsilon \in \mathcal{A} \Rightarrow ||f_n||_{\infty,\mathcal{A}} = \frac{1}{n}$. Il n'y a pas convergence normale sur $\mathcal{A}$ car la série harmonique diverge. En revanche pour $\alpha > 1$ fixé, soit $\mathcal{A}_\alpha = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) \geq \alpha\}$
   $\forall n \geq 1, \forall z \in \mathcal{A}_\alpha, |f_n(z)| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ SATP convergente. On a convergence normale sur $\mathcal{A}_\alpha$ pour $\alpha > 1$

2. $\forall n \geq 1, \begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & z & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n^x} \end{array}$
$\forall x > 0$, d'après le CSSA, $\sum f_n(x)$ converge donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$
$\forall n \geq 1, \forall x > 0, |f_n(x)| = \frac{1}{n^x}, ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$. En revanche, $\forall \alpha > 1, \forall x \geq \alpha, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^\alpha}$, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[\alpha; +\infty[, \alpha > 1$. De plus, d'après le CSSA, $\forall x > 0, \forall n \geq 1$
$$|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$
Soit $\beta > 0, \forall x \in [\beta; +\infty[, \forall n \geq 1$
$$|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}| \leq \frac{1}{(n+1)^\beta} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
$\sum f_n$ converge uniformément sur $[\beta; +\infty[$ avec $\beta > 0$. On a convergence uniforme sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$, mais pas convergence normale sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$
3. $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & \theta & \mapsto & \frac{e^{in\theta}}{n^2} \end{array}$
$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$
4. Soit $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & \theta & \mapsto & \frac{e^{in\theta}}{n} \end{array}$ 2π périodique
Pour $\theta \in]0; 2\pi[$, soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on effectue une transformation d'Abel, en posant :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \sum_{j=1}^{k} e^{ij\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{ik\theta}}{1 - e^{i\theta}} \Rightarrow |B_k| = \frac{|\sin(k\frac{\theta}{2})|}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$$
$e^{ik\theta} = B_k - B_{k-1}$. On forme la tranche de Cauchy :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+p} \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{B_k}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{B_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=n+1} B_k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \frac{B_{n+p}}{n+p} - \frac{B_n}{n+1} \end{aligned}$$
En particulier pour $n = 0$:
$$\sum_{k=1}^{p} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{p-1} B_k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \leq \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})} = O(\frac{1}{k^2})$$
Ainsi $\sum \frac{e^{ik\theta}}{k}$, de plus pour n fixé lorsque $p \longrightarrow +\infty$
$$R_n(\theta) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} B_k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) - \frac{B_n}{n+1}$$
$$|R_n(\theta)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \frac{1}{n+1}) = \frac{2}{(n+1)\sin(\frac{\theta}{2})}$$
Soit $\alpha \in]0; \pi[, \forall \theta \in [\alpha; 2\pi - \alpha], \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$
$|R_n(\frac{\theta}{2})| \leq \frac{2}{(n+1)\sin(\frac{\alpha}{2})} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge uniformément sur $[\alpha; 2\pi - \alpha]$

8.2 Théorème de transfert

8.2.1 Continuité

Définition

Soit $(f_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, f_n : \mathcal{A} \subset E \to F$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en x_0 (resp. $\mathcal{A}$)
2. (f_n) (resp. $\sum f_n$) converge uniformément sur $\mathcal{A}$ vers f (resp. S)

alors f (resp. $\sum f_n$) est continue en x_0 (resp. $\mathcal{A}$). On retiendra qu'une limite uniforme conserve la continuité

Preuve : soit $x_0 \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathcal{A}$:

$$||f(x) - f(x_0)|| \leq ||f(x) - f_n(x)|| + ||f_n(x) - f_n(x_0)|| + ||f_n(x_0) - f(x_0)||$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après 2. : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, ||f - f_n||_{\infty,\mathcal{A}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$
N étant fixé (car ε l'est), f_n est continue en x_0 ; donc $\exists \alpha > 0 / \forall x \in \mathcal{A}, ||x - x_0||_E \leq \alpha \Rightarrow ||f_N(x) - f_N(x_0)||_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$
Ainsi : $||x - x_0||_E \leq \alpha \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_F \leq \varepsilon$

Corollaire

Dans $(\mathcal{F}(\mathcal{A}, F), ||.||_{\infty,\mathcal{A}})$ le sous-espace vectoriel des applications continues est fermé (pour $||.||_{\infty,\mathcal{A}}$)

Corollaire

Soit $(f_n) \in (F^{\mathcal{A}})^{\mathbb{N}}$ telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue
2. $\forall x \in \mathcal{A}, \exists V_x \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}(x) / (f_n)$ converge uniformément sur V_x

alors f est continue

Preuve : pour $x_0 \in \mathcal{A}$ fixé, on applique le théorème à V_{x_0} à la place de $\mathcal{A}$

Remarque

On applique très fréquemment le corollaire 2 dans le cas où :

1. $\mathcal{A} = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\forall [a; b] \subset I, (f_n)$ converge uniformément sur $[a; b]$ alors la fonction limite est continue sur les segments inclus dans I, donc sur I
2. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^p$ et $\forall A \geq 0, (f_n)$ converge uniformément sur $\overline{B(0, A)}$, la fonction limite est alors continue sur $\mathbb{R}^p$

Exemples

1. $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n \end{array}$ continue sur $[0;1]$ converge simplement vers $\begin{array}{cccc} f & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & 1 & \mapsto & 1 \\ & & x & \mapsto & 0 \end{array}$ qui est discontinue en 1, donc on n'a pas convergence normale sur $[0;1]$

2. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie ($\mathbb{C}$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ & & a & \mapsto & \frac{a^n}{n!} \end{array}$ est continue. On a $||f_n(a)|| \leq \frac{||a||^n}{n!}$, soit $R \geq 0 : \forall a \in \overline{B(0,R)}, \forall n \in \mathbb{N} : ||f_n(a)|| \leq \frac{R^n}{n!}$, terme général d'une SATP convergente, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\overline{B(0,R)}$, donc $\exp = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\overline{B(0,R)}, \forall R \geq 0$, donc sur $\mathcal{A}$

3. $\begin{array}{cccc} \zeta & : & \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) > 1\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \end{array}$ $\forall n \geq 1, f_n$ est continue d'après ce qu'on vient de voit. Pour $\alpha > 1$, soit $\mathcal{A}_\alpha = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) \geq \alpha\}, \sum f_n$ converge normalement sur $\mathcal{A}_\alpha$, donc ζ est continue sur $\mathcal{A}_\alpha, \forall \alpha > 1$, donc sur $\mathcal{A}$

4. Pour $n \geq 1$, soit $\begin{array}{cccc} f_n & : & [\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n^x} \end{array}$ continue. Posons $\alpha > 0 : \sum f_n$ converge normalement sur $[\alpha; +\infty[$, donc $\sum f_n$ est continue sur $[\alpha; +\infty[, \forall \alpha > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$

5. $$S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$$
   est continue sur $[\alpha; 2\pi - \alpha], \forall \alpha \in]0; \pi]$ donc sur $]0; 2\pi[$

6. $$F(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$$
   est continue sur $\mathbb{R}$ car converge normalement sur $\mathbb{R}$

Interversions des limites

> Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en $\alpha \in \mathcal{A}$ et si on a convergence uniforme de (f_n) verd f sur un voisinage de $\mathcal{A}$, alors
>
> $$\lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to \alpha} f_n(x)) = \lim_{x \to \alpha} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)) = f(\alpha)$$
>
> car f est continue en α

8.2.2 Théorème d'interversion des limites

Théorème

Soit$F$ un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie (complet suffirait) et $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathcal{A} \subset E \to F$. Soit $\alpha \in \mathcal{A}$ éventuellement $\pm\infty$, on suppose que :

1. $\lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x) = l_n \in F$
2. (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage $\mathcal{B}$ de α

Alors la suite (l_n) converge dans F vers $l \in F$ et $l = \lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$

Preuve : Montrons que la suite (l_n) est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, ||f_n - f||_{\infty,\mathcal{B}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de sorte que :

$$\forall n, m \geq n_1, ||f_n - f_m||_{\infty,\mathcal{B}} \leq \varepsilon$$

Pour n et $m \geq n_1$ fixés :

$$\forall x \in \mathcal{B}, ||f_n(x) - f_m(x)||_F \leq \varepsilon$$

donc lorsque $x \to \alpha, ||l_n - l_m|| \leq \varepsilon (l_n)$ est de Cauchy dans F (dimension finie ou complet) donc converge, soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} l_n$. Soit à présent $x \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$||l - f(x)|| \leq ||l - l_n||_F + ||l_n - f_n(x)||_F + ||f_n(x) - f(x)||_F$$

Soit $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}/||l - l_n|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $||f_n - f||_{\infty,\mathcal{B}} \leq \frac{\varepsilon}{3} n$ étant fixé $\exists V \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}(x)/\forall x \in V, ||l_n - f_n(x)||_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$ alors $||l - f(x)||_F \leq \varepsilon$

Remarque

C'est une généralisation du théorème de continuité

Corollaire

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions, $\mathcal{A} \to F$ de dimension finie (complet suffirait)et $\alpha \in \overline{\mathcal{A}}$, tel que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = l_n \in F$
2. $\sum f_n$ converge normalement sur un voisinage $\mathcal{B}$ de α

alors $\sum l_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} l_n = \lim_{x\to\alpha} S(x)$$

Exemples

$\begin{array}{cccc} \zeta & : &]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array}$ continue sur $]1;+\infty[$, car on a convergence normale sur les $[a;+\infty[$ avec $a > 1$. Il y a convergence normale sur $[2;+\infty[$, donc convergence uniforme. $\forall n \geq$

$2, \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1^x} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

$$\zeta(x) - 1 = \frac{1}{2^x}(1 + \sum_{n=3}^{+\infty}(\frac{2}{n})^x) = \frac{1}{2^x}(1 + \sum_{n=3}^{+\infty} g_n(x))$$

$\forall n \geq 3, \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0, \frac{2}{n} \leq \dfrac{2}{3} < 1$
$\forall x \geq 2, |g_n(x)| \leq \frac{4}{n^2}$ est le terme général d'une SATP convergente, $\sum g_n$ converge normalement sur $[2; +\infty[$, on peut intervertir les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} g_n(x) = 0 \Rightarrow \zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o(\frac{1}{2^x})$$

Notons que si on avait convergence uniforme de $\sum \frac{1}{n^x}$ sur $]1; +\infty[$, d'après le théorème : $\sum\limits_{n\geq 1} \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{n^x}$ converge, ce qui est faux
De même, $\sum \frac{(-1)^n}{x^n}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$, car sinon la série $\sum \lim\limits_{x\to 0} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge, absurde
De même $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ ne converge pas uniformément sur $]0; 2\pi[$, sinon la série harmonique convergerait

8.2.3 Intégration termes à termes

Théorème d'intégration sur un segment

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a; b] \to F$ de dimension finie. On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a; b]$
2. (f_n) (resp. $\sum f_n$) converge uniformément vers f (resp. S)

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt$$

On peut intervertir $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\int_a^b$ ou $\int_a^b$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$

Preuve : $|| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt|| \leq \int_a^b ||f_n(t) - f(t)||dt \leq (b-a)||f_n - f||_{\infty,[a;b]}$

Exemples

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, I(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{z - e^{it}} dt$
   Si $\begin{array}{cccc} f & : & [0; 2\pi] & \to & \mathbb{C}^* \\ & & t & \mapsto & |f(t)|e^{i\theta(t)} \end{array}$ $\mathcal{C}^k$ avec $\theta : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^k, g = \frac{f}{|f|} = e^{i\theta(t)} : [0; 2\pi] \to \mathbb{U}$
   $g'(t) = i\theta'(t)g(t) = \frac{f'}{|f|} - \frac{|f|'f}{|f|^2}$.

De plus :$i\theta'(t) = \frac{f'}{f} - \frac{|f|'}{|f|} \Rightarrow \theta(t) = i\int_0^t \frac{f'(u)}{f(u)}du - \ln|f(t)| + \ln|f(t_0)|$
Pour $f(t) = z - e^{it}$, 2π-périodique, $\theta(2\pi) = -i\int_0^{2\pi} \frac{-ie^{it}}{z-e^{it}}dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{z-e^{it}}dt$

$$|z| < 1 \Rightarrow \forall t \in [0;2\pi], \frac{e^{it}}{z-e^{it}} = -\frac{1}{1-ze^{-it}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(ze^{it})^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[0;2\pi]$, $\forall t \in [0;2\pi], |f_n(t)| = |z|^n$ terme général d'une série géométrique absolument convergente donc $\sum f_n$ converge normalement : on peut réaliser l'interversion :

$$I(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-int}dt = 1$$

$$|z| > 1 \Rightarrow \frac{e^{it}}{z-e^{it}} = \frac{e^{it}}{z}\frac{1}{1-\frac{e^{it}}{z}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{int}}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$$

On a encore continuité et convergence normale, donc $\sum g_n$, on peut intervertir :

$$I(z) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}\int_0^{2\pi} e^{int}dt = 0$$

2. Soit $x \in [0;1[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-tx)^n dt = x\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-tx)^n dt = x\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$$

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[0;1]$, $\forall t \in [0;1], |f_n(t)| \leq x^n$, terme général d'une SATP convergente donc $\sum f_n$ converge sur $[0;1]$, on peut intervertir :

$$S(x) = x\int_0^1 \frac{dt}{1+tx} = x[\ln(1+tx)]_0^1 = x\ln(1+x)$$

Par ailleurs, soit $\begin{array}{cccc} g_n & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \end{array}$ est continue, $\sum g_n$ est une série alternée vérifiant le CSSA, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], |\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a bien convergence uniformément sur $[0;1]$, donc S est continue en 1 et

$$S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$$

8.2.4 Théorème de dérivation termes à termes

Problème

Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ qui converge (au moins simplement) vers f : à quelles conditions f est-elle $\mathcal{C}^1$ et a-t-on $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$. Il ne suffit pas que (f_n) converge vers f ,

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \end{array}$$ converge vers $|.|$ non dérivable ! ! !

Si f_n est définie sur I intervalle, fixons $a \in I$, comme f est $\mathcal{C}^1$:

$$\forall x \in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt$$

Pour intervertir, il suffit que (f'_n) converge uniformément sur les segments de I

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, a \in I$ et (f_n) une suite (resp. $\sum f_n$) de fonctions $\mathcal{C}^1 : I \to F$ ($\mathbb{K}$-ev de dimension finie). On suppose :

1. (f'_n) (resp. $\sum f'_n$) converge uniformément sur les segments de I vers une fonction g (resp. $\sum f'_n$)
2. $(f_n(a))$ (resp. $\sum f_n$) converge uniformément sur les segments de I vers une fonction g

alors : (f_n) (resp. $\sum f_n$) converge uniformément sur les segments de I vers f (resp. S) $\mathcal{C}^1$ sur I et telle que f' (resp. S') $= g$ (resp. $\sum f'_n$)

Preuve : soit $x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt$$

et f'_n converge uniformément sur $[\tilde{a;x}]$ vers g, donc on peut intervertir :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t)dt = f(x)$$

Par ailleurs, soit J un segment de I et J' un segment de I contenant J et a

$$\begin{aligned} \forall x \in J, ||f_n(x) - f(x)|| &\leq ||f_n(a) - f(a)|| + ||\int_a^x (f'_n - g)(t)dt|| \\ &\leq ||f_n(a) - f(a)|| + \int_a^x ||(f'_n - g)(t)||dt \\ &\leq ||f_n(a) - f(a)|| + l(J')||f'_n - g||_{\infty,J'} \end{aligned}$$

(f_n) converge uniformément vers f sur les segments de I. Par ailleurs, g est $\mathcal{C}^0$ sur I car la limite uniforme des (f'_n) continue et

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'_n(t)dt$$

f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$

Cas d'une série de fonctions

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions : $I \to F$

1. Si les conditions suivantes sont vérifiées :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^1$
   (b) $\sum f_n'$ converge uniformément sur les segments de I
   (c) $\sum f_n$ converge simplement sur I

   Alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$
2. Si les conditions suivantes sont vérifiées :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est $\mathcal{C}^p$ (avec $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)
   (b) $\forall k \in [|0;p|], \sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur les segments de I

   Alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^p$ sur I et $\forall k \in [|0;p|], S^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$

Exemples

1. $\begin{array}{cccc} \zeta & : &]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n \end{array}$

   $\forall n \geq 1, f_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 1, f_n^{(k)} = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$
   Soit $[a;b] \subset]1;+\infty[, \forall x \in [a;b], |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a} = O(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}})$, terme général d'une SATP convergente, donc $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur les segments de $]1;+\infty[$, donc ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 1$

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{x}$$

2. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n \end{array}$

   $\forall n \geq 1, g_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}$

$$g_n^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$$

   Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [a;b]$. Étudions $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{\ln(t)^k}{t^x} \end{array}$

   On a $\varphi'(t) = \frac{\ln(t)^{k-1}}{t^{x+1}}(k - x\ln(t))$
   Posons $N = E(e^{\frac{k}{n}})+$, pour $n \geq N, \forall x \in [a;b], |g_{n+1}^{(k)}(x)| \leq |g_n^{(k)}(x)|$. D'après le CSSA :

$$\sum_{n\geq 1} g_n^{(k)}(x) \text{ converge et } |\sum_{p=n+1}^{+\infty} g_p^{(k)}(x)| \leq |g_{n+1}^{(k)}(x)| \leq \frac{\ln(n+1)^k}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après le théorème de dérivation termes à termes, f est $\mathcal{C}^\infty$ car $\sum g_n^{(k)}$ converge uniformément sur les segments de $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-\ln(n))^k}{n^x}$$

3. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie et $a \in \mathcal{A}$. Soit $\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R} & \to \mathcal{A} \\ & & t & \mapsto \exp(ta) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n a^n}{n!} \end{array}$

   $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \frac{t^n a^n}{n!}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f_n'(t) = \frac{t^{n-1}a^n}{(n-1)!}$
   Soit $R \geq 0, \forall n \geq 1, \forall t \in [-R; R], ||f_n'(t)|| \leq \frac{R^{n-1}||a||^n}{(n-1)!}$
   $\sum f_n'$ converge normalement sur les segments de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}, \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n-1}a^n}{(n-1)!} = a\varphi(t) = \varphi(t)a$$

   Ainsi par récurrence φ est $\mathcal{C}^\infty$. Par exemple, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi : t \mapsto e^{tM}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = M\exp(tM) = \exp(tM)M$

8.3 Théorèmes d'approximation uniforme

8.3.1 Théorème de Weierstrass

> Toute fonction continue sur un segment (compact suffirait) est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes
>
> L'espace des fonctions polynômes est dense dans $\mathcal{C}([a;b], \mathbb{K})$ muni de $||.||_\infty, [a;b]$
>
> $\forall f \in \mathcal{C}([a;b], \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{K}[X] / \forall x \in [a;b], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$

Preuve : on étudie le cas où $[a;b] = [0;1], f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{K})$. Soit $x \in [0;1]$ et $\forall k \in \mathbb{N}, X_k$ variable aléatoire, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(x)$

$\begin{cases} P(X_k = 1) & = x \\ P(X_k = 0) & = 1 - x \end{cases}$

On a, $E(X_k) = x$ et $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = x(1-x)$

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \Rightarrow E(Y_n) = x, V(Y_n) = \frac{1}{n^2}V(\sum_{1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{x - x^2}{n^2}$$

$(nY_n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$, Y_n prend les valeurs $\frac{k}{n} / k \in [|0; n|]$

$$P(Y_n = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$E(f(Y_n)) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) P(Y_n = \frac{k}{n}) \Rightarrow E(f(Y_n)) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (f(\frac{k}{n}) - f(x))$$

f étant continue sur $[0;1]$ elle y est bornée est uniformément continue, d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists \alpha > 0 / \forall (x_1;x_2) \in [0;1]^2, |x_1 - x_2| \leq \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|E(f(Y_n)) - f(x)| \leq \sum_{k \in [|0;n|], |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| + \sum_{k \in [|0;n|], |\frac{k}{n} - x| > \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(\frac{k}{n}) - f(x)|$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in [|0;n|], |\frac{k}{n} - x| > \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= P(|Y_n - x| > \alpha) \\ &= P(|Y_n - E(Y_n)| > \alpha) \\ &\leq \frac{V(Y_n)}{\alpha^2} \\ &= \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \\ &\leq \frac{1}{4n\alpha^2} \end{aligned}$$

Finalement : $|E(f(Y_n)) - f(x) - \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{||f||_\infty}{2n\alpha^2}$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \| \frac{||f||_\infty}{2n\alpha^2} \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall n \geq n_0, \forall x \in [0;1], |E(f(Y_n)) - f(x)| \leq \varepsilon$. Or $E(f(Y_n))$ est un polynôme en x, dit polynôme de Bernstein. Par transformation affine, on se ramène au cas général sur $[a;b]$

Application

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b], \mathbb{K})$, si $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t)dt = 0$. Par combinaison linéaire :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \int_a^b P(t)f(t)dt = 0$$

Soit $(P_n) \in \mathbb{C}[X] / \lim_{n \to +\infty} ||P_n - \bar{f}||_{\infty,[a;b]} = 0$
$\forall t \in [a;b], |P_n(t)f(t) - \bar{f}(t)f(t)| \leq ||f||_{\infty,[a;b]} \times ||P_n - \bar{f}||_{\infty,[a;b]}, (P_n f)$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[a;b]$, on peut intervertir :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b P_n(t)f(t)dt = \int_a^b |f|^2(t)dt$$

d'où $|f|^2 = 0$ sur $[a;b]$ et $f = 0$

Remarque

On utilise fréquemment le théorème de Weierstrass pour montrer une propriété portant sur des fonctions continues sur $[|a;b|]$, on le vérifie d'abord pour les polynômes, puis on passe à la limite uniforme
⚠Ce théorème ne s'applique plus en dehors d'un segment ! ! ! En effet on a le lemme : si $(P_n) \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f alors f est une fonction polynomiale

Preuve : $||P_n - f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $||P_{n+1} - P_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$(P_{n+1} - P_n)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, c'est un polynôme constant. Par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_n \in \mathbb{N}/P_n = P_0 + \alpha_n, \alpha_n = P_n(0) - P_0(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) - P_0(0) = \alpha$$

d'où, $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P_0(x) + \alpha = f(x) \Rightarrow f = P_0 + \alpha \in \mathbb{K}[X]$

Exemple

exp est limite uniforme sur les segments de $\mathbb{R}$ (mais pas sur $\mathbb{R}$) de $\begin{array}{rccc} P_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{array}$

8.3.2 Approximations uniformes des fonctions $\mathcal{C}_\mathcal{M}$ sur $[a;b]$

Théorème

> L'espace $\mathcal{E}([a;b], E)$ des fonctions en escalier est dense dans $\mathcal{C}([a;b], E)$
> Toute fonction continue par morceaux de $[a;b] \to E, \mathbb{K}$ espace vectoriel normé de dimension finie est limite uniforme sur $[a;b]$ d'une suite de fonctions en escalier
> $\forall f \in \mathcal{C}^0_\mathcal{M}([a;b], \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{E}([a;b], \mathbb{K})/$
> $$\forall t \in [a;b], ||f(t) - \varphi(t)|| \leq \varepsilon$$

Preuve : cf cours de MPSI

Remarque

De même qu'avec le théorème de Weierstrass pour montrer un résultat portant sur les fonctions $\mathcal{C}^0_\mathcal{M}$ sur un segment, on le vérifie d'abord pour les fonctions en escaliers puis on passe, si possible, à la limite uniforme

Lemme de Riemann-Lebesgue (HP)

> Soit $f \in \mathcal{C}^0_\mathcal{M}([a;b], \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{R}$
> $$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$$

Preuve : si f est constante, $f = c$

$$\forall \lambda \neq 0, \int_a^b ce^{i\lambda t}dt = \frac{c}{i\lambda}(e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}) \Rightarrow \| \int_a^b ce^{i\lambda t}dt\| \leq \frac{2c}{|\lambda|} \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par combinaison linéaire, c'est vrai pour les fonctions en escalier sur $[a;b]$
Soit f continue par morceaux, $\varepsilon > 0$

$$\exists \varphi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{K}) / ||f-\varphi||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Il vient : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\| &\leq \| \int_a^b (f(t)-\varphi(t))dt\| + \| \int_a^b \varphi(t)dt\| \\ &\leq (b-a)||f-\varphi||_\infty + \| \int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}dt\| \end{aligned}$$

$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}/|\lambda| \geq \lambda_0, \| \int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}dt\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\| \leq \varepsilon$

Lemme de Riemann-Lebesgue généralisé (HP)

Soit g une fonction T-périodique, continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $T > 0$. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$. Alors :

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)dt$$

La méthode consiste à vérifier le résultat pour les fonctions constantes, puis à approcher uniformément f par des fonctions en escaliers. Reste à majorer l'intégrale, en choisissant une subdivision adaptée

8.3.3 Théorème de Weierstrass trigonométrique (HP)

Produit de convolution d'une fonction périodique

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continues } 2\pi\text{-périodique } \}$.

On pose $\begin{array}{rccc} f*g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt \end{array}$

On a les propriétés suivantes :

1. $f*g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$
2. $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$
3. f est bornée
4. $f*g$ est 2π périodique et uniformément continue
5. Le produit de convolution est commutatif

Approximation de l'unité

On pose : $Q_k(t) = c_k(\frac{1+\cos(t)}{2})^2$ avec $c_k \in \mathbb{R}/\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)dt = 1$

Les propriétés utiles de Q_k sont :

1. $Q_k \geq 0$
2. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)ds = 1$

3. $\forall \delta \in]0;\pi]$, $\int_{[-\pi:\pi]\setminus[-\delta;\delta]} Q_k(s)ds \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On dit que c'est une approximation de l'unité

$$P_k(t) = (f * Q_k)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)Q_k(t-s)ds = \sum_{j=-k}^{k} a_j e^{ij(t-s)} = \sum_{j=-k}^{k} \frac{a_{j,k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ijs}ds e^{ijt}$$

c'est un polynôme trigonométrique 2π-périodique

Théorème de Weierstrass-trigonométrique

L'espace des polynômes trigonométriques 2π-périodique est dense pour $\|.\|_\infty$ dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$

Chapitre 9

Séries entières

Sommaire

9.1 Rayon de convergence

9.1.1 Introduction

Les grecs savaient que si $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Par ailleurs on sait que : $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On s'intéresse aux problèmes suivants :

* Étant donné $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z^n$ converge-t-elle ? (cela revient à étudier la convergence simple)
* Quelles propriétés analytiques la fonction somme vérifie-t-elle ?
* Étant donné une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut-t-on écrire et sur quel domaine a-t-on un développement en série entière (DSE)

9.1.2 Définition du rayon de convergence

Lemme d'Abel

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, soit $r > 0/(a_n r^n)$ est bornée. Alors $\forall \rho \in [0; r[$,

$$\sum a_n \rho^n \text{ converge absolument}$$

Preuve : $|a_n \rho^n| = |a_n r^n| \times |\frac{\rho}{r}|^n = O((\frac{\rho}{r})^n)$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \rho^n| < +\infty$$

Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, R = \sup\{r \geq 0/(a_n r^n) \text{ est bornée }\} \in \overline{\mathbb{R}}$

R s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

On a : $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R : \sum a_n z^n \text{ converge absolument, disque ouvert de convergence} \\ |z| > R : \sum a_n z^n \text{ divergence grossière} \end{cases}$

On ne peut rien dire généralement si $|z| = R$, cercle de convergence

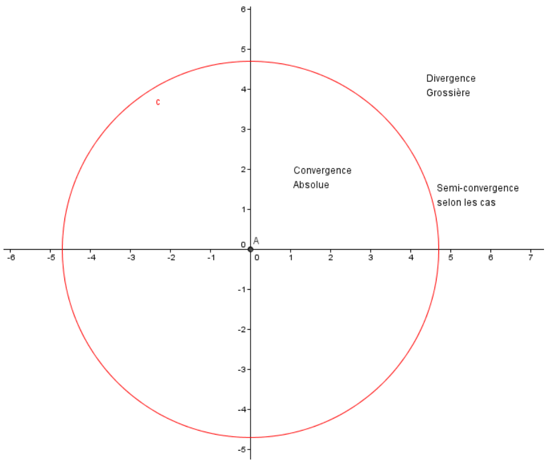
Preuve : si $|z| < R, \exists r \geq 0/|z| < r$ et $(a_n r^n)$ est bornée, d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ converge absolument

si $|z| > R, (a_n z^n)$ n'est pas bornée donc ne tend pas vers 0, divergence grossière

Remarque fondamentale

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

1. $\sum a_n z_0^n$ converge $\Rightarrow |z_0| \leq R$
2. $\sum a_n z_0^n$ diverge $\Rightarrow |z_0| \geq R$
3. $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente $\Rightarrow |z_0| = R$



Utilisation de la règle de d'Alembert

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:

* ou bien, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, a_n = 0$ alors $R = +\infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}_n[X]$

* ou bien $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sigma(k) \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \sigma(\mathbb{N}), a_n = 0$

Pour $z \neq 0$, on pose , $u_n = |a_{\sigma(n)} z^{\sigma(n)}| > 0$. Si $\exists l = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, si $l > 1, \sum a_n z^n$ converge absolument
Si $l > 1$: $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

Théorème

Si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ et si $\exists l = \lim_{n \to +\infty} \| \frac{a_{n+1}}{a_n} \| \in \overline{\mathbb{R}_+}$
Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut $\frac{1}{l}$

Preuve : ici, $\sigma = id_{\mathbb{N}}$ et $u_n = |a_n z^n|$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \| = \| \frac{a_{n+1}}{a_n} \times |z| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l|z| = L$$

$$\begin{cases} \text{Si } |z| < \frac{1}{L} \text{ converge absolument} \\ \text{Si } |z| > \frac{1}{L} \text{ diverge grossièrement} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{1}{l}$$

Exemples

1. $\sum n! z^n$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty, R = 0$
2. $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0, R = +\infty$
3. $\sum z^n$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1} = 1, R = 1$, il y a divergence sur tout le cercle de convergence

4. $\sum \frac{z^n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1, R = 1$. Il y a divergence pour $z = 1$ et convergence pour $z = e^{i\theta}, \theta \in]0; 2\pi[$. De même $\sum \frac{z^n e^{-in\theta_0}}{n+1}, R = 1$, il y a convergence pour $z = e^{i\theta}/\theta \neq \theta_0 + 2k\pi$ et divergence, si $z = e^{i\theta}$

5. $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1, R = 1$. Il y a convergence sur tout le cercle de convergence

6. $\sum n! z^{n!}, \begin{cases} a_p & = p \text{ si } p \in \{n!/n \in \mathbb{N}\} \\ a_p & = 0 \text{ sinon} \end{cases}$
Pour $z \neq 0$, on forme $u_n = |n! z^{n!}| > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|^{(n+1)!-n!} = (n+1)|z|^{n\times n!}$$

donc $R = 1$ et on a divergence sur tout le cercle de convergence :
$|z| < 1$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \sum n! z^{n!}$ converge absolument
$|z| > 1$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \sum n! z^n$ diverge

7. $\sum (-2)^n z^{3n}$, si $n = 3k, a_n = a_{3k} = (-2)^k = (-2)^{\frac{n}{3}}$, sinon $a_n = 0$
Pour $z \neq 0$, soit $u_n = |(-2)^n z^{3n}|$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2|z|^3$, donc $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \sum (-2)^n z^{3n}$ converge absolument
Si $|z| > \sqrt[3]{2}$ alors $\sum (-2)^n z^{3n}$ diverge donc $R = \sqrt[3]{2}$, d'après la règle de d'Alembert

8. $a_{2n} = 2^n, a_{2n+1} = -3$. Si $\sum a_n z^n$ converge absolument, alors par sommabilité :

$$\sum 2^n |z|^{2n} \text{ et } \sum 3|z|^{2n+1} \text{ converge}$$

donc $R = \dfrac{1}{2}$

9. $\exists F \in \mathbb{C}(X) \setminus \{0\} / \forall n \in \mathbb{N}, a_n = F(n)$, par exemple, $a_n = \frac{3n^2 - n^4 + 1}{n^5 + 8}$
:Si $F = \frac{P}{Q}$ avec $\begin{cases} \deg(P) = k, \gamma(P) = a \neq 0 \\ \deg(Q) = l, \gamma(Q) = b \neq 0 \end{cases}$
$|a_n| \sim \|\frac{a}{b}\| n^{k-l} \neq 0 \Rightarrow \|\frac{a_{n+1}}{a_n}\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, R = 1$

9.1.3 Propriétés élémentaires

Théorème

> Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R alors $\sum a_n \lambda z^n$ a pour rayon de convergence R, et $\sum \lambda^n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{R}{|\lambda|}$

Preuve : comme $\lambda \neq 0, \sum a_n z^n$ converge $\Leftrightarrow \sum \lambda a_n z^n$ converge
Si $|z| < \frac{R}{|\lambda|}, |\lambda z| < R \Rightarrow \sum \lambda^n a_n z^n$ converge absolument
Si $|z| > \frac{R}{|\lambda|}, |\lambda z| > R \Rightarrow \sum \lambda^n a_n z^n$ diverge

Comparaison

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R_a et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_b

1. $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$
2. $|a_n| = O(|b_n|) \Rightarrow R_a \geq R_b$
3. $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$

Preuve :

1. $|z| < R_b \Rightarrow |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc $R_a \geq R_b$
2. $\exists M \geq 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n| \leq M|b_n|$, puis on applique 1.
3. $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow \begin{cases} |a_n| & = O(|b_n|) \\ |b_n| & = O(|a_n|) \end{cases}$

Exemples

1. $a_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(t)dt, \forall t \in [0; \frac{\pi}{2}] t \leq \sin(t) \leq 1$, par concavité :
$$\frac{2}{\pi(n+2)}(\frac{\pi}{2})^{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}(\frac{\pi}{2})^{n+1}$$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\pi}{2}, R_a = \frac{2}{\pi}$
2. $a_n = 2 + (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq a_n \leq 3, R_a = 1$
3. $a_n = 1 + e^{in\theta}, \theta \in]0; 2\pi[, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 2 \Rightarrow R_a \geq 1$
$\sum a_n$ diverge, car le terme général ne tend pas vers 0, il y a divergence grossière, $z = 1$, donc $R_a = 1$

Troncature

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a. Alors la série $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n z^n$ (définie par $\sum a'_n z^n$ avec $\begin{cases} a'_n & = 0 \text{ si } n \leq n_0 - 1 \\ a'_n & = a_n \text{ si } n \geq n_0 \end{cases}$) a pour rayon de convergence R_a
$\sum a_{n+n_0} z^n$ converge a pour rayon de convergence R_a

Preuve : $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n z^n$ converge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ converge
Et si $z \neq 0$, $\sum\limits_{n \geq 0} a_{n+n_0} z^n$ converge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n \geq 0} a_{n+n_0} z^{n+n_0}$ converge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n \geq n_0} a_n z^n$ converge

Sommes de Cauchy

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b. Le rayon de convergence R_S de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

$$R_S \geq \min(R_a, R_b)$$

Si de plus $R_a \neq R_b$ alors $R_S = \min(R_a, R_b)$

Preuve : si $|z| < \min(R_a, R_b), \sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, donc $\sum (a_n + b_n) z^n$, ainsi $R_S \geq \min(R_a, R_b)$

Si $R_a < R_b$, soit $z \in \mathbb{C}/|z| \in]R_a, R_b[$: $\begin{cases} \sum b_n z^n \text{ converge} \\ \sum a_n z^n \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n$ diverge

Ainsi $R_S \leq R_a$, finalement $R_S = R_a$

⚠Si $R_a = R_b$, on ne peut rien dire :

$a_n = b_n = 1, R_a = R_b = 1$

$a_n = 1 = -b_n, R_a = R_b = 1$ et $R_S = +\infty$

Produit de Cauchy

Soit

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Le rayon de convergence R_p de $\sum c_n z^n$ vérifie $R_p \geq \min(R_a, R_b)$. De plus si $|z| < \min(R_a, R_b)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p) \times (\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q)$$

Preuve : si $|z| < \min(R_a, R_b))$, la famille $(a_p z^p b_q z^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, en regroupant

$$I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p + q = n\}, \mathbb{N}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{(p,q)\in I_n} a_p b_q z^{p+q}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p) \times (\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q)$$

⚠Même lorsque $R_a \neq R_b$, on peut avoir $R_p > \min(R_a, R_b)$

Soit $\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = -1 \; R_a = +\infty \\ \forall p \geq 2, a_p = 0 \end{cases}$

$$\forall q \in \mathbb{N}, b_q = 1, R_b = 1$$

$c_0 = a_0 b_0 = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = 0$$

donc $R_p = +\infty > \min(R_a, R_b)$

Dérivation formelle

Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_a, alors la série entière dite "dérivée formelle" $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ a le même rayon de convergence, ainsi que $\sum n a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ("primitive formelle") et la sréie entière dérivée p-ième formelle

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$$

Preuve : par troncature $\sum (n+1)a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum n a_n z^n$, R'_a Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq |n a_n|, R_a \geq R'_a$. De plus, soit $z \in \mathbb{C}/|z| < R_a$ et $r \in]|z|; R_a[$. On a :

$$|n a_n z^n| = |a_n r^n| \times n||\frac{z}{r}||^n = o(|a_n r^n|)$$

donc $\sum n a_n z^n$ converge absolument et $R'_a = R_a$. Le reste s'en déduit immédiatement

9.2 Propriétés analytiques

9.2.1 Convergence normale sur les compacts du disque ouverts

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $\rho < R$, la série de fonctions $\sum a_n z^n = \sum f_n(z)$ convergence normalement sur $\overline{D(0,\rho)}$ et plus généralement sur les compacts du disque ouverts de convergence (mais pas a priori sur le disque ouvert !!!)

Preuve : soit $z \in \overline{D(0,\rho)}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| \leq |a_n|\rho^n$, terme général d'une SATP convergente car $\rho < R$. Plus généralement si K compact non vide tel que $K \subset D(0, \rho)$
Soit $\rho = \max_{z\in K} |z|$, atteint car $\|.\|$ continue sur $K, \rho < R$ et $K \subset \overline{D(0,\rho)}$
⚠Si $\sum |a_n| R^n < +\infty$, on a même convergence normale sur $\overline{D(0,\rho)}$. Ce n'est pas forcément le cas !! cf $a_n = 1, R = 1, ||f||_{\infty, D(0,1)} = 1$

Convergence radiale d'Abel (HP)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence. Soit $z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| = R$. On suppose que $\sum a_n z_0^n$ est convergente. Notons en cas de convergence :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Alors $\lim_{t\to 1} S(tz_0) = S(z_0)$, la fonction somme est continue sur $[0; z_0]$

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{cccc} f_n : & [0;1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & a_n t^n z_0^n \end{array}$ et montrons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1[$. Pour ce faire, effectuons une transformation d'Abel, en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{j=n}^{+\infty} a_j z_0^j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\sum a_j z_0^j$ converge. Il vient : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n z^n = B_n - B_{n-1}, \forall t \in [0;1[, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{+\infty} a_n t^n z_0^n &= \sum_{n=N}^{+\infty} t^n B_n - \sum_{n=N}^{+\infty} t^{n+1} B_{n+1} \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} t^n B_n - \sum_{n=N}^{+\infty} t^{n+1} B_n \\ &= t^N B_N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (t^n - t^{n-1}) B_n \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |B_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0, \forall t \in [0;1[$

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n t^n z_0^n \| &\geq t^N \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (t^{n+1} - t^n) \frac{\varepsilon}{2} \\ &= t^N \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1[$, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites

Remarques

De même on peut montrer qu'on a converger uniformément sur un secteur angulaire. Pour θ_0 fixé $\in [0; \frac{\pi}{2}[$

$$D_{\theta_0} = \{z \in D(0,R) / Arg(\frac{z - z_0}{z_0}) \in] - \theta_0; \theta_0[\}$$

Pour une série alternée, on utilise fréquemment ce résultat. On majore le reste en utilisant le CSSA :

$$\| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n t^n R^n \| \leq |a_N| t^N R^N \leq |a_N| R^N$$

Exemple

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1}, R = 1$$

convergence pour $t = 1$. D'après le CSSA :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1[, \| \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1} \| \leq \frac{t^N}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il y a convergence uniforme sur $[0;1[$ et

$$\lim_{t\to 1^-} S(t) = S(1)$$

Soit $\theta \in]0;2\pi[$, on sait par transformation d'Abel que $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$, d'après le théorème

$$\lim_{t\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$$

On peut calculer $S(t)$ en dérivant termes à termes, $\sum t^{n-1}e^{in\theta}$ converge normalement sur $[0;\alpha]$ avec $\alpha < 1$, donc S est dérivable sur $[0;\alpha], \forall \alpha < 1$, donc sur $[0;1[$. $S'(t) = \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}$ qu'on primitive en séparant parties réelles et imaginaires, en tenant compte de $S(0) = 0$

9.2.2 Continuité, dérivabilité

Continuité

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors la fonction somme

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur le disque ouvert $D(0,R)$

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, z \mapsto a_n z^n$ est continue, on a convergence normale sur les compacts de $D(0,R)$: S est continue sur les compacts du disque ouvert $D(0,R)$, donc sur $D(0,R)$

Corollaire

Avec les mêmes notations, S est continue sur $]-R;R[$, le théorème de convergence radiale garantit que si S converge en $-R$ ou R, elle y est continue en tant que fonction d'une variable réelle

Dérivabilité

La fonction somme d'une série entière

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

de rayon de convergence $R > 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$ et $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in]-R;R[$

$$S^{(p)}(t) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n t^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n$$

Preuve : pour $\begin{array}{cccc} f_n : &]-R;R[& \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & a_n t^n \end{array}$ $\mathcal{C}^\infty$. On sait que $\forall p \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n$$

est R et on a convergence sur les segments de $]-R;R[$

Corollaire

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$$

Unicité du développement en série entières

Soit

$$S_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ et } S_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

de rayon de convergence respectif R_1 et R_2. On suppose qu'il existe $r > 0 / \forall t \in]-r;r[, S_1(t) = S_2(t)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$ ($S_1 = S_2$ partout où elles sont définies)

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S_1^{(n)}(0)}{n!} = \frac{S_2^{(n)}(t)}{n!} = b_n$

Remarque

Si deux séries entières coïncident au voisinage de 0, leurs coefficients sont égaux et elles sont égales. On dit qu'on a unicité du développement en série entière

Développement limité

$\forall n \in \mathbb{N}, S$ admet un $dl_n(0)$:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + o(z^{n+1})$$

Preuve : on peut écrire :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^n + z^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n+1} z^k$$

Primitivation

Soit

$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

la fonction d'une série entière de rayon de convergence $R>0, F$ une primitive de S sur $]-R;R[$, on a

$$\forall t\in]-R;R[, F(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}+F(0)$$

Preuve : définissons

$$G(t)=F(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}$$

série entière de rayon de convergence R (primitive formelle de F), G est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$ et $G'(t)=S(t)$. Comme $G(0)=F(0)$ alors

$$\forall t\in]-R;R[, G(t)=F(t)$$

Exemples

1.

$$\forall t\in]-1;1[, \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

En primitivant :

$$\forall t\in]-1;1[, \ln(1-t)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}, \ln(1+t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^{n+1}$$

Par continuité de ln en 2 :

$$\ln(2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

2.

$$\forall t\in]-1;1[, \frac{1}{1+t^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}(-t^2)^p$$

$$\arctan(t)=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{2p+1}$$

9.3 Développements en séries entières

9.3.1 Position du problème

Définition

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière (DSE), au voisinage de z_0 (ou en z_0) $\in \mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\exists R_0 > 0, \exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \forall h \in \mathbb{C}, |h| < R_0 \Rightarrow f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

De même pour un DSE réel, en se limitant à $h \in]-R_0; R_0[$

Exemples

1. $$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$, soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $h \in \mathbb{C} / z_0 + h \neq 0$

$$\frac{1}{z_0 + h} = \frac{1}{z_0} \times \frac{1}{1 + \frac{h}{z_0}}$$

Pour $|h| < |z_0|, \| \frac{h}{z_0} \| < 1$

$$\frac{1}{z_0 + h} = \frac{1}{z_0} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n h^n}{z_0^n}$$

Cas réel

Pratiquement, on peut toujours se ramener à un DSE en 0, en formant $g(h) = f(t_0 + h)$. S'il existe $R > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \forall h \in]-R; R[$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

notons que $R_0 \leq R$, rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. f est nécessairement, $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

On forme dans ce cas, la série dite de Mac-Laurin de f, $\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, dont on évalue le rayon de convergence de R, reste alors à vérifier qu'il existe $R_0 \leq R / \forall t \in]-R_0; R_0[$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

Problème

Ce n'est pas parce que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que sa série de Mac-Laurin a un rayon de convergence $R > 0$, qu'on a forcément :

$$\forall t \in]-R_0; R_0[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

Exemple $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-\frac{1}{x^2}), x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}$

$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. La série de Mac-Laurin (série nulle) a un rayon de convergence infini, mais f ne coïncide avec cette série qu'en 0, donc n'est pas DSE

9.3.2 Propriétés

Théorèmes

1. Unicité : si f est DSE au voisinage de 0 avec :

$$\forall t \in]-R; R[, f(t) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

alors ce développement est unique et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

2. Avec les mêmes hypothèses, f admet un $dl_n(0)$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + O(t^{n+1})$$

3. Si f est paire (resp. impaire) alors les coefficients $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$ (resp. $a_{2n} = 0$)

Preuve : 3. si f est paire :

$$\forall t \in]-R; R[, f(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n = f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Par unicité du développement en série entière : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n a_n$

Combinaison linéaire, produit de Cauchy

Si f et g sont DSE au voisinage de 0 avec :

$$\forall t \in]-r_1; r_1[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$\forall t \in]r_2; r_2[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

On pose $r = \min(r_1, r_2)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda f + g$ et fg sont DSE, et $\forall t \in] - r, r[$

$$(\lambda f + g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) t^n$$

$$(fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) t^n$$

Dérivation, primitivation

Si f est DSE au voisinage de 0 avec

$$\forall t \in] - R; R[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

alors f' (resp. $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}$) est DSE avec

$$\forall t \in] - R; R[, f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

$$f^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n$$

Si F est une primitive de f sur $] - R; R[, F$ est DSE et :

$$\forall t \in] - R; R[, F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

Composition (HP)

Principe général

Soit f et g DSE au voisinage de 0, avec $g(0) = 0$

$$\forall z \in D(0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$$\forall u \in D(0, \alpha), g(u) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p u^p, b_0 = 0$$

g étant continue en 0, pour $|u|$ suffisamment petit, $|g(u)| < \frac{r}{2}$

$$f(g(u)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\sum_{p=0}^{+\infty} b_p u^p)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p=0}^{+\infty} c_{n,p} u^p$$

$c_{n,p}$, coefficients du produit de Cauchy. On veut appliquer le théorème de Fubini. Pour ce faire, on forme :

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n \text{ et } \tilde{g}(u) = \sum_{p=0}^{+\infty} |b_p| z^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \tilde{g}(u)^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{c_{n,p}} u^p$$

$\tilde{g}(0) = 0$ et $\tilde{g}$ continue en 0, donc $\exists \beta > 0 / |u| < \beta \Rightarrow |\tilde{g}(u)| \leq \frac{r}{2}$

$$\tilde{f}(\tilde{g}(u)) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{c_{n,p}} |u|^p < +\infty$$

car $|\tilde{g}(|u|)| < r$. Or les règles du produit de Cauchy impliquent que :$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, |c_{n,p}| < \tilde{c_{n,p}}$, donc si $|u| < \beta$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |a_n c_{n,p} u^p| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p=0}^{+\infty} |a_n| \tilde{c_{n,p}} |u|^p) < +\infty$$

Ainsi la famille $(u_n c_{n,p} u^p)_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, d'après le théorème de Fubini :

$$f(g(u)) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n c_{n,p} u^p$$

donc $f \circ g$ est DSE en 0.On remarque que lorsque les (b_p) sont positifs : $\tilde{g} = g$ et $\tilde{c_{n,p}} = c_{n,p}$

Exemple

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}, f(u) = \frac{1}{1+u}$$

9.3.3 Développement obtenu par la formule de Taylor

Exemple : $(1+t)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ et $\begin{array}{rccc} f: &]-1;+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & (1+t)^\alpha \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$

$\forall t > -1, \forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(t) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-p+1)(1+t)^{\alpha-p}$

Posons $\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!} \neq 0$, car $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\frac{|a_{p+1}|}{|a_p|} = \frac{|\alpha - p|}{p+1} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après le règle de d'Alembert, $R = 1$. Fixons $t \in]-1;1[$ et formons pour $n \in \mathbb{N}$

$$R_{n,f}(t) = f(t) - \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} t^p = \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du = \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-n)(1+u)^{\alpha-n-1} du$$

Soit $\begin{array}{cccc} g: & [0;\tilde{t}] & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \frac{t-u}{1+u} = \frac{t+1}{u+1} - 1 \end{array}$ est décroissante sur $[0;\tilde{t}], g(t) = 0$

$$|R_{n,f}(t)| \leq \frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)|}{n!} |\int_0^t g(u)^n |1+u|^{\alpha-n-1} du| \leq \frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)|}{n!} |t|^n| \int_0^t |1+u|^{\alpha-1} du|$$

Le rayon de convergence de $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} C z^n$ est 1 d'après la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)|}{n!} C|t|^n = 0$$

Finalement :

$$\forall t \in]-1;1[, f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} t^p$$

$$\forall t \in]-1;1[, (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} t^n$$

Cas $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

$$\forall t \in]-1;1[, \frac{1}{\sqrt{1+t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n$$

diverge en -1 et en 1, d'après le CSSA. Par conséquent :

$$\forall t \in]-1;1[, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n!)}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}$$

En primitivant sachent que $\arcsin(0) = 0$:

$$\forall x \in [-1;1], \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

qui converge en -1 et en 1

Cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1} n((n-1)!)^2}$

$$\forall t \in]-1;1[, \sqrt{1+t} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)} t^{n+1}$$

Remarque pour $\alpha \in \mathbb{N}, (1+t)^\alpha$ est polynomial et $R = +\infty$

Fonctions trigonométriques

On définit sur $\mathbb{C}$,

$$\forall z \in \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \text{ et } \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, ch(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \text{ et } sh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$

Ces applications sont DSE (cf infra)

Théorème

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \cos(z) & = ch(iz) \\ \sin(z) & = \frac{1}{i} sh(iz) \end{cases} \forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} ch(z) = \cos(iz) \\ sh(z) = \frac{1}{i}\sin(iz) \end{cases}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), \tan(z) = \tfrac{1}{i} th(iz) \text{ et } \forall z \in \mathbb{C} \setminus i(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), th(z) = \tfrac{1}{i}\tan(iz)$$

9.3.4 Développements en série entières usuels

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, ch(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, sh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall z \in B(0,1), \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B(0,1), \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$$

$$\forall x \in [-1;1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in [-1;1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

$$\forall x \in [-1;1], \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in [-1;1], \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\forall x \in [-1;1], \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - 1)$$

$$\forall x \in]-1;1[, \sqrt{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} x^n$$

$$\forall x \in]-1;1[, \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$$

$$\forall x \in]-1;1[, argth(x) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in [-1;1], argsh(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{C}, argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

9.3.5 Fractions rationnelles

Méthode générale

Soit $F \in \mathbb{C}(X)/$ 0 n'est pas un pôle de F
$F = \frac{P}{Q}, (P,Q) \in \mathbb{C}[X] \times (\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}), P \wedge Q = 1, Q(0) \neq 0, \deg(Q) \geq 1$

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

$$F(X) = E(X) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}$$

On se ramène à développer $\frac{1}{(z-\alpha)^k}, \alpha \in \mathbb{C}^*, k \geq 1$

$$\frac{1}{(z-\alpha)^k} = (\frac{-1}{\alpha})^k \times \frac{1}{(1-\frac{z}{\alpha})^k}$$

DSE sur $D(0,\alpha)$ par produit de Cauchy. Par ailleurs,

$$\forall t \in]-1;1[, \frac{1}{(1-t)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k-1} t^n$$

Par unicité, $\forall z \in D(0,|\alpha|)$:

$$\frac{1}{(1-\frac{z}{\alpha})^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k-1} \frac{z^n}{\alpha^n}$$

Par combinaison linéaire f est DSE sur $D(0,R)/R = \min_{1\leq i\leq r}(|\alpha_i|) > 0$

$$\forall z \in D(0,R), F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Si le rayon de convergence R' de $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ était $> R$, soit α_{i_0} un pôle de module R, S serait définie continue en α_{i_0}, absurde donc $R' = R$

Remarque

Pour obtenir les coefficients du développement, on a intérêt à écrire :

$$\forall z \in D(0,R), P(z) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n) Q(z)$$

et identifier

Exemple

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Leftrightarrow 1 = (1+z+z^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n$$

Par unicité du DSE, $\forall n \geq 2, a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_0 + a_1 & = 0 \\ a_1 & = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{3p} & = 1 \\ a_{3p+1} & = -1 \\ a_{3p+2} & = 0 \end{cases}$$

Autre méthode :

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1-z}{1-z^3} \Rightarrow 1-z = (1-z^3)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n+3} z^n$$

9.3.6 Développement obtenu à partir d'une équation différentielle / fonctionnelle

Équation différentielle

Soit une équation différentielle linéaire de la forme :

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t) \tag{9.1}$$

où a_0, a_1, a_2 sont des fonctions polynomiales en t et b est DSE sur $]-R;R[$

$$\forall t \in]-R;R[, b(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n t^n$$

Si f est DSE et solution de (9.1) au voisinage de 0, avec $\forall t \in]-R;R[$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n$$

alors on peut évaluer le coefficient en t^n de $a_0(t)f''(t) + a_1(t)f'(t) + a_2(t)f(t)$, par unicité ce coefficient vaut β_n. On obtient alors des relations de récurrence sur les $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple

Soit $f(t) = \arcsin(t)^2$ est DSE sur $[-1;1]$, par produit de Cauchy, $\exists(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/$

$$\forall t \in [-1;1], f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{2n+1} = 0$$

On a par ailleurs, $f'(t) = \frac{2\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ et $f''(t) = \frac{2}{1-t^2} + \frac{2t\arcsin(t)}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$
$(1-t^2)f''(t) = tf'(t) + 2 \Leftrightarrow (1-t^2)f''(t) - tf'(t) = 2$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n t^{n-1} \Rightarrow tf'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n t^n$$

$$f''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\alpha_{n+2}t^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n t^{n-2} \Rightarrow t^2 f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n t^n$$

Ainsi,

$$(1-t^2)f''(t) - tf'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)(n+2)\alpha_{n+2} - (n(n-1)+n)\alpha_n)t^n = 2$$

$\forall t \in]-1;1[$, par unicité :
$n = 0 : 2\alpha_2 - 4\alpha_0 = 2$. Notons que : $\alpha_0 = f(0) = 0$ et $\alpha_1 = f'(0) = 0$
$\forall n \geq 1, \alpha_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\alpha_n$
Par récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}, \alpha_{2p+1} = 0$ et $\forall p \geq 1$:

$$\alpha_{2p} = \frac{(2p-2)^2 \times \ldots \times 2^2}{(2p) \times \ldots \times 4 \times 3}\alpha_2 = \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}$$

De plus pour $z \neq 0$ et $p \geq 1$, soit :

$$u_p = |\alpha_{2p} z^{2p}| > 0$$

$\frac{u_{p+1}}{u_p} = |z|^2 \frac{\alpha_{2(p+1)}}{\alpha_{2p}} = \frac{4p^2}{(2p+1)(2p+3)}|z|^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2$

D'après la règle de d'Alembert : $\begin{cases} |z| < 1 : \sum u_p \text{ converge} \\ |z| > 1 : \sum u_p \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow R = 1$

Remarque

Le théorème de Cauchy-Lipschitz justifie que si une fonction des DSE est solution de (9.1) sur $]-R; R[$, et vérifie le même produit de Cauchy que f alors $f = g$ sur $]-R; R[$

Équation fonctionnelle

Soit une suite (α_n) vérifiant une relation de récurrence. Pour calculer les (α_n), il est intéressant de former la série génératrice de la suite (α_n) :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$$

si le rayon de convergence de $S(z)$ est strictement positif alors la relation de récurrence vérifiée par les (α_n) procure une équation fonctionnelle ou différentielle satisfaite par S. Réciproquement, f est solution de cette équation et est DSE avec

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

l'équation fournit une relation de récurrence sur les (γ_n), qui permet le cas échéant d'identifier les (γ_n) aux (α_n)

Exemple

Calculer le terme général de la suite définie par $\alpha_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k}$$

Soit $S(z)$ la série génératrice associée à la suite (α_n). Supposons que le rayon de convergence R de S est strictement positif. Alors :

$$\forall z \in D(0,R), S(z) - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k}) z^{n+1} = zS(z)^2$$

$\forall t \in]-R; R[, tS(t)^2 - S(t) + 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4t$, si $|t| < \min(R; \frac{1}{4}) = \alpha, \exists \varepsilon(t) \in \{1; -1\} / S(t) = \frac{1+\varepsilon(t)\sqrt{1-4t}}{2t}$
$\forall t \in]-\alpha; \alpha[, \varepsilon(t) = \frac{2tS(t)-1}{\sqrt{1-4t}}$ continue à valeurs dans $\{-1; 1\}$, donc constante sur $]0; \alpha[$ et $]-\alpha; 0[$.

Or S est continue en 0, donc $\forall t \in]-\alpha;\alpha[\setminus\{0\}, \varepsilon(t) = -1$ et $S(0) = 1$

Réciproquement, formons $f : \begin{array}{ccc}]-\frac{1}{4};+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} \\ 0 & \mapsto & 1 \end{array}$

$$\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{1}{2t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\frac{(-4t)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)}t^n, \forall t \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$$

Comme $\forall t \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[, tf(t)^2 = f(t) - 1$. On a par produit de Cauchy : $\gamma_0 = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k\gamma_{n-k}$$

donc par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_{n+1} = \alpha_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)}$$

Remarque

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ car somme d'une série entière. De même

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p+1)!}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $sinc : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x} \\ 0 & \mapsto & 1 \end{array}$ l'est aussi

De même, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{e^x-1} \\ 0 & \mapsto & 1 \end{array}$. Posons $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & sinc(x) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x-1}{x} \\ 0 & \mapsto & 1 \end{array}$

$$f_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p+1)!} \text{ et } f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ elles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc f aussi d'après les théorèmes généraux de la classe

9.4 Séries génératrices

9.4.1 Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire discrète dans $\mathbb{N}$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(X = n) \geq 0, \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

Soit $t \in [-1; 1]$ et la variable aléatoire discrète $\begin{array}{cccc} t^X : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & t^{X(\omega)} \end{array}$

On définit la fonction génératrice de la variable aléatoire X :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

c'est une série entière de rayon de converge supérieur ou égal à 1

Preuve :

$$\forall t \in [-1; 1], \sum_{n=0}^{+\infty} p_n |t|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 < +\infty$$

donc t^X a une espérance finie et sa série génératrice a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1

Loi de Bernoulli

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p), p_0 = 1 - p, p_1 = p$ et $\forall n \geq 2, p_n = 0$

$$G_X(t) = 1 - p + pt, R = +\infty$$

Loi binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \forall k \in [|0; n|], p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \forall m > n, p_m = 0$

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (1 - p + pt)^n, R = +\infty$$

Loi de Poisson

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \forall n \in \mathbb{N}, p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n = e^{\lambda(t-1)}, R = +\infty$$

Loi géométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), p_0 = 0, \forall n \geq 1, p_n = (1-p)^{n-1}p$

$$\forall t \in [-1;1], G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n = \frac{pt}{1-(1-p)t}, R > 1$$

9.4.2 Propriétés

Propriétés analytiques

G_X est continue sur $[-1;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$

Preuve : comme $G_X(1) = 1$, la série converge normalement sur $[-1;1]$ donc y est continue. De plus, G_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[\supset]-1;1[$

Remarque

On peut avoir $R = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=0) = 0 \text{ et } P(X=n) = \frac{6}{(\pi n)^2}$$

Corollaire

Si 2 variables aléatoires discrètes ont même fonction génératrice, elles ont la même loi. La fonction génératrice caractérise la loi de probabilité

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$
Si $G_X = G_Y$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = P(Y=n)$

Remarque

Ce résultat permet d'identifier la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction génératrice

Théorème

Si X et Y sont deux variables discrètes indépendantes, on a :

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

Preuve : $\forall t \in [-1;1], G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y)$. Or t^X et t^Y sont indépendantes, donc :

$$G_{X+Y}(t) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$$

Corollaire

Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes alors :

$$G_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}$$

Loi binomiale

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ indépendantes :

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = (1-p+pt)^{n_1}(1-p+pt)^{n_2} = (1-p+pt)^{n_1+n_2}$$

c'est la fonction génératrice d'une v.a : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2, p) \Rightarrow X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$

Loi de Poisson

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ indépendantes :

$$G_{X_1+X_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$$

Par caractérisation : $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Théorème

Soit X v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. X a une espérance finie $\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 1^-} G'_X(t) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow G_X$ dérivable en 1^-

   Dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = G'_X(1)$$

2. X admet un moment d'ordre 2 $\Leftrightarrow G_X$ est deux fois dérivable en 1

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 p_n = G''_X(1) + G'_X(1)$$

   Par conséquent : $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Preuve :

1. X a une espérance finie $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} np_n < \infty$.

$$\forall t \in]-1;1[, G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n t^{n-1}$$

$\forall t \in [0;1[, |np_n t^{n-1}| \leq np_n$ terme général d'une SATP convergente, donc $\sum np_n t^{n-1}$ converge normalement sur $[0;1[$, on peut intervertir $\lim\limits_{t\to 1^-}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{t\to 1^-} G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = E(X) \in \mathbb{R}$$

donc G'_X est continue en 1, d'après le théorème de prolongement de la dérivée, G_X est dérivable en 1 et

$$G'_X(1) = \lim_{t\to 1^-} G'_X(t)$$

Supposons que G_X soit dérivable en 1, soit $t \in [0;1[$,

$$\varphi(t) = \frac{G_X(1) - G_X(t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n \frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1+t+\ldots+t^{n-1})$$

fonction de t croissante sur $[0;1[$, donc :

$$G'_X(1) = \lim_{t\to 1^-} \varphi(t) = \sup_{t\in[0;1[} \varphi(t)$$

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0;1[, \sum_{n=1}^{N} p_n(1+t+\ldots+t^{n-1}) \leq \varphi(t) \leq G'_X(1)$$

car ce sont des SATP. N étant fixé, lorsque $t \to 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} np_n \leq G'_X(1)$$

on a bien une espérance finie

2. De même, en utilisant :

$$G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p_n t^n$$

9.4.3 Processus de Galton-Watson (HP)

Soit X variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (par exemple le nombre de garçons à une génération donnée). On suppose que $P(X=0) > 0$ et $P(X=0) + P(X=1) < +\infty$. On note φ la fonction génératrice de X, $\varphi = G_X$. On donne une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi que X, $X_{n,p}, n \in \mathbb{N}^*$ et on définit

$$Z_0 = 1 \textbf{ et } Z_{n+1} = \sum_{p=1}^{Z_n} X_{n,p}$$

Z_n désigne donc le nombre de garçons à la n-ième génération
La fonction φ est deux fois dérivable, si on suppose que X admet une espérance finie m :

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)P(X=n+1)t^n > 0 \Rightarrow \varphi''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)P(X=n+2)t^n$$

φ est croissante et strictement convexe sur $[0;1]$. Posons désormais $\varphi_n = G_{Z_n}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{n+1}=k)t^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(\sum_{l=0}^{+\infty} P((Z_n=l)\cap(\sum_{p=1}^{l} X_{n,p}=k))t^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} P(Z_n=l)P(\sum_{p=1}^{l} X_{n,p}=k)t^k < +\infty \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} P(Z_n=l)\sum_{k=0}^{+\infty} P(\sum_{p=1}^{l} X_{n,p}=k)t^k
\end{aligned}$$

Les $X_{n,p}$ étant indépendants de même loi :

$$\varphi_{n+1}(t) = \sum_{l=0}^{+\infty} P(Z_n=l)\varphi(t)^l = \varphi_n\circ\varphi(t)$$

On en déduit : $E(Z_n) = \varphi_n'(1) = \varphi'(1)\varphi_{n-1}'(\varphi(1)) = m^n$
Soit la variable aléatoire T le plus entier n tel que $Z_n = 0$

$$P(T<+\infty) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(T=n)) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n=0) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n=0) = \lim_{n\to+\infty}\varphi_n(0)$$

On notera que $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, on pose $u_n = \varphi_n(0)$ avec $u_0 > 0$. $u_{n+1} = \varphi_{n+1}(0) = \varphi(u_n)$, φ étant croissante, (u_n) est monotone. On a donc une limite l vérifiant $l = \varphi(l)$, car

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\varphi(u_n) = l$$

donc $P(T<+\infty)$ est une point fixe de φ. Soit a un autre point fixe de φ. Or $a>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_n < a$, donc $l\leq a$, l est le plus petit point fixe de φ
On pose $g(x) = \varphi(x) - x$. Pour h petit :

$$g(1-h) = g(1) - hg'(1) + o(h) = -h(m-1) + o(h) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $]0;+\infty[$, donc $P(T<+\infty) < 1$. Par stricte convexité, la courbe est strictement au-dessus de sa tangente sur $[0;1]$ et $\varphi(x) > x$, donc

$$P(T<+\infty) = 1 \Leftrightarrow m\leq 1$$

Chapitre 10

Intégration

Sommaire

10.1 Intégration sur un segment

Les grecs réalisèrent les premières approximations de calcul d'aire, avec la méthode d'exhaustion (Archimède, -120) : celle consiste à approcher l'aire du domaine, par celle de polygones dont on connait l'aire. Au XVIII siècle, Leibniz établit le lien entre calcul différentiel et calcul d'aire :

$$f = \frac{dF}{dt} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b dF = F(b) - F(a)$$

Vers 1850, parallèlement à l'axiomatisation des mathématiques, Riemann définit plus rigoureusement l'intégrale : à l'aide de subdivisions, il découpe le segment et réalise une approximation de la fonction par des fonctions en escaliers : il réalise un calcul de valeur moyenne, l'intégrale gomme donc du point de vue analytique les aspérités / irrégularité.
En 1905, Lebesgue propose de réaliser un découpage de l'ensemble des valeurs prise par la fonction, plutôt qu'un découpage de l'ensemble des valeurs prise par la variable comme dans la théorie de Riemann. Ce point de vue est plus riche que la théorie précédente. Par exemple, on peut calculer dans ce cadre :

$$\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}}(t)dt$$

Ce point de vue plus statistique est directement lié à la théorie de la mesure en probabilité. En effet, un ensemble dénombrable est négligeable devant un ensemble plus que dénombrable, donc :

$$\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}}(t)dt = 0$$

On notera que plus généralement, la théorie de Lebesgue s'étend aux espaces complets

10.1.1 Définition

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}, E$ un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f : [a;b] \to E, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$

1. Si $f \in \mathcal{E}([a;b], E)$ soit $\sigma = (a_0; ...; a_p)$ adaptée à f, avec

$$\forall i[|0; p-1|], f_{|]a_i;a_{i+1}[} = \lambda_i \in E$$

   On définit :

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{i=0}^{p-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$$

2. Si f est quelconque alors on forme (φ_n) une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a;b]$. On a :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \| \int_{[a;b]} \varphi_n - \int_{[a;b]} \varphi_m \| \leq \int_{[a;b]} \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq (b-a)\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty$$

   (φ_n) converge uniformément donc est une suite de Cauchy pour $\|.\|_\infty, (\int_{[a;b]} \varphi_n)$ est aussi de Cauchy pour $\|.\|_\infty$, donc elle converge car on est en dimension finie. En outre, si (ψ_n) est une autre suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f, on a :

$$\| \int_{[a;b]} \varphi_n - \int_{[a;b]} \psi_n \| \leq (b-a)\|\varphi_n - \psi_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On peut ainsi définit :

$$\int_{[a;b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a;b]} \varphi_n$$

On notera que pour les fonctions en escaliers, l'intégrale est linéaire et $\| \int_{[a;b]} \varphi_n\| \leq \int_{[a;b]} \|\varphi_n\|$

10.1.2 Propriétés

Théorème

1. Linéarité : $\forall (f,g,\lambda) \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b],E)^2 \times \mathbb{K}$

$$\int_{[a;b]} \lambda f + g = \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$$

   c'est une forme linéaire sur E
2. Positivité : si $E = \mathbb{R}$

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_{[a;b]} f \geq 0$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$$

3. Relation de Chasles : on pose,
   si $a < b$: $\int_a^b f(t)dt = -\int_{[a;b]} f$
   si $a > b$: $\int_a^b f(t)dt = \int_{[a;b]} f$
   de plus : $\int_a^a f(t)dt = 0$
   On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

4. Si l'ensemble $\{t \in [a;b]/f(t) \neq g(t)\}$ est fini alors :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} g$$

   On ne modifie pas l'intégrale lorsqu'on modifie la valeur de f en nombre fini de points
5. Si f est positive et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle en tout point de continuité. Si de plus f est continue, alors $f = 0$

Inégalité de la moyenne

Si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$

$$\| \int_{[a;b]} f \| \leq \int_{[a;b]} \|f\| \leq (b-a)\|f\|_{\infty,[a;b]}$$

Preuve : soit (φ_n) une suite de fonctions en escaliers qui convergent uniformément vers f sur $[a;b]$, on a priori :

$$\| \int_{[a;b]} \varphi_n \| \leq \int_{[a;b]} \|\varphi_n\| \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_{[a;b]} \varphi_n = \int_{[a;b]} f$$

Par ailleurs : $\forall t \in [a;b], |\|\varphi_n(t)\| - \|f(t)\|| \leq \|(\varphi_n - f)(t)\| \leq \|(\varphi_n - f)(t)\|_{\infty,[a;b]}$
Donc, $(\|\varphi_n\|)$ converge uniformément vers $\|f\|$ sur $[a;b]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[a;b]} \|\varphi_n\| = \int_{[a;b]} \|f\|$
Il s'ensuit que : $\| \int_{[a;b]} f \| \leq \int_{[a;b]} \|f\|$
Enfin, $\forall t \in [a;b], \|f(t)\| \leq \|f\|_{\infty,[a;b]}$, donc

$$\int_{[a;b]} \|f\| \leq (b-a)\|f\|_{\infty,[a;b]}$$

⚠Si on ne connait pas les positions respectives de a et b, on a seulement :

$$\| \int_a^b f \| \leq | \int_a^b \|f\||$$

Cas d'égalité, si $E = \mathbb{C}$

Soit f continue $[a;b] \to \mathbb{C}$, supposons que :

$$| \int_a^b f(t)dt | = \int_a^b |f(t)dt|$$

Posons $\int_a^b f = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = | \int_a^b f| \geq 0$. Il vient :

$$\rho = \int_a^b f(t)e^{-\theta}dt = | \int_a^b f(t)dt| = \int_a^b |f(t)|dt$$

$Re(\rho) = \rho = \int_a^b Re(\rho(t)e^{i\theta})dt = \int_a^b |f(t)|dt$, car $Re(\int_a^b f) = \int_a^b Re(f)$
Par conséquent, $\int_a^b (|f(t)| - Re(f(t))e^{-i\theta})dt = 0$, car $\forall z \in \mathbb{C}, Re(z) \leq |z|$, avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}_+$ alors $\forall t \in [a;b]$, donc $f(t)e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+$ et $f(t) = |f(t)|e^{i\theta}$, f a un argument constant sur $[a;b]$. Dans le cas particulier où f est à valeurs réelles continue :

$$| \int_a^b f| = \int_a^b |f| \Leftrightarrow f \text{ garde un signe constant}$$

Théorème

Soit F un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $f : [a;b] \to E$ est $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$, on a :

$$u(\int_a^b f) = \int_a^b u(f)$$

Preuve : u est continue car E est de dimension finie. Soit $(\varphi_n) \in \mathcal{E}([a;b],E)$ qui converge uniformément vers f sur $[a;b]$. Par linéarité de u : $\forall n \in \mathbb{N}, u(\int_a^b \varphi_n) = \int_a^b u(\varphi_n)$
Par continuité de u : $\lim\limits_{n\to+\infty} u(\int_a^b \varphi_n) = \int_a^b u(f)$
Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, u \circ \varphi_n$ est en escalier et

$$\|u\circ\varphi_n - u\circ f\|_{\infty,[a;b]} = \|u(\varphi_n - f)\|_{\infty,[a;b]} \leq |||u||| \cdot \|\varphi_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$u \circ \varphi_n$ converge uniformément vers $u \circ f$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b u\circ\varphi_n = \int_a^b u \circ f$$

Corollaire

1. Si $(e_1; ...; e_n)$ est une base de E et si $\forall t \in [a;b]$,
$$f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t) e_i$$
$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{i=1}^p f_i e_i = \sum_{i=1}^p (\int_a^b f_i) e_i$$
2. Si $E = \mathbb{C}$ alors,
$$\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i \int_a^b Im(f)$$

Preuve : pour $i \in [|1;p|]$, soit $\begin{array}{cccc} e_i^* & : & E & \to & \mathbb{K} \\ & & x = \sum\limits_{j=1}^p x_j e_j & \mapsto & x_j \end{array}$ est linéaire, donc :

$$e_i^*(\int_a^b f) = \int_a^b e_i^* \circ f = \int_a^b f_i \Rightarrow \int_a^b f = \sum_{i=1}^p e_i^*(\int_a^b f) e_i = \sum_{i=1}^p (\int_a^b f_i) e_i$$

10.1.3 Sommes de Riemann

Définition

Soit $\sigma = (a_0, ..., a_p) \in \Sigma([a;b])$ une subdivision de $[a;b]$ et $\forall i \in [|0;p|], \xi_i \in [a_i; a_{i+1}]$. On dit que $(\sigma, \xi) = ((a_0, ..., a_p), (\xi_0, ..., \xi_p))$ est une subdivision pointée. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$, on définit :

$$S(f, (\sigma, \xi)) = \sum_{i=0}^{p} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$$

somme de Riemann associée à $f, (\sigma, \xi)$

Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$. Soit $\varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (\sigma, \xi)$ subdivision, pointée de $[a;b]$, si $\delta(\sigma) \leq \alpha$ alors

$$\| \int_a^b f - S(f, (\sigma, \xi)) \| \leq \varepsilon$$

La somme de Riemann tend vers l'intégrale lorsque le pas de la subdivision tend vers 0

Preuve : si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$, on a :

$$\| \int_a^b f - S(f, (\sigma, \xi)) \| = \| \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(\xi_i) dt \|$$

Par inégalité de la moyenne :

$$\| \int_a^b f - S(f, (\sigma, \xi)) \| \leq \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \| f(t) - f(\xi_i) \| dt$$

f étant uniformément continue sur $[a;b]$. Soit $\varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x;y) \in [a;b]$,

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Si $\delta(\sigma) \leq \alpha$ alors $\| \int_a^b f - S(f, (\sigma, \xi)) \| \leq \varepsilon$, si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$ le seul problème est que les ξ_i peuvent être des points de discontinuité de f, mais cela n'advient que pour un nombre fixé de points, on majore pour ces points :

$$\| (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \| \leq \delta(\sigma) \| f \|_\infty$$

Subdivision régulière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (a + h\frac{b-a}{n})_{0 \leq k \leq n} \in \Sigma([a;b])$. On définit :

$$S_{1,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \text{ et } S_{2,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(a_k)$$

D'après le théorème :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{1,n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2,n} = \int_a^b f$$

c'est la méthode des rectangles. On a la majoration du reste suivante :

$$|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \int_a^b f(t)dt| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{n}$$

Il est généralement plus efficace d'utiliser la méthode des trapèzes, en formant :

$$T_n = \frac{1}{2}(S_{1,n} + S_{2,n})$$

Dans ce cas le reste est majoré par $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$

10.1.4 Intégrales et primitives

Intégrales de fonctions de la borne supérieure

Soi I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$, fixons $a \in I$, on définit : $\begin{array}{rccc} F_a : & I & \to & E \\ & x & \mapsto & \int_a^x f \end{array}$ intégrale fonction de la borne supérieure

1. F_a est continue
2. En tout point x_0 où f est continue, F_a est dérivable et : $F_a'(x_0) = f(x_0)$
3. Si $f \in \mathcal{C}^k_{\mathcal{M}}$ (resp. $\mathcal{C}^k$) alors F_a est $\mathcal{C}^{k+1}_{\mathcal{M}}$ (resp. $\mathcal{C}^{k+1}$)

Preuve :

1. Soit $M_0 = \sup_{t\in[x_0-\alpha_0;x_0+\alpha_0]\cap I} \|f(t)\|$, où $\alpha_0 > 0$ est tel que $[x_0-\alpha_0; x_0+\alpha_0] \cap I$ est compact. $\forall x \in [x_0-\alpha_0; x_0+\alpha_0] \cap I$

$$\|F_a(x) - F_a(x_0)\| \leq M_0|x - x_0| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

2. Pour $x \neq x_0$,

$$\|F_a(x) - F_a(x_0 - (x-x_0)f(x_0)\| = \|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\| \leq |\int_{x_0}^x \|f(t) - f(x_0)\|dt|$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0 / |t - x_0| \leq \alpha$ alors $\|f(t) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, il vient :

$$|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow \|F_a(x) - F_a(x_0 - (x-x_0)f(x_0)\| \leq \varepsilon|x - x_0| \Rightarrow \|\frac{F_a - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\| \leq \varepsilon$$

Théorème fondamental de l'intégration

Si f est continue sur I, elle y admet des primitives et deux primitives de f ne diffère que d'une constante

Preuve : soit $a \in I, F_a$ primitive de f. Si F est une autre primitive de f : $(F - F_a)' = f - f = 0$ sur I, donc $F - F_a \in E$

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$, soit $F : [a;b] \to E$ continue en $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$, tel que en tout point de continuité de $f : F' = f$. On a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Preuve : soit $^\sigma = (a_0; ...; a_p)$ adaptée à f $\forall i \in [|0; p-1|], \tilde{f}_i$ continue sur $[a_i; a_{i+1}]$:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}_i(t)dt$$

Or f est continue sur $[a_i; a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i; a_{i+1}[$ avec $F' = \tilde{f}_i$. D'après le corollaire, $\exists c \in E / \forall x \in]a_i; a_{i+1}[, F(x) = \int_{a_i}^x \tilde{f}_i(t)dt + C_i$, d'où par continuité de F sur $[a_i; a_{i+1}]$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

En sommant on obtient le résultat souhaité

Remarque

le théorème fondamental de l'intégration se généralise aux fonction continues par morceaux et $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$ continue, telle que en tout point de continuité de $f, F' = f$, c'est une primitive généralisée

Intégration par parties

Soient f et $g \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}([a;b], E)$, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Changement de variable

Soit f et φ deux fonctions continue, φ étant $\mathcal{C}^1$:

$$\int_a^b \varphi'(u)f(\varphi(u))du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

10.2 Intégration sur un intervalle

10.2.1 Définitions

Soit $I = [a; +\infty[$ (resp. $]-\infty; a], [a; b[,]a; b[,]a; b], (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \to \mathbb{K}, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$. Pour tout segment $[\alpha; \beta] \subset I$, on peut définir si possible $\int_I f$. A cette fin on observe le comportement de $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ lorsque α ou β tend vers une des bornes de I

Définition

On dit que $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$

Remarque

En termes d'aires, cela revient à dire que l'aire sous la courbe tend vers une limite finie lorsqu'une borne de l'intégrale tend vers une borne de I. On rencontrera deux types de difficultés :

1. lorsqu'une des bornes de I est infini
2. lorsque f n'a pas de limite en une borne finie de I

Exemples

1. $$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
   donc l'intégrale diverge
2. $$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$
   donc l'intégrale converge

Plus généralement pour $\alpha > 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

3.
$$\int_{-x}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

4. $\int_0^x \sin(t)dt = 1-\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \sin(t)dt$ diverge (n'a pas de limite)

5.
$$\forall x>0, \int_x^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)-t]_x^1 = x\ln(x)-x-1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

donc
$$\int_0^1 \ln(t)dt = -1$$

6.
$$\forall x>0, \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

donc l'intégrale diverge

7.
$$\forall x>0, \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2-2\sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 2$$

donc l'intégrale converge.

Plus généralement, si $\alpha<1$:
$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

8.
$$\forall x<1, \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2-2\sqrt{1-x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2$$

L'intégrale converge :
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2$$

9. En revanche, $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ diverge

10.
$$\forall x\in[0;1[, \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Par conséquent
$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$$

11. $\forall \lambda>0, \int_0^x e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}$

$$\forall \lambda > 0, \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

⚠Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{0} f + \int_0^x f$$

La réciproque est fausse!!!
$\forall x \geq 0, \int_{-x}^{x} tdt = 0 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, mais $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge car $\int_0^{+\infty} tdt = +\infty$
On a par exemple $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_0^{2k\pi} \sin(t)dt = 0$, mais cette intégrale n'a pas de limite en ∞ (2 méthodes deux calculs donnent deux résultats différents dans ce cas)

Convergence absolue

Soit $f : I \to \mathbb{K}, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$, on dit que l'intégrale $\int_I f$ converge absolument, ou que f est intégrable sur I et on note

$$\int_I |f| < +\infty \Leftrightarrow \int_I |f| \text{ convergence}$$

Si $\int_I |f|$ converge absolument alors $\int_I f$ converge

Preuve : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, définissons $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$ de sorte que :
$\begin{cases} f &= f^+ - f^- \\ |f| &= f^+ + f^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^+ &= \frac{f+|f|}{2} \\ f^- &= \frac{|f|-f}{2} \end{cases}$
f^+ et f^- sont $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ positives et $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. Si $I = [a; +\infty[$ (resp. $]a; b]$...) formons :
$\forall x \in I, \begin{cases} F(x) &= \int_a^x |f(t)|dt \\ F_1(x) &= \int_a^x f^+(t)dt \\ F_2(x) &= \int_a^x f^-(t)dt \end{cases}$
On a $\forall i \in [|1; 2|], F_i(x) \leq F(x)$ et F_i et F sont croissantes sur I (resp. décroissante). Comme F admet une limite finie en $+\infty$ (resp. a), on a :

$$\forall x \in I, \forall i \in [|1; 2|], F_i(x) \leq F(x) \leq \int_a^{+\infty} |f| = \sup_{x \in I} F(x)$$

donc F_i admet une limite finie quand $x \to +\infty$ (resp. a^+) et aussi $\int_a^x f = F_1(x) - F_2(x)$ (resp. $\int_a^b f = F_1(x) - F_2(x)$)
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: on écrit $\forall x \in I$

$$\int_a^x f = \int_a^x Re(f) + i \int_a^x Im(f)$$

Or $|Re(f)| \leq |f|$ et $|Im(f)| \leq |f|$. De même que précédemment, $\int_a^{+\infty} Re(f)$ et $\int_a^{+\infty} Im(f)$ converge absolument donc converge et aussi $\int_a^{+\infty} f$

Contre-exemple

On peut avoir convergence sans convergence absolue : on dit alors qu'il y a semi-convergence :
$$f : \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(-1)^{E(x)}}{E(x)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1, \int_1^x f &= \int_1^{E(x)} f + \int_{E(x)}^x f \\ &= \sum_{n=1}^{E(x)-1} \int_n^{n+1} f(t)dt + \int_{E(x)}^x \frac{(-1)^{E(x)}}{E(x)} dt \\ &= \sum_{n=1}^{E(x)-1} \frac{(-1)^n}{n} + \int_{E(x)}^x \frac{(-1)^{E(x)}}{E(x)} dt \end{aligned}$$

or, $|\int_{E(x)}^x \frac{(-1)^{E(x)}}{E(x)} dt| = |\frac{(-1)^{E(x)}}{E(x)}(x - E(x))| \leq \frac{1}{E(x)}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x f$ existe et vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$$

En revanche,

$$\forall N \geq 1, \int_1^N |f| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc $\int_1^{+\infty} f$ est semi-convergente

⚠Comme pour les séries, il ne suffit pas que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. De plus, cette condition n'est pas nécessaire (c'est la grande différence entre série et intégrale), on peut avoir $f \geq 0, \int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et f ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Soit f affine par morceaux continues / $\forall m \geq 2, f(n) = n$, f affine sur $[n - \frac{1}{n^3}; n]$ et sur $[n; n + \frac{1}{n^3}]$, enfin f nulle en dehors des $([n - \frac{1}{n^3}; n])$

$\int_1^x f$ converge car $f \geq 0$ et $\forall x \geq 1, \int_1^x f(t)dt \geq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

De plus

$$\int_1^{N+\frac{1}{N^2}} f(t)dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6} - 1$$

donc

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

10.2.2 Cas d'une fonction à valeurs positives

Théorème

Soit $f : I = [a;b[$ (resp. $]a;b]) \to \mathbb{R}_+, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ et $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (resp. $\int_x^b f(t)dt$). Alors f est croissante (resp. décroissante) et

$$\int_I f \text{ converge } \Leftrightarrow \exists M \geq 0 / \forall x \in I, F(x) \leq M$$

Dans ce cas, $\int_I f = \lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f = \sup\limits_{x \in I} F(x)$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^+} F(x)$)

Remarque

En cas de divergence, $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = +\infty$. On notera que le reste pour $f : I \to \mathbb{K}$, si $\int_I f$ converge alors

$$\lim_{x \to b} \int_x^b f = 0$$

(resp. $\lim\limits_{x \to a} \int_a^x f = 0$). Par exemple, si $\int_a^{+\infty} f$ converge alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} f = 0$, c'est le reste d'une intégrale convergente. Toujours si $f : I \to \mathbb{R}_+, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$, on a

$$\int_I f = \sup_{J \text{ segment } \subset I} \int_J f \in \overline{\mathbb{R}}$$

de manière analogue à la sommabilité

Comparaisons

Soient $f : I \to \mathbb{R}_+$ et $g : I \to \mathbb{R}_+, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$

1. $\begin{cases} f \leq g \\ g \text{ intégrable} \end{cases} \Rightarrow f$ intégrable

   De plus :

$$\int_I f \leq \int_I g < +\infty$$

2. Si $I = [a;b[$ (resp. $]a;b]$) si $f(t) = O(g(t))$

$$\int_I g \text{ converge } \Rightarrow \int_I f \text{ converge}$$

$$\int_I f \text{ diverge } \Rightarrow \int_I g \text{ diverge}$$

3. Si $f(t) \sim g(t)$ alors :

$$\int_I f \text{ converge } \Leftrightarrow \int_I g \text{ converge}$$

Preuve :

1. Si $\int_I g$ converge alors : $F(x) = \int_a^x f$ (resp. $\int_x^b$), $G(x) = \int_a^x f$
   $\forall x \in I, F(x) \leq G(x) \leq \int_I g$, d'après le théorème, $\int_I f$ converge. Par contraposée, si $\int_I f$ diverge alors $\int_I g$ diverge
2. $\exists M \geq 0, \exists c \in I / \forall t \in [c; b[: f(t) \leq Mg(t), (I = [a; b[)$. Alors,
   $$\forall x \in [c; b[, \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^c f(t)dt + M \int_c^x g(t)dt \leq \int_a^c f(t)dt + M \int_c^b g(t)dt \leq M'$$
   Ainsi $\int_a^b g$ converge
3. $f(t) \sim g(t) \Rightarrow f(t) = O(g(t))$ et $g(t) = O(f(t))$

Critère de Riemann

1. Si $I = [a; +\infty[$
   $$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1$$
2. Si $I =]a; b], a \in \mathbb{R}$
   $$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1$$
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}, i = [a; +\infty[$
   $$\exists \alpha > 1, f(t) = O(\frac{1}{t^\alpha}) \Rightarrow \int_I f \text{ converge}$$
   $$\exists \alpha \leq 1, f(t) = O(\frac{1}{t^\alpha}) \Rightarrow \int_I f \text{ diverge}$$
   $$f(t) \sim \frac{K}{t^\alpha}, \int_I f \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$
   $I =]a; b], a \in \mathbb{R}$
   $$\exists \alpha < 1, f(t) = O(\frac{1}{(t-a)^\alpha}) \Rightarrow \int_I f \text{ converge}$$
   $$\exists \alpha \geq 1, f(t) = O(\frac{1}{(t-a)^\alpha}) \Rightarrow \int_I f \text{ diverge}$$
   $$f(t) \sim \frac{K}{t^\alpha}, \int_I f \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Preuve :

1. $\forall x \geq a, \alpha \neq 1, F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{x^{1-\alpha}(1-\alpha)} - \frac{1}{a^{1-\alpha}(1-\alpha)}$, converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha < 1$
   $\int_x^b \frac{dt}{t^\alpha} = \ln(\frac{x}{a}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
2. Même méthode
3. Découle du théorème de comparaison

Remarque

Soit $x \in]0;1]$, en posany $u = \frac{1}{t}, dt = -\frac{du}{u^2}$

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^{2-\alpha}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}} \text{ converge } \Leftrightarrow 2-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Exemples

1. $\begin{array}{rccc} f: &]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{\sin(t)}{t}\ln(t) \end{array}$
   $|f(t)| \sim |\ln(t)| = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$, donc $\int_{]0;1]} f$ converge absolument
2. $\begin{array}{rccc} f: &]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t-1} \geq 0 \end{array}$
   $|f(t)| \sim |\ln(t)| = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$ et $|f(t)| \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 1$, d'après le critère de Riemann, $\int_{]0;1[} f$ converge absolument
3. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & e^{-t^2} \end{array}$, $f(t) = O(\frac{1}{t^2})$, donc d'après le critère de Riemann :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

   converge
4. Fonction gamma d'Euler : soit $x \in \mathbb{R}$, $\begin{array}{rccc} f: &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$ continue, positive
   $t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \sim e^{(x-1)\ln(t)}$

   $$\int_0^1 f \text{ converge } \Leftrightarrow x > 0$$

   $f(t) = O(\frac{1}{t^2})$, donc $\int_1^{+\infty} f$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} f$ converge $\Leftrightarrow x > 0$
   On pose alors :

   $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

   Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $Re(z) > 0$ et $\begin{array}{rccc} f: &]0;+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & t^{z-1}e^{-t} \end{array}$ est continue
   $\forall t > 0, |f(t)| = e^{(Re(z)-1)\ln(t)}e^{-t} = t^{Re(z)-1}e^{-t}$, on a convergence absolue si et seulement si $Re(z) > 0$, d'après ce qui précède, on pose :

   $$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

5. Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (\ln(t))^k t^{x-1}e^{-t} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
   $|f(t)| \sim |(\ln(t))^k t^{x-1}| = |\ln(t)|^k t^{x-1} = |\ln(t)|^k t^{\frac{x}{2}} t^{\frac{x}{2}-1} = O(t^{\frac{x}{2}-1})$, donc $\int_0^1 f$ converge
   $|f(t)| = O(\frac{1}{t^2})$, donc $\int_1^{+\infty} f$ converge, donc $\int_0^{+\infty} f$ converge

6. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t^2+1} \end{array}$ continue, positive sur $[1;+\infty[$ et négative sur $]0;1]$

$\int_0^1 f$ converge $\Leftrightarrow \int_0^1 -f$ converge $\Leftrightarrow \int_0^1 |f|$ converge
$\int_1^{+\infty} f$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} |f|$ converge
$|f(t)| \sim |\ln(t)| = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$, converge
$|f(t)| \sim \frac{\ln(t)}{t^2} = O(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$

$$\int_0^{+\infty} f \text{ converge absolument}$$

Remarques

Si $I =]a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{K}, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ vérifie : $f(t) = O(1)$, f est bornée au voisinage de a, d'après le critère de Riemann, $\int_I f$ converge absolument. C'est encore plus vrai si f a une limite finie en a

$$\int_0^1 \sin(\frac{1}{t})dt \text{ converge absolument}$$

Si f est définie sur $[a;b[$

$$\int_{[a;b[} f \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{]a;b[} f \text{ converge}$$

10.2.3 Espace $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}, \lambda \in \mathbb{K}$

1. $$\int_I f, \int_I g \text{ converge } \Rightarrow \int_I \lambda f + g \text{ converge}$$
$$\int_I \lambda f + g = \lambda \int_I f + \int_I g$$
2. Si f et g sont intégrables sur I alors $\lambda f + g$ l'est
$$\int_I \lambda f + g = \lambda \int_I f + \int_I g$$
3. Si f et g sont intégrables sur I alors $\lambda f + g$ l'est
$$\int_I |\lambda f + g| \leq |\lambda| \int_I |f| + \int_I |g|$$

Preuve :

1. écrire si $I = [a;b[$,

$$\int_a^x \lambda f + g = \lambda \int_a^x f + \int_a^x g$$

2.
$$\int_a^x |\lambda f+g| \leq |\lambda| \int_a^x |f| + \int_a^x |g|$$

Norme 1

Soit $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}(I,\mathbb{K})$ intégrable. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni d'une semi norme :
$$||f||_1 = \int_I |f|$$

Preuve : cf. supra

Remarque

Si on se ramène à l'ensemble des fonctions continues, ou régularisé $(f(x) = \frac{f(x^+)+f(y^-)}{2})$ alors $||.||_1$ est une norme. Sinon l'axiome de séparation n'est pas vérifiée ($\begin{array}{cccc} f: & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & 1, \text{ si } t=0 \\ & t & \mapsto & 0 \text{ sinon} \end{array}$) $||f||_1 = 0$ mais $f \neq 0$

10.2.4 Espace $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et $g\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}} : I \to \mathbb{K}$. On suppose sue f^2 et g^2 sont intégrables sur I, alors :
$$|\int_I fg| \leq \sqrt{\int_I |f|^2}\sqrt{\int_I |g|^2}$$
Si f et g sont continues alors on a égalité si et seulement si $f=0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}, g = \lambda f$

Preuve : $|fg| \leq \frac{1}{2}(|f|^2+|g|^2)$, donc $fg \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$
L'inégalité (et son cas d'égalité) de Cauchy-Schwarz découle du fait que $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$ est issue d'un produit scalaire

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}^2 - I, \mathbb{K}$ l'ensemble des fonctions de carré intégrables sur I : $\{f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}} : I \to \mathbb{K} / \int_I |f|^2 < +\infty\}$

Théorèmes

1. $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. $\|f\|_2$ définit un semi-norme sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, une norme si on se restreint aux fonctions continues
3. Si $(f, g) \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

Preuve :

1. (a) $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}(I, \mathbb{K})$
   (b) $0 \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$
   (c) $\forall (f, g, \lambda) \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}, \lambda f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$
   $$|f+g|^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2Re(fg) \leq |f|^2 + |g|^2 + 2|fg|$$
   donc $f + g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$
2. cf. espaces préhilbertien
3. cf. supra

Remarque

On pourrait généraliser (avec l'inégalité de Hölder) aux espaces $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$, pour les fonctions vérifiant :

$$\int_I |f|^p < +\infty$$

⚠A priori, on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $f \notin \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, cf $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0; 1]$
Réciproquement, on peut avoir $f \in \mathcal{L}^2$ et $f \notin \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, cf $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1; +\infty[$
Néanmoins, si I est borné, soit $f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}), 1 \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}$, donc $f = f \times 1 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

Restriction à un sous-intervalle

Soit $I \subset I'$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I' \to \mathbb{K}\mathcal{C}^0_{\mathbb{M}}$. Si $\int_{I'} f$ est convergente (resp. absolument convergente) alors $\int_I f$ l'est aussi, et

$$\mathcal{L}^1(I', \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}), \int_I |f| \leq \int_{I'} |f|$$

Preuve : soit $\alpha = \inf(I), \beta = \sup(I), \alpha' = \inf(I'), \beta' = \sup(I') \int \overline{\mathbb{R}}^4$. On a $\alpha' \leq \alpha \leq \beta \leq \beta'$. Si $\alpha' < \alpha \int I'$ et pour $\gamma \in I, f$ est $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ sur $[\alpha; \gamma]$, donc $\int_\alpha^\gamma f$ converge. Si $\alpha = \alpha'$:

$$\int_\alpha^\gamma f = \lim_{x \to \alpha'} \int_x^\gamma f$$

existe car $\int_{I'} f$ converge. De même pour $\int_\gamma^\beta$. Pour la convergence absolue, on remplace f par $|f|$

Remarque

On vérifie aisément que $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si $\exists M \geq 0 / \forall J$ segment $\subset I$, $\int_J |f| \leq M$. On a alors

$$\int_I |f| = \sup_{J \text{ segment } \subset J} \int_J |f|$$

Si $I \subset I'$ et si $\int_{I'} f$ converge, on a : $\int_I f = \int_{I'} f\chi_I$

10.2.5 Intégrations par parties

Définition

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, f et $g \mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{C}^0 : I \to \mathbb{K}$. Soient $(\alpha = \inf(I), \beta = \sup(I)) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soit $[x; y] \subset I$

$$\int_x^y f'g = [fg]_x^y - \int_x^y fg'$$

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)g(x)$, $\lim\limits_{y \to \beta} f(y)g(y)$ existent dans $\mathbb{K}$ et si $\int_I fg'$ converge alors $\int_I f'g$ converge et

$$\int_I f'g = [fg]_\alpha^\beta - \int_I fg'$$

avec $[fg]_\alpha^\beta = \lim\limits_{y \to \beta} f(y)g(y) - \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)g(x)$

⚠On prendra bien garde à ce que toutes les quantités écrites admettent des limites finies ! ! ! On peut corriger ce problème en jouant sur la constante d'intégration de la primitive de f'

Exemples

1. Calculer $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \ln(t) dt$ et en déduire sa limite. Soit $\begin{array}{cccc} f & : &]0; n] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (1 - \frac{t}{n})^n \ln(t) \end{array}$ continue, $|f(t)| \sim |\ln(t)| = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$, d'après le critère de Riemann, $\int_0^n f(t)dt$ converge. Par changement de variable (cf. infra), on pose $u = \frac{t}{n}$, donc $dt = ndu$

$$I_n = n\left(\int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du + \ln(n) \int_0^1 (1-u)^n du\right) = n\left(\int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du + \frac{\ln(n)}{n+1}\right)$$

On écrit pour $x \in]0; 1]$, $\int_x^1 (1-u)^n \ln(u) du = [\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}]_x^1 - \frac{1}{n+1} \int_x^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{u} du$
Comme $1 - (1-u)^{n+1} \sim (n+1)u$. On a $\lim\limits_{u \to 0} (1 - (1-u)^{n+1}) \ln(u) = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0} \frac{1-(1-u)^{n+1}}{u} =$

$n+1$, donc $\int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{u} du$ converge

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du &= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{u} du \\ &= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-v^{n+1}}{1-v} dv \\ &= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} v^k dv \\ &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 v^k dv \\ &= -\frac{H_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

d'où $I_n = \frac{n}{n+1}(\ln(n) - H_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma$

2. Soit $z \in \mathbb{C}/Re(z) > 1$, on a vu que :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

converge absolument. Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $Re(z+1) > 1$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$$

On obtient la relation : $\forall z \in \mathbb{C}/Re(z) > 1, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
En particulier : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-r}dt = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$. Par récurrence, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

on peut aussi l'obtenir par IPP successives

3. Soit $\alpha \in]0;1]$ et $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_+* & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\end{array}$

$|f(t)| \sim t^{1-\alpha} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ si $\alpha < 1$ et 0 si $\alpha = 1$, l'intégrale de f converge en 0 d'après le critère de Riemann.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = [\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}]_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt$$

$\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} \sim_{t\to 0} \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $|\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}| \leq \frac{2}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $[\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}]_0^{+\infty} = 0$

$\frac{1-\cos(t)}{t^{1-\alpha}} \sim_{t\to 0} \frac{t^{1-\alpha}}{2} = O(1)$ et $\frac{|1-\cos(t)|}{t^{1+\alpha}} \leq \frac{2}{t^{\alpha+1}}$ qui converge d'après le critère de Riemann.
Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge. On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \alpha\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}dt$$

On peut montrer (intégrale de Dirichlet) que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \frac{\pi}{2}$$

Remarque : de même pour $\alpha \in]0;1[$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dy$ converge, donc aussi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}$, intégrale de Fresnel
$\forall t > 0, |\frac{\sin(t)}{t^\alpha}| \geq \frac{\sin(t)^2}{t^\alpha} = \frac{1-\cos(2t)}{2t^\alpha}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t^\alpha} dt$ convergence par IPP. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2t^\alpha}$ diverge d'après le critère de Riemann donc $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t^\alpha}| dt$ diverge, ainsi que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$

10.2.6 Changement de variables

Théorème

Soient I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a = \inf(I), b = \sup(I) \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} I' & \to & I \\ u & \mapsto & t = \varphi(u) \end{array}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Soit $\alpha = \lim_{t \to a^+} \varphi^{-1}(t), \beta = \lim_{t \to b^-} \varphi^{-1}(t)$, ce sont les borne de I' dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \to \mathbb{K}\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$. On a :

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \varphi(u)' f(\varphi(u))du \text{ converge}$$

Dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta \varphi(u)' f(\varphi(u))du$$

$f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \varphi'(f \circ \varphi) \in \mathcal{L}^1(I', \mathbb{K})$

Preuve : Soit $x > y \in I, x' = \varphi^{-1}(x)$ et $y' = \varphi^{-1}(y)$. On a

$$\int_x^y f(t)dt = \int_{\varphi(x')}^{\varphi(y')} f(t)dt = \int_{x'}^{y'} \varphi'(u) f(\varphi(u))du$$

donc $\int_x^y f$ admet une limite finie quand $\lim_{x \to a^+, y \to b^-} \int_x^y f(t)dt \in \mathbb{K}$ ce qui équivaut à $\lim_{x' \to a^+, y' \to b^-} \int_x^y \varphi'(u) f(\varphi(u))du \in \mathbb{K}$
On a égalité dans ce cas, de plus :

$$\int_x^y |f| = \int_{x'}^{y'} \varphi' |f \circ \varphi| = \varepsilon \int_{x'}^{y'} |(f \circ \varphi)\varphi'|$$

avec $\begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ si } \varphi' > 0 \text{ sur } I \\ \varepsilon = -1 \text{ si } \varphi' < 0 \text{ sur } I \end{cases}$ d'où le résultat

Remarque

On retiendra qu'un changement de variable conserve la convergence ou l'absolue convergence

Exemples

1.

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt, \text{ on pose } u=\sqrt{t}, \mathcal{C}^1- \text{ difféomorphisme}\\ &= \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}du, du=\frac{dt}{2\sqrt{t}}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

2. On a vu que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\frac{t}{2})^2}{t^2}dt$$

On pose $u=\frac{t}{2}, dt=2du$, d'où :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)^2}{u^2}du$$

3. Intégrale de Fresnel : $\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du$ converge. On pose $t=\sqrt{u}$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, $dt=\frac{du}{2\sqrt{u}}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du=2\int_0^{+\infty}e^{it^2}dt$$

De même avec $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$

10.2.7 Intégration des relations de comparaisons

Théorème

Soit $I=[a;b[, b\in\overline{\mathbb{R}}, f$ et $g: I\to\mathbb{R}_+\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ positives. on suppose que $f(t)=O(g(t))$ (resp. $o(g(t))$, $\sim g(t)$)

1. Si $g\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$, alors $f\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ et

$$\int_x^b f(t)dt=O(\int_x^b g(t)dt) \text{ (resp. } o(\int_x^b g(t)dt), \sim\int_x^b g(t)dt)$$

2. Si $f\notin\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ alors $g\notin\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$

$$\int_a^x f(t)dt=O(\int_a^x g(t)dt)\text{(resp. } o(\int_a^x g(t)dt), \sim\int_a^x g(t)dt)$$

Preuve :

1. Si $f(t) = O(g(t)), \exists x_0 \in I, \exists M \geq 0 / \forall x \in [x_0; b[, 0 \leq f(x) \leq Mg(x)$, alors
$$0 \leq \int_x^b f(t)dt \leq M \int_x^b g(t)dt$$
et $\int_x^b = O(\int_x^b g(t)dt)$. De même pour les autres cas
2. Supposons $f(t) = o(g(t))$. Soit $\varepsilon > 0, \exists x_0 \in I / \forall x \geq x_0, 0 \leq f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} g(x)$. Alors :
$$\forall x \geq x_0, \int_a^x f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f \leq \int_a^{x_0} f + \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0}^x g$$
Or g n'est pas intégrable et positive, donc $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x g = +\infty$ et $\exists x_1 \in I / \forall x \geq x_1, \int_a^{x_0} \leq \int_a^x g$
Alors $\forall x \geq \max(x_0, x_1), 0 \leq \int_a^x f \leq \varepsilon \int_a^x g$

Exemples

1. Chercher un équivalent en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} e^{-u^2} du, e^{-u^2} = O(\frac{1}{u^2})$, l'intégrale converge d'après le critère de Riemann. Soit $x > 0$, par IPP :
$$\int_x^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_x^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{u} du = [-\frac{1}{2} \frac{e^{-u^2}}{u}]_x^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du = \frac{e^{-x^2}}{2x} + o(\int_x^{+\infty} e^{-u^2} du)$$
donc $\int_x^{+\infty} e^{-u^2} du \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$
2. Équivalent de $\int_0^x e^{t^2} dt$
$$\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x \frac{te^{-t^2}}{t} dt = \int_0^1 e^{t^2} dt + [\frac{1}{2} \frac{e^{t^2}}{t}]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$$
Or $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} = o(\int_0^1 e^{t^2} dt)$, d'où
$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
3. Soit $0 < a \leq b$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$
Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_+* & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \end{array}$ continue positive
$|f(t)| \sim_{t \to 0} b - a$ et $|f(t)| = O_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$
D'après le critère de Riemann, l'intégrale I converge absolument. Soit $\varepsilon > 0$
$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt \\ &= \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \end{aligned}$$

Or $\frac{e^{-u}}{u} \sim \frac{1}{u}$ et $\frac{1-e^{-u}}{u} \sim 1$, donc $\frac{1-e^{-u}}{u}$ est bornée au voisinage de 0. $\exists M \geq 0 / \forall u \in]0;1], |\frac{1-e^{-u}}{u}| \leq M$. Il vient, pour $b\varepsilon \leq 1$:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{du}{u} + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u} du = \ln(\frac{b}{a}) + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u} du$$

donc $I = \ln(\frac{b}{a})$

10.3 Comparaison séries-intégrales

10.3.1 Relation de Chasles

Soit $a \in \mathbb{R}, f : [a;+\infty[\to \mathbb{K}, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$. Soit $(\alpha_k) \in [a;+\infty[^{\mathbb{N}}$, suite croissante qui tend vers $+\infty$. On pose $\alpha_0 = a$ et $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)dt$

1. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\sum u_k$ converge

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

La réciproque est généralement fausse, cependant :

2. Si $f \geq 0$ et si $\sum u_k$ converge alors $\int_a^{+\infty}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

Preuve :

1. Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \int_a^{\alpha_{N+1}} f(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

par composition des limites. La réciproque est fausse, cf $f(t) = \sin(t)$ n'est pas intégrable, mais pur $\alpha_k = 2k\pi$, $\sum u_k$ converge et $\int_0^{+\infty} \sin(t)dt$ diverge!!!

2. Si $f \geq 0$ et si $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$. Par contraposée, si la SATP $\sum u_k$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge

Exemples

1. Soit $\alpha_k = k\pi, u_k = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{|\sin(t)|}{t}dt = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi}du \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$
   La série $\sum \frac{2}{(k+1)\pi}$ diverge donc $\sum u_k$ aussi $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t}|dt$ diverge

2. On a vu que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ converge. Déterminer le signe de I. Posons $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$, comme I converge $\sum u_k$ converge. $I = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, (u_k) est du signe de $(-1)^k$ et
$$\begin{aligned} |u_k| &= |\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt| \\ &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}| dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u + k\pi}} du \end{aligned}$$
$\forall u \in [0; \pi], 0 \leq \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+(k+1)\pi}} \leq \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, |u_{k+1}| \leq |u_k|$, $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0$ car l'intégrale converge. D'après le CSSA, I est du signe de u_0, donc elle est positive
3. Soit $\alpha > 2$ et $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{1+t^\alpha |\sin(t)|} \end{array}$ continue positive. On a au mieux $\frac{1}{1+t^\alpha} \leq f(t) \leq 1$, le critère de Riemann ne permet pas de conclure directement. Pour $k \geq 1$, soit $\alpha_k = k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $u_k = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t) dt$. Comme f est positive,
$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t) dt \text{ converge } \Leftrightarrow \sum u_k \text{ converge}$$
f est croissante sur $[k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi]$ et décroissante sur $[k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2}]$. Soit $0 < \beta_k < \frac{\pi}{2}$, il vient
$$0 \leq u_k = \int_{k\pi - \frac{\pi}{2}}^{k\pi + \beta_k} f + \int_{k\pi - \beta_k}^{k\pi + \beta_k} f + \int_{k\pi + \beta_k}^{k\pi + \frac{\pi}{2}} f \leq f(k\pi - \beta_k) \frac{\pi}{2} + 2\beta_k + f(k\pi + \beta_k) \frac{\pi}{2}$$
Or $f(k\pi + \beta_k) = \frac{1}{1+(k\pi+\beta_k)^\alpha \sin(\beta_k)} = f(k\pi - \beta_k)$. Posons $\beta_k = \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}}}$, $\frac{\alpha}{2} > 1$, $\sum \beta_k$ converge, $f(k\pi + \beta_k) \sim \frac{1}{(k\pi)^\alpha \beta_k} = \frac{1}{\pi^\alpha k^{\frac{\alpha}{2}}}$ donc $\sum f(k\pi + \beta_k)$ et $\sum f(k\pi - \beta_k)$ convergent, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

10.3.2 Cas d'une fonction positive décroissante

Théorème

Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ positive et décroissante. On a $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq a$:
$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$
Posons $v_n = f(n) - \int_1^{n+1} f(t) dt$, il vient $0 \leq v_n \leq f(n) - f(n+1)$ qui est le terme général d'une série télescopique convergente car f admet une limite finie en $+\infty$
Ainsi $\sum v_n$ converge et $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge. On peut encadrer les restes des sommes partielles en cas de convergence ou divergence

Exemple

Trouver un équivalent quand $x \to 1^-$ de
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\ln(1 - x^n)$$

Pour $x \in [0;1[, |f(x)| \sim x^n$, terme général d'une série convergente f est définie sur $[0;1[$
Notons que $\forall t \in [0;1[$

$$-\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \leq 2t$$

pour t suffisamment petit, $\exists \alpha_0 > 0/$ si $t \in [0;\alpha]$, $|-\ln(1-t)| \leq 2t$, pour $a \in [0;1[, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, a^n \leq \alpha_0, \forall t \in [0;a], \forall n \leq N_0, |-\ln(1-t^n)| \leq 2t^n \leq 2a^n, \sum -\ln(1-t^n)$ converge normalement sur $[0;a]$, donc est continue sur $[0;1[$
Fixons $x \in [0;1[$ et posons $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}_+* & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & -\ln(1-x^t) \end{array}$ g est continue positive décroissante,
$g(t) = \ln(t(-\ln(x)) + o(t)) = \ln(t(-\ln(x))) + o(1) = O(\frac{1}{\sqrt{t}}), g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+*, \mathbb{R})$
Il vient $\forall n \geq 0, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n)$
En sommant, $f(x) + \ln(1-x) \leq \int_0^{+\infty} g(t)dt \leq f(x)$

$$\int_1^{+\infty} g(t)dt \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} g(t)dt - \ln(1-x)$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} g(t)dt &= \int_1^{+\infty} -\ln(1-e^{t\ln(x)})dt \\ &= -\frac{1}{\ln(x)} \int_{-\ln(x)}^{+\infty} -\ln(1-e^{-u})du \\ &\sim \frac{1}{1-x} \int_0^{+\infty} -\ln(1-e^{-u})du \end{aligned}$$

d'où, $-\ln(1-x) = o(\frac{c}{1-x})$, donc

$$f(x) \sim \frac{\int_0^{+\infty}}{1-x}$$

Remarque $\int_0^{+\infty} -\ln(1-e^{-u})du = \int_0^1 \frac{-\ln(1-v)}{v} dv = \frac{\pi^2}{6}$

Cas où f change de signe

Soit $f, \mathcal{C}^1 : [a;+\infty[\to \mathbb{C}$, on souhaite comparer la convergence de $\sum f(n)$ avec celle d'une l'intégrale. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\forall n \geq a, F(n+1) - F(n) = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt = f(n) + w_n$$

$|w_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|dt$. Si $f' \in \mathcal{L}^1([a;+\infty[,\mathbb{C}), \sum w_n$ convergence absolument, donc converge et

$$\sum_{n\geq a} f(n) \text{ converge } \Leftrightarrow (\int_a^n f(t)dt)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

Exemple

Nature de $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$. On pose $\forall t \geq 1, f(t) = \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2} = O(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}})$ donc $f' \in \mathcal{L}^1([a; +\infty[, \mathbb{C})$

$$\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{2\sin(u)}{u} du$$

admet une limite finie quand $n \to +\infty$. Donc la série $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ converge

10.4 Théorème de convergence dominée

10.4.1 Le théorème

Contexte

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, (f_n)$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ intégrables $I \to \mathbb{K}$. On souhaite intervertir $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et $\int_I$, i.e écrire si possible $\int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n$

Dans le cas général, on a pas le droit d'intervertir sans précautions (cf. $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (n+1)t^n \\ & & 1 & \mapsto & 0 \end{array}$)

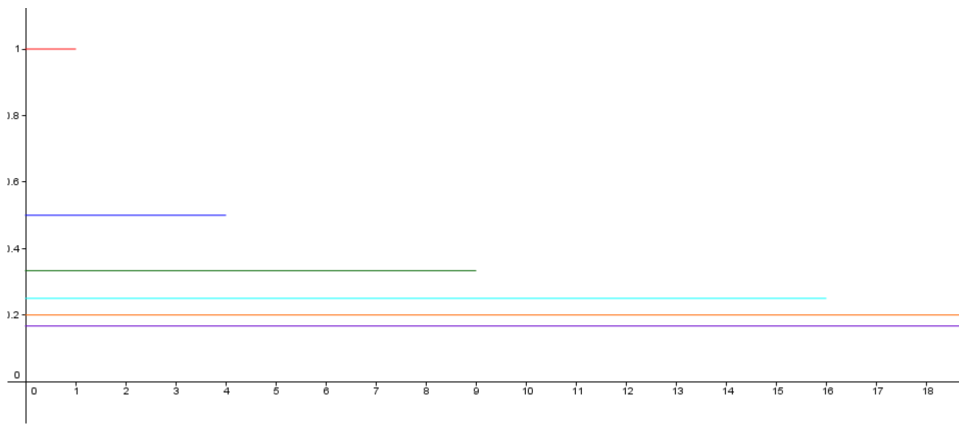
converge simplement vers 0 mais $\int_0^1 f_n(t)dt = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1 \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = 0$

Si I est un segment, on a le droit d'intervertir en cas de convergence uniforme. On écrit :

$$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$

Cela n'est hélas pas suffisant si I n'est pas bornée. Si on prend $\begin{array}{ccccc} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{n} \text{ si } t \in [0; n^2] \\ & & t & \mapsto & 0 \text{ sinon} \end{array}$

$|f_n| \leq \frac{1}{n}$, donc (f_n) converge simplement vers 0, mais $\int_{\mathbb{R}} f_n = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$



Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, (f_n)$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}} : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

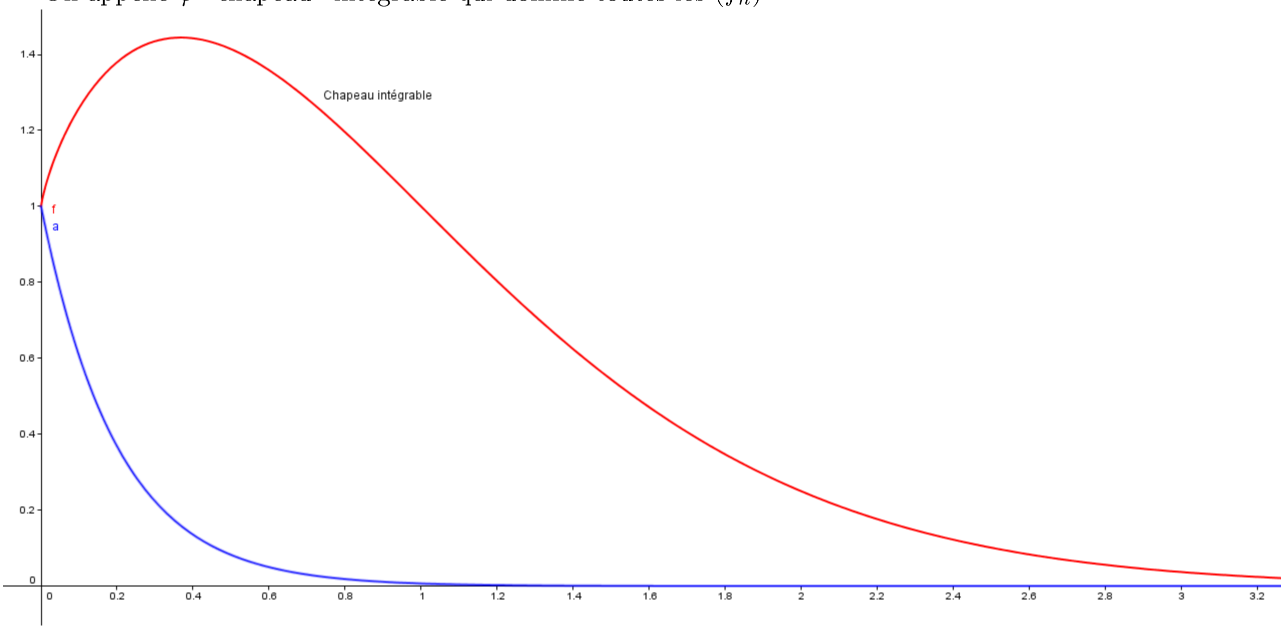
1. La suite (f_n) converge simplement vers $f\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}} : I \to \mathbb{K}$
2. $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur I positive $/\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$, c'est l'hypothèse de domination

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, (f_n) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt$$

Remarque

On appelle φ "chapeau" intégrable qui domine toutes les (f_n)



Exemples

1. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{C}$ continue et $I_n = \int_0^1 f(t^n)dt$
   $\forall t \in [0; 1[, \lim\limits_{n \to +\infty} f(t^n) = f(0)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(1^n) = f(1)$ par continuité de f en 0. De plus $\forall n \in \mathbb{N}, |f(t^n)| \leq \|f\|_\infty$ constante intégrable sur $[0; 1]$, d'après le TCD,
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f(t^n)dt = f(0)$$
   On notera que sur un intervalle borné, il suffit de dominée par une constante
2. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt, \forall t \in [0; \frac{\pi}{2}[, \lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(t))^n = 0, \lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(\frac{\pi}{2}))^n = 1$

donc $(\sin^n)$ converge simplement vers $\begin{array}{cccc} g & : & [0;\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & 0 \\ & & \frac{\pi}{2} & \mapsto & 1 \end{array}$

$\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(t)^n| \leq 1$, intégrable sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, d'après le TCD, $\lim\limits_{n\to+\infty} I = 0$

$$\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}*, (1+\frac{t^2}{n})^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} (\frac{t^2}{n})^k \geq 1+t^2$$

donc $\frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n} \leq \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le TCD :

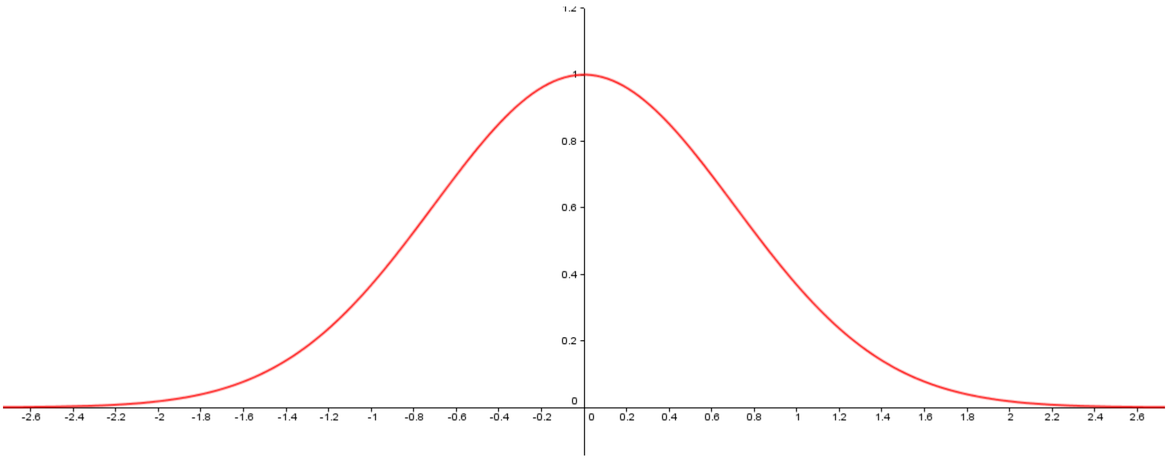
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Par ailleurs, en posant $u = \frac{t}{\sqrt{n}}, dt = \sqrt{n} du$

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n} = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{2n-2} d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n-2} dt \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

On a posé : $\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+\tan(\theta)^2} = \cos(\theta)^2$
Par parité :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}}$$



donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$

Cas où l'intervalle d'intégration dépend de n

Soit $I_n = \int_{J_n} f_n(t)dt$, pour appliquer le théorème, on forme $J = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n$ et on écrit

$$I_n = \int_J \chi_{J_n} f_n = \int_J \tilde{f_n}$$

où $\tilde{f_n} = f_n$ sur J_n, 0 sinon

Exemples

1. $I_n = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n \ln(t)dt$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}]0;n] = \mathbb{R}_+^*$

   $$\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (1-\frac{t}{n})^n \ln(t) \text{ si } t \leq n \\ & & t & \mapsto & 0 \text{ si } t > n \end{array} \text{ est } \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}.$$

   Soit $t > 0$ fixé, pour $n \geq t$, $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \ln(t) = \exp(n\ln(1-\frac{t}{n})\ln(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}\ln(t), \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$, $|f_n(t)| \sim |\ln(t)| = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$ converge

   De plus, $\forall n \geq 1, \forall t > 0$ si $t < n$,

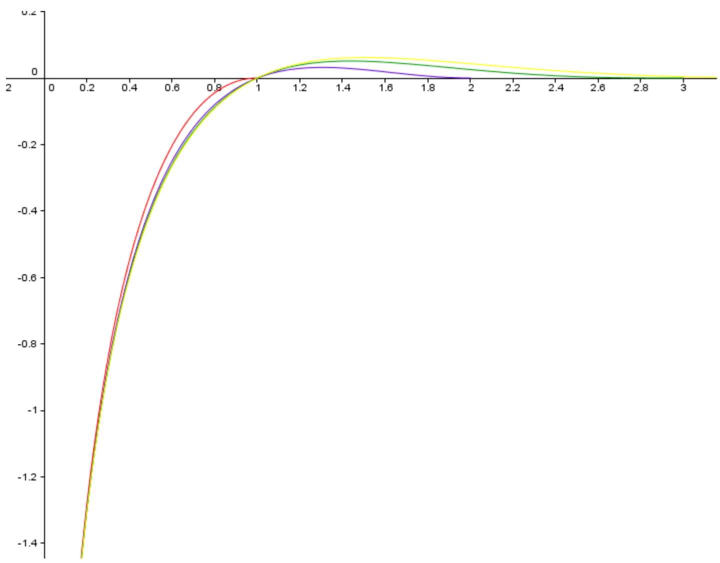
   $$|f_n(t)| = \exp(n\ln(1-\frac{t}{n})|\ln(t)| \leq e^{-t}|\ln(t)|$$

   car $\forall x > 1, \ln(1+x) \leq x$, c'est encore vrai si $t \geq n, e^{-t}|\ln(t)|$ est $\mathcal{C}^0$ positive sur $\mathbb{R}_+^*$

   $$e^{-t}|\ln(t)| \sim |\ln(t)| = O_0(\frac{1}{\sqrt{t}}) \text{ et } O(\frac{1}{t^2})$$

   donc $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^{-t}|\ln(t)| \end{array}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le TCD

   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt = -\gamma$$



2. $\forall n \geq 1, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n dt$

   On pose : $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (1-\frac{t^2}{n})^n \ln(t) \text{ si } t \leq \sqrt{n} \\ & & 0 & \mapsto & 0 \text{ sinon} \end{array}$ est $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ positive. Soit $t \geq 0$ fixé, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, t \leq \sqrt{n}$

   $$f_n(t) = (1-\frac{t^2}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{t^2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2}$$

est $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\forall n \geq 1, \forall t \geq 0, t < \sqrt{n}, |f_n(t)| = \exp(n\ln(1-\frac{t^2}{n}) \leq e^{-t^2}$
D'après le TCD, $e^{-t^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

En posant $t = \sqrt{n}\cos(\theta)$ et $dt = -\sqrt{n}\sin(\theta)d\theta$

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2n+1}d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

⚠On retiendra l'analogue entre le TCD et le théorème d'interversion des limites en cas de convergence normale,

$$\lim_{t\to\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{t\to\alpha} f_n(t)$$

dès que $\exists(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I$

$$|f_n(t)| \leq \alpha_n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n < +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$$

dès que $\exists\varepsilon : I \to \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ indépendant du paramètre et $\int_I |\varphi(t)|dt < +\infty$

10.4.2 Théorème d'intégration termes à termes

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, \sum f_n$ série de fonctions de $I \to \mathbb{K}$. on suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable sur I
2. $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \to \mathbb{K}, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$
3. Soit pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \int_I |f_n(t)|dt$, la SATP $\sum u_n = \sum \int\limits_I |f_n| < +\infty$

Alors S est intégrable sur I et $\sum \int_I f_n$ converge, avec

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)dt$$

Preuve :généralement pour intervertir $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ et $\int_I$ revient à écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$$

si ces écritures ont un sens, ce qui signifie :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_I f_n(t)dt = \int_I S(t)dt \Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty}\int_I S(t) - \sum_{n=0}^{N} f_n(t)dt = 0 \Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty}\int_I R_N(t) = 0$$

Montrons d'abord que $S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$. Pour ce faire, on va montrer pour tout segment $J \subset I$

$$\int_I |S(t)|dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Mais pour $t \in I$, on peut avoir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(t)| = +\infty$$

Posons donc : $\forall t \in J, \forall n \in \mathbb{N}, g_n(t) = \min(\sum\limits_{k=0}^{n} |f_k(t)|, |S(t)|), \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$|S(t)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(t)|$$

$$|S(t)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(t)| \Rightarrow g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |S(t)|$$

$$|S(t)| < \sum_{k=0}^{n} |f_k(t)| \text{ pour n suffisamment grand } \sum_{k=0}^{n} |f_k(t)| \geq |S(t)| \text{ et } g_n(t) = |S(t)|$$

Ainsi (g_n) converge simplement sur J vers $|S|, \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq g_n \leq |S| \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{K})$ car $|S|$ $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ sur J segment. D'après le TCD, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_J |g_n| = \int_J |S|$, or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_J |g_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_J |f_k| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_I |f_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |f_k| < +\infty$$

Lorsque $n \to +\infty, \int_J |S| \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$. Ceci valant pour tout segment $J \subset I, S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et

$$\int_I |S| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Ce résultat s'applique en remplaçant S par $R_N(t) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et

$$|\int_I R_N| \leq \int_I |R_N| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En pratique

On dispose à présent de 2 théorèmes d'intégration termes à termes :

1. Sur un segment $[a;b]$, pour une série de fonctions sur $[a;b]$ qui converge uniformément
2. Sur un intervalle quelconque

Remarque

On utilise fréquemment ce résultat pour calculer $\int_I S(t)dt$ (S $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$) : on développe S en série de fonctions f_n et on intervertit. Dans le cas où $\forall k \in \mathbb{N}, f_k \geq 0$, on peut invoquer le TCD pour les sommes partielles, car $(S_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$ converge vers S et par positivité, $0 \leq S_n \leq S \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

Exemples

1. Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du$$

en posant $u = 1-t, du = -dt$. L'intégrale I converge car

$$0 \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \sim_0 -\ln(t) = O(\frac{1}{\sqrt{t}}) \text{ et } \lim_{t \to 1} \frac{\ln(t)}{t-1} 1$$

$$\forall t \in]0;1[, \frac{\ln(t)}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n(-\ln(t))$$

On pose $f_n(t) = t^n(-\ln(t)), \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}$ sur $]0;1[$
De plus $|f_n(t)| = o_0(\frac{1}{\sqrt{t}})$ et $|f_n(t)| \underset{t \to 1}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f_n \in \mathcal{L}^1(]0;1[, \mathbb{K})$. Formons, sachant $f_n \geq 0$

$$\begin{aligned} u_n = \int_0^1 f_n(t)dt &= [\frac{t^{n+1}}{n+1}(-\ln(t))]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t(n+1)} dt \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

$\sum u_n$ converge, donc on peut intervertir,

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

2. $\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 e^{x\ln(x)} dx$. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & [0;1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & e^{x\ln(x)} \\ & & 0 & \mapsto & 1 \end{array}$ $\mathcal{C}^0$ positive avec $\lim\limits_{x \to 0} e^{x\ln(x)} = 1$

$$\forall x \in]0;1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln(x)^n}{n!}$$

continue et intégrable sur $]0;1]$

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 \frac{x^n|\ln(x)|^n}{n!}dx \\
&= (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)^n}{n!}dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}([\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)^n]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln(x))^{n-1}dx) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^{n-1}dx \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}} = O(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

$\sum u_n$ converge, on peut intervertir et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^n\ln(x)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

donc ,

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \text{ et } \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$

3. Exprimer sous forme d'une série pour $a > 0$

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(at)}{e^t-1}dt$$

Soit $\begin{array}{cccc} S & : &]0;+\infty] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{\sin(at)}{e^t-1}\end{array}$ $S(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} a$, et $S(t) \leq \frac{1}{e^t-1} = O(e^{-t})$, S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall t > 0, S(t) = \frac{e^{-t}\sin(at)}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin(at)e^{-(n+1)t}$$

$f_n(t) = \sin(at)e^{-(n+1)t}$ est $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $f_n(t) = O(\frac{1}{t^2})$ donc $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$. Soit

$0 \leq u_n = \int_0^{+\infty}|sin(at)|e^{-(n+1)t}dt \leq |a|\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}dt = |a|([-\frac{t}{n+1}e^{-(n+1)t}]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}$

donc $\sum u_n$ converge, on peut intervertir

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(at)e^{-(n+1)t}dt$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\sin(at)e^{-(n+1)t}dt &= Im(\int_0^{+\infty} e^{-ait}e^{-(n+1)t}dt) \\
&= Im(\frac{1}{n+1-ia}) \\
&= \frac{a}{(n+1)^2+a^2}
\end{aligned}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-(n+1)t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(n+1)^2 + a^2}$$

10.5 Intégrale fonction d'un paramètre

10.5.1 Les théorèmes

Position du problème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, \mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ et $\begin{array}{cccc} f & : & I \times \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$
On cherche à définir $F(x) \int_I f(x,t)dt$, l'intégrale fonction du paramètre x, et à étudier les propriétés de F

Théorème de continuité

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & I \times \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$, on suppose :

1. $\forall x \in \mathcal{A}, t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux
2. $\forall t \in I, x \mapsto f(t,x)$ est continue
3. $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable positive sur $I / \forall (t,x) \in I \times \mathcal{A}, |f(t,x)| \leq \varphi(t)$, hypothèse de domination (indépendante du paramètre)

Alors $\begin{array}{cccc} F & : & \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \int_I f(t,x)dt \end{array}$ est continue sur $\mathcal{A}$

Preuve : 3. implique que $\forall x \in \mathcal{A}, t \mapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}$. F est donc définie sur $\mathcal{A}$. Par ailleurs, soit $x \in \mathcal{A}$ et $(x_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x, \forall n \in \mathbb{N}, F(x_n) = \int_I f(t, x_n)dt$. En posant $f_n(t) = f(t, x_n)$, elle est continue par morceaux, intégrables sur I. Pour $t \in I$ fixé, d'après 2,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t,x)$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$, d'après le TCD, $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_n) = F(x)$, par caractérisation séquentielle de la continuité, F est continue en x

Théorème de Leibniz (dérivation)

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & I \times \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$, on suppose que

1. $\forall x \in \mathcal{A}, t \mapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$. On définit alors sur $\mathcal{A}, F(x) = \int_I f(t,x)dt$
2. $\forall t \in I, x \mapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^1(\mathcal{A}, \mathbb{C})$, on note sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$
3. $\exists \varphi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I tel que

$$\forall (t,x) \in I \times \mathcal{A}, |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq \varphi_1(t)$$

et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux sur $\mathcal{A}$

Alors F est $\mathcal{C}^1(\mathcal{A},\mathbb{C})$ et $\forall x \in \mathcal{A}$

$$F'(x)) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

Preuve : soit $x_0 \in \mathcal{A}$ et $(h_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, x_0 + h_n \in \mathcal{A}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$

$$\frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{h_n} = \int_I \frac{f(t,x_0+h_n)-f(t,x_0)}{h_n}dt$$

On pose $g(x) = \frac{f(t,x_0+h_n)-f(t,x_0)}{h_n}$, pour t fixé $\in I$, d'après 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0), \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}} \text{ sur } I$$

De plus d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(t,x_0+h_n)-f(t,x_0)| \leq \sup_{x\in[x_0;x_0+h_n]} |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \times |h_n| \leq \varphi_2(t)|h_n|$$

donc $|g_n(t)| \leq \varphi_1(t)$, d'après le TCD

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{h_n} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt$$

D'après 2 et 3, le théorème de continuité garantit alors que F' est continue sur $\mathcal{A}$

Corollaire

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & I\times\mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ & & (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$, $p \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. On suppose que :

1. $\forall t \in I, x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{A}$
2. $\forall k \in [|0;p|], \forall x \in \mathcal{A}, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)$ est continue par morceaux
3. $\forall k \in [|0;p|], \exists \varphi_k : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur $I / \forall (t,x) \in I\times\mathcal{A}, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)| \leq \varphi_k(t)$, hypothèse de domination indépendante du paramètre x

On peut définir $\begin{array}{cccc} F & : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & F(x)=\int_I f(t,x)dt \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et $\forall k \in [|0;p|], \forall x \in \mathcal{A}$

$$F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)dt$$

Remarque essentielle

Parfois on n'a pas domination $\forall x \in \mathcal{A}$, mais seulement sur des segments $[a;b] \subset \mathcal{A}$. Dans ce cas, la fonction F étant de classe $\mathcal{C}^p$ sur les segments de $\mathcal{A}$, elle l'est encore sur $\mathcal{A}$

Étude de la fonction gamma

Soit pour $z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C}\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{C} \\ & & (z,t) & \mapsto & t^{z-1}e^{-t} \end{array}$ est continue , $|f(z,t)| = t^{Re(z)-1}e^{-t}$.
Soit $a > 0$ et $\mathcal{D}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}/a \leq Re(z) \leq b\}$

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathcal{D}_{a,b}, \forall t > 0, |f(z,t)| & \leq & t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \\ & \leq & t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \end{array}$$

d'où $\forall t > 0, |f(z,t)| \leq (t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t}$ fonction intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Γ est continue sur $\mathcal{D}_{a,b}$ d'après le théorème de continuité, donc sur $\{z \in \mathbb{C}/Re(z) > 0\}$. De plus $\forall t > 0, x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}$
Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a;b], \forall t > 0$

$$|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}| \leq |\ln(t)|^k(t^{a-1}+t^{b-a})e^{-t} = O_\infty(\frac{1}{t^2}), \sim_0 |\ln(t)|^k t^{a-1} = O(\frac{1}{t^{\frac{a}{2}-1}})$$

φ_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le critère de Riemann.. Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur les segments de $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathbb{R}_+^*$. Il vient :

$$\forall x > 0, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln(t)^k e^{-t}dt$$

$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n \ln(t)dt = -\gamma$

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln(t)^2 e^{-t}dt > 0$$

Γ est strictement convexe, on a $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. D'après le théorème de Rolle,

$$\exists c \in]1;2[/\Gamma'(c) = 0$$

On a établit que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, ce qui entrainait $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim_0 \frac{1}{x}$$

De plus par croissance de $\Gamma', \forall x \geq 2$

$$\Gamma(x) = \Gamma(2) + \int_2^x \Gamma'(t)dt \geq 1 + \Gamma'(2)(x-2)$$

donc $\lim\limits_{x\to+0} \Gamma(x) = +\infty$, de plus $\forall x \geq 1, \frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ On a de plus le développement suivant :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x}{k})e^{-\frac{x}{k}}$$

$$\ln(\Gamma(x)) = -\ln(x) - \gamma x - \sum_{k=0}^{+\infty}(\ln(1+\frac{x}{k} - \frac{x}{k})$$

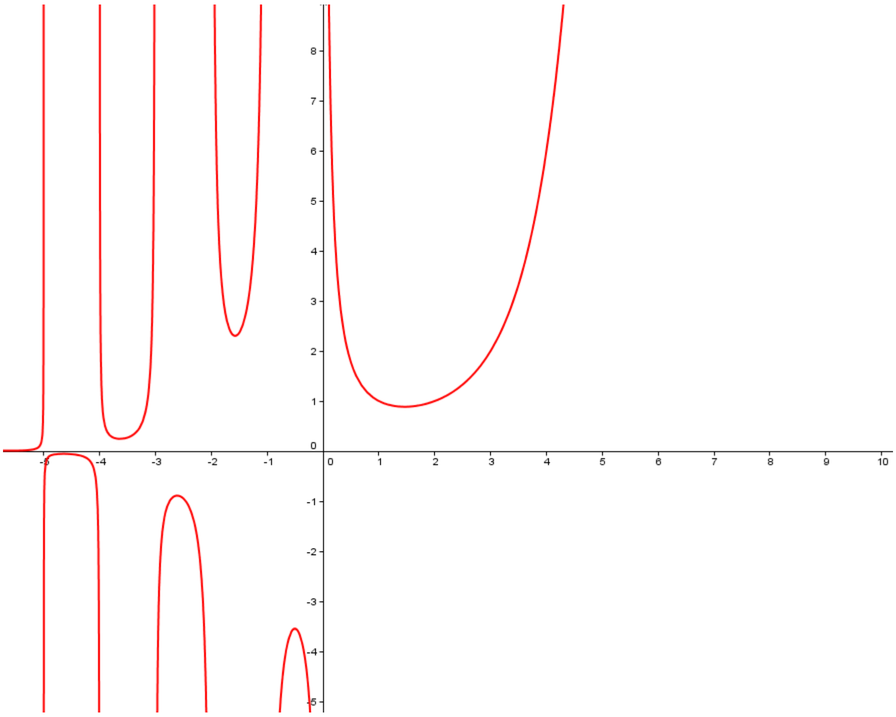


FIGURE 10.1 – La fonction gamma d'Euler et son prolongement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

Ce qui permet d'en déduire :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}$$

Enfin $\ln(\Gamma)' = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \Rightarrow \ln(\Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, |\Gamma'(x)| &= |\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt| \\
&\leq \int_0^{+\infty} |\ln(t)| \sqrt{t^{x-1}e^{-t}} \sqrt{t^{x-1}e^{-t}} dt \\
&\leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}
\end{aligned}$$

d'où $\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma''(x)\Gamma(x)$, donc $\ln(\Gamma)$ est convexe. On peut montrer que $\ln(\Gamma)$ est l'unique fonction g telle que :

1. g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $\forall x > 0, g(x-1) - g(x) = \ln(x)$
3. $g(1) = 0$

Remarque

$\|f\|_1 = \int_I |f|$ (resp. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$) s'appelle la norme de convergence en moyenne (resp. en moyenne quadratique). On dit que (f_n) converge en moyenne sur I vers f si et seulement si $\lim\limits_{n \to ++\infty} \int_I |f_n - f| = 0$

10.5.2 Calcul d'intégrale à paramètre

Remarque essentielle

Pour calculer une intégrale à paramètre, on a très souvent intérêt à la dérivée une ou plusieurs fois, pour faire apparaître :

* ou bien une fonction qu'on sait calculer
* ou bien une équation différentielle

Transformée de Laplace

Soit f continue par morceaux : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$, soit $a \in \mathbb{R}$, on suppose que $\mathcal{L}\{f\}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ converge (resp. converge absolument). On a verra dans les compléments que $\forall b > a$:

$$\mathcal{L}\{f\}(b) = \int_0^{+\infty} e^{-bt} f(t)dt \text{ converge}$$

En cas de convergence absolue de $\mathcal{L}\{f\}(a), \forall b \geq a, \forall t > 0$

$$|e^{-at} f(t)| \leq e^{-at}|f(t)| \int \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$$

Comme $\forall t > 0, b \mapsto e^{-bt} f(t)$ est continue $\mathcal{L}\{f\}$ est continue sur $[a; +\infty[$. De même pour la dérivation

Exemple

$\mathcal{L}\{sinc\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{sin(t)}{t} dt$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-xt} sinc(t) \end{array}$ est continue $\forall x > 0, \forall t > 0, |f(x,t)| \leq e^{-xt} = O_\infty(\frac{1}{t^2})$ et $f(x,t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$
$\mathcal{L}\{sinc\}$ est définie. On a vu qu'on a semi-convergence en 0. Pour $x > 0$, soit

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

$$|u_n| = \int n\pi(n+1)\pi e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \geq \frac{e^{-xn\pi}}{(n+1)\pi} \int_0^\pi |\sin(u)| du \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc $\sum u_n$ et $\mathcal{L}\{sinc\}$ aussi, $\mathcal{D}_{\mathcal{L}\{sinc\}} = \mathbb{R}_+$ et $a > 0, \forall x \geq a, \forall t > 0, \forall k \in \mathbb{N}$
$\forall t > 0, x \mapsto f(x,t)$ est continue et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \forall t > 0$

$$|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| = |(-1)^k t^{k-1} e^{-xt} \sin(t)| \leq t^{k-1} e^{-at} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

$\mathcal{L}\{sinc\}(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin(t)dt = -Im(\int_0^{+\infty} e^{-t(p-i)} = -\frac{1}{1+x^2}$
d'où en comparant les limites en $+\infty$, $\exists c \in \mathbb{R}/\forall x > 0, \mathcal{L}\{sinc\}(p) = \frac{\pi}{2} - \arctan(p)$
⚠Le théorème de continuité ne s'applique en 0 ! ! ! Cependant on peut poser $\forall x \geq 0$

$$u_n(p) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-pt}\frac{\sin(t)}{t}dt$$

$|e^{-pt}\frac{\sin(t)}{t}| \leq 1$ est intégrable sur $[n\pi; (n+1)\pi]$ donc u_n est continue en 0. D'après la relation de Chasles :

$$\mathcal{L}\{sinc\}(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p)$$

est une série alternée car reste de signe constant sur les segments de la forme $[n\pi; (n+1)\pi]$:

$$|u_n(p)| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-pt}\frac{|\sin(t)|}{t}dt = e^{-pn\pi}\int_0^{\pi} e^{-pu}\frac{\sin(u)}{u+n\pi}du$$

$$|u_{n+1}(p)| = e^{-p(n+1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-pu}\frac{\sin(u)}{u+(n+1)\pi}du \leq |u_n(x)|$$

d'où $\forall N \in \mathbb{N}, \forall p \geq 0$

$$|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(p)| \leq |u_{N+1}(x)| \leq \frac{\pi}{(N+1)\pi} \leq \frac{1}{N+1}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{L}\{sinc\}$ est continue en 0, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Transformée de Fourier

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

Soit $\begin{array}{cccc} h & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & & (x,t) & \mapsto & f(t)e^{-ixt} \end{array}$ $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et $|h(x,t)| = |f(t)|$ intégrable donc $t \mapsto h(x,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(x) \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et continue}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto h(x,t)$ est continue et $|h(x,t)| = |f(t)|$, ce qui justifie la continuité de $\hat{f}$
Soit $\varepsilon > 0, \exists A \geq 0 / \int_{\mathbb{R}\setminus[-1;1]} |f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\hat{f}(x)| \leq |\int_{-1}^{1} f(t)e^{-ixt}| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi $\exists X \geq 0/|x| \geq X, |\hat{f}(x)| \leq \varepsilon$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \hat{f}(x) = 0$$

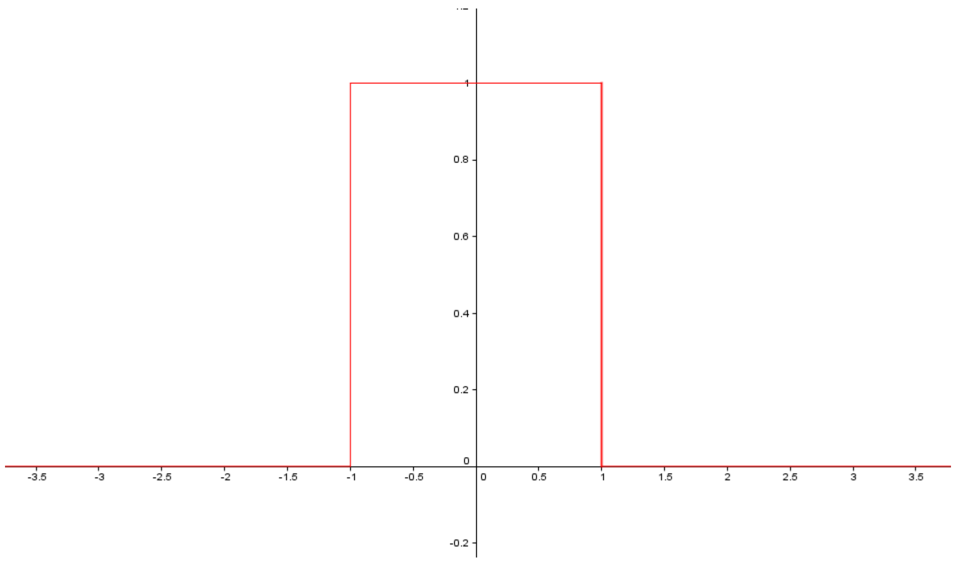


FIGURE 10.2 – Fonction porte couramment utilisé en traitement du signal

Exemples

1. $$\begin{array}{cccc} \chi_{[-1;1]} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & 1 \text{ si } |x| \leq 1 \\ & & t & \mapsto & 0 \text{ sinon} \end{array} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(x) = \int_{-1}^{1} e^{-ixt} dt &= 2 \textbf{ si } x = 0 \\ &= [i\frac{e^{-ixt}}{x}]_{-1}^{1} \textbf{ sinon} \\ &= 2\frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

2. $$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt$$

$\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto e^{-ixt} e^{-\frac{t^2}{2}} = h(x, t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$
$|\frac{\partial^k h}{\partial x}(x,t)| = |-ite^{-ixt}e^{-\frac{t^2}{2}}| = |t|e^{-\frac{t^2}{2}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
D'après le théorème de Leibniz, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\hat{f}'(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} -xe^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt = i([e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt}]_{-\infty}^{+\infty} + ix \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt) = -x\hat{f}(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, c'est un vecteur propre de la transformée de Fourier :

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$

10.5.3 Théorèmes de Fubini

Fubini sur un pavé

Soit $f : [a;b] \times [c;d] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue. On a :

$$\int_a^b (\int_c^d f(x,t)dt)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,t)dx)dt = \int\int_{[a;b]\times[c;d]} f(x,t)dxdt$$

Preuve : $F_1(x) = \int_c^d f(x,t)dt$ est définie sur $[a;b]$ et continue car $\forall t \in [c;d], t \mapsto f(x,t)$ est continue et $|f(x,t)| \leq \|f\|_\infty$ intégrable sur $[c;d]$. Soit $n \geq 1$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} F_1(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_c^g \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}, t)dt = \int_c^g \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} g_n(t)dt$$

$\forall t \in [c;d], g_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x,t)dx$, $|g_n(t)| \leq \|f\|_\infty (b-a)$ intégrable sur $[c;d]$ d'après le TCD et le CDR :

$$\begin{aligned} \int_a^b F_1(x,t)dx &= \int_a^b \int_c^d f(x,t)dtdx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_c^d g_n(t)dt \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x,t)dxdt \end{aligned}$$

Sur un intervalle quelconque (HP)

Soient I et J deux intervalles, sous réserve que les quantités écrites aient un sens, $f : I \times J \to \mathbb{C}$, si

$$\int_I \int_J |f(x,t)|dxdt \textbf{ ou } \int_J \int_I |f(x,t)|dtdx < +\infty$$

Alors on peut intervertir :

$$\int\int_{I\times J} f(x,t)dxdt = \int_I \int_J f(x,t)dxdt = \int_J \int_I f(x,t)dtdx$$

10.6 Compléments

10.6.1 Intégrale de Dirichlet (HP)

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$$

On a établit dans le cours que cette intégrale convergeait. On pose $\begin{array}{cccc} D_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}\end{array}$ noyau de Dirichlet. D'après les théorèmes généraux de la classe, cette application est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$,elle est aussi paire et 2π-périodique :

$$D_n(-t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}=\sum_{k=0}^{n} e^{-ikt}+\sum_{k=-n}^{-1} e^{-ikt}=D_n(t)$$

$$D_n(t+2\pi)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t+2\pi)}=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}=D_n(t)$$

$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}=\frac{e^{-int}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}=\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}dt=\frac{1}{2\pi}(\sum_{k=-n,k\neq 0}^{n}[\frac{e^{ikt}}{ik}]_{-\pi}^{\pi}+2\pi)=1$$

$$\int_0^{\pi}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=\pi$$

On pose $u_n=\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt$, en posant $t=\frac{2n+1}{2}u$ donc $\frac{dt}{t}=\frac{du}{u}$

$$u_n=\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt=2\int_0^{\pi}\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}u)}{\frac{u}{2}}du$$

Soit $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & u & \mapsto & \frac{2}{u}-\frac{1}{\sin(\frac{u}{2})}\end{array}$, $\varphi(u)=\frac{\sin(\frac{u}{2})-\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}\sin(\frac{u}{2}}\sim_0\frac{-2u}{3}\underset{u\to 0}{\longrightarrow}0$

φ est prolongeable en 0 en une fonction $\mathcal{C}^1$ notée $\tilde{\varphi}$, car elle y admet un $dl_1(0)$

$$\varphi'(u)=-\frac{2}{u^2}+\frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{u}{2})}{\sin(\frac{u}{2})^2}\underset{u\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{12}$$

$$\int_0^{\pi}\sin(\frac{2n+1}{2}u)\tilde{\varphi}(u)du=[\frac{\cos(\frac{2n+1}{2}u)}{\frac{2n+1}{2}}\tilde{\varphi(u)}]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos(\frac{2n+1}{2}u)}{\frac{2n+1}{2}}\tilde{\varphi(u)}'du\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

$$u_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}u)}{\frac{u}{2}}du=\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\sin(\frac{2n+1}{2}u)\tilde{\varphi(u)}du+\int_0^{\pi}D_n(u)du)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}}$$

10.6.2 Transformée de Laplace (HP)

Définition

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on définit la transformée de Laplace de la fonction f :

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = F(p)$$

Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

$$\mathcal{L}\{\lambda f+g\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(\lambda f(t)+g(t))dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt+\int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t)dt = \lambda\mathcal{L}\{f\}(p)+\mathcal{L}\{g\}(p)$$

Injectivité

Soit $g(t) = \int_0^t e^{-pu} f(u)du$, continue dérivable $\mathcal{C}^1_{\mathcal{M}}$, soit $X \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^X e^{-bt} f(t)dt &= \int_0^X e^{-(b-a)t} f(t)e^{-at}dt \\
&= \int_0^X e^{-(-b-a)t} g'(t)dt \\
&= [e^{-(b-a)t} g(t)]_0^X + \int_0^X (b-a)e^{-(b-a)t} g(t)dt \\
&= g(X)e^{-(b-a)X} + (b-a)\int_0^X e^{-(b-a)t} g(t)dt \\
&\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} (b-a)\int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t)dt
\end{aligned}$$

$$\forall b > a, \mathcal{L}\{f\}(b) = (b-a)\int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t)dt$$

On a vu ci-avant dans le cours que la transformée de Laplace d'une fonction continue était elle même continue. On définit $\begin{array}{cccc} h & : & [0;1] & \to & \mathbb{C} \\ & & u & \mapsto & g(-\ln(u)) \text{ si } u \neq 0 \\ & & 0 & \mapsto & \mathcal{L}\{f\}(a) \end{array}$

$\lim\limits_{x\to 0} g(-\ln(u)) = f(a), h \in \mathcal{C}^0([0;1])$

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \mathcal{L}\{f\}(u+x) &= x\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)dt \\
&= x\int_0^1 u^x g(-\ln(u))du \\
&= x\int_0^1 h(u)u^{x-1}du
\end{aligned}$$

Pour montrer l'injectivité de la transformée de Laplace, on va montrer que $\mathcal{L}\{f\} = 0 \Rightarrow f = 0$ car c'est une application linéaire. On le vérifie aisément pour les monômes, puis par linéarité pour l'ensemble des polynômes. On considère ensuite de polynômes qui converge uniformément vers h, il en existe d'après le théorème de Weierstrass, ce qui permet ensuite de conclure

Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, il vient par intégration par parties :

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = [e^{-pt}f(t)]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0)$$

Ce qui se généralise pour f de classe $\mathcal{C}^n$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(p) = p^n\mathcal{L}\{f\}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k+1}f^{(k)}(0)$$

Transformée de Laplace d'une intégrale avec borne fonction d'un paramètre

Soit f une fonction positive continue sur $[0;+\infty[$, $\forall a > 0$, on montre par intégration par parties :

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\}(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{f\}(p) - \frac{1}{p}\int_0^a f(x)dx$$

Dérivée d'une transformée de Laplace

Soit f une fonction continue pour laquelle la transformée de Laplace est définie. Les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue étant vérifiées, alors

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n\mathcal{L}\{f\}^{(n)}(p)$$

10.6.3 Analyse complexe (HP)

Fonction analytique

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est analytique si et seulement si $\forall z_0 \in U, f$ est développable en série entière au voisinage de z

Fonctions holomorphes

Soit U ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}, f : U \to \mathbb{C}$, pour $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que f est dérivable au sens complexe si et seulement si :

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

On dit que f est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe (holomorphe) sur U si et seulement si elle est décroissante au sens complexe sur U et f' continue

Intégrale curviligne

$f : I \to \mathbb{C}$ continue et $\gamma : [a;b] \to U$ continue dérivable à dérivée continue par morceaux. On pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Si $f = F'$ (Fest de classe $\mathcal{C}^1$ au sens complexe)

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors γ est un lacet, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ Soit $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au sens complexe sur $D(0,R)$. Soit $z \in D(0,R)$ et on veut montrer la formule de Cauchy,

$$f(z)\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z}dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}re^{it}dt$$

On définit $\begin{array}{cccc} g & : & [0;1]\times[0;2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & & (\lambda,t) & \mapsto & \frac{f(\lambda z+(1-\lambda)re^{it})e^{it}}{re^{it}-z} \end{array}$ est continue et

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,t) = \frac{re^{it}}{re^{it}-z}(z-re^{it})f'(\lambda z+(1-\lambda)re^{it}) = -re^{it}f'(\lambda z+(1-\lambda)re^{it})$$

$[0;1]\times[0;2\pi]$ est un compact et $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ y est continue, donc :

$$\exists M = \sup_{(\lambda;t)\in[0;1]\times[0;2\pi]} |\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,t)|$$

donc M étant intégrable, d'après le théorème de dérivation, on montre que $F'(\lambda) = 0$, donc F est constante sur $[0;1[$ et par continuité de F aussi en 1, donc $F(0) = F(1)$, en découle la formule de Cauchy énoncée ci-avant.

$$\forall |z| < r, \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z}dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-\frac{ze^{-it}}{n}} = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{r^n}e^{-int}dt$$

On a $|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{r^n}e^{-int}| \leq \frac{|z|^n}{r^n}$ terme général d'une SATP convergente, on peut intervertir série et intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{r^n}e^{-int}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-int}dt$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}re^{it}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi r^n}(\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{int}dt)z^n$$

donc f est développable en série entière

$\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow \mathcal{C}^\infty$

On a ainsi démontré que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors elle y est analytiques, par conséquent elle y est $\mathcal{C}^\infty$. La réciproque est immédiate. On retrouve la même formule pour les coefficients du développement en séries entières que dans le cas réel

10.6.4 Transformation de Fourrier

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on rappelle la définition : $\begin{array}{cccc} \hat{f} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt \end{array}$

On cherche à reconstituer f connaissant $\hat{f}$. Si f est continue et $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On veut évaluer en fonction de f :

$$g(u) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)e^{-ixu}dx$$

définit car continue et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Mais dans ce cas, on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini car $x \mapsto e^{ix(t-u)}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour pallier cet inconvénient, on forme pour $u \in \mathbb{R}$

$$G_u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)e^{-ixu}e^{-\lambda|x|}dx$$

Le théorème de continuité montre ($|\hat{f}(x)e^{-ixu}e^{-\lambda|x|}| = |\hat{f}(x)e^{-\lambda|x|}| \leq |\hat{f}(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) que G_u est définie positive.

$$G_u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}dt)e^{ix(t-u)}e^{-\lambda|x|}dx$$

On définit : $F(x,t) = f(t)e^{ixt}e^{ix(t-u)}e^{-\lambda|x|}$ continue sur $\mathbb{R}^2$. Les hypothèses du théorème de Fubini sont vérifiées :

$$G_u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t-u)}e^{-\lambda|x|}f(t)dxdt$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{x(i(t-u)-\lambda)}dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(i(t-u)+\lambda)}dx \\ &= \frac{1}{\lambda + i(t-u)} + \frac{1}{\lambda + i(t-u)} \\ &= \frac{2\lambda}{\lambda^2 + (t-u)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} G_u(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + (t-u)^2} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + v^2} f(v+u)dv \\ G_u(\lambda) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2+v^2}dv &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(f(u+v) - f(u))}{\lambda^2+v^2}dv \\ G_u(\lambda) - 2f(u)\pi &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(f(u+v) - f(u))}{\lambda^2+v^2}dv \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$, si $|v| \leq \alpha$ alors $|f(u+v) - f(u)| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$. Supposons de plus f bornée sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |G_u(\lambda) - 2\pi f(u)| &= 2|\int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda \frac{f(u+v) - f(v)}{\lambda^2+v^2}dv + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha;\alpha]} \lambda \frac{f(u+v) - f(v)}{\lambda^2+v^2}| \\ &\leq \frac{2\lambda\varepsilon}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dv}{\lambda^2+v^2} + 8\|f\|_\infty \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\lambda^2+v^2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi $|G_u(\lambda) - 2\pi f(u)| \leq \varepsilon$, par continuité, quand $\lambda \to 0$

$$g(u) = 2\pi f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-ixu} dx$$

On a injectivité de la transformée de Fourrier : si f est continue, bornée et intégrable alors $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$
On suppose dorénavant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f, f' et $f'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

$$|f(x) - f(0)| = |\int_0^1 f'(t)dt| \leq \int_{\mathbb{R}} |f'|$$

donc f est bornée sur $\mathbb{R}$

$$\int_A^B f(t)e^{ixt}dt = [f(t)\frac{e^{ixt}}{ix}]_A^B - \int_A^B \int_A^B f'(t)\frac{e^{ixt}}{ix}dt$$

Lemme si f et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{|t|} f(t) = 0$. Soit $X \in \mathbb{R}$

$$f(X) = f(0) + \int_0^X f'(t)dt \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt$$

f admet une limite l en $+\infty$, or f est intégrable donc $l = 0$, d'après le critère de Riemann :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt = [\frac{f(t)e^{ixt}}{ix}]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \frac{1}{ix}\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{ixt}dt = -\frac{1}{ix}\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{ixt}dt$$

donc $\hat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{ixt}dt$ et $|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{x^2}\int_{\mathbb{R}} |f''|$ d'où $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion s'applique.
Calculons la transformée de Fourier de $e^{-a|t|}$ où $a > 0$

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|}e^{ixt}dt = \frac{1}{a+ix} + \frac{1}{a-ix} = \frac{2a}{a^2 - x^2}$$

La formule d'inversion fournit :

$$2\pi e^{-a|u|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+x^2} e^{-iux}dx$$

10.6.5 Séries de Fourier

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux (intégrable sur $[0; 2\pi]$ suffirait) 2π-périodique, on cherche à écrire (en un sens à préciser)

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} = c_0 + c_1 e^{it} + c_{-1}e^{-it} + c_2 e^{2it} + c_{-2}e^{-2it} + \ldots$$

La fréquence d'une harmonique est un multiple entier de la fréquence du fondamental. Comme pour $\begin{array}{cccc} \varepsilon_k & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & e^{ikt} \end{array}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ est orthonormée pour $(f|g) = \int_0^{2\pi} \bar{f}g$
L'idée de Fourier est par orthogonalité que les

$$c_k = (\varepsilon_k|f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

Notons $G = Vect[\varepsilon_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ combinaison linéaire fini de ε_k, polynômes trigonométriques 2π-périodique. Soit f continue par morceaux 2π périodique. $\exists g$ continue 2π périodique / $\|f-g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, $\exists h \in G/\|g-h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|g-h\|_2 \leq \|g-h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où finalement $\|f-h\|_2 \leq \varepsilon$

G est dense dans $\mathcal{C}^0_{\mathcal{M},2\pi}$

Formule de Parseval

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$$

Calcul de $\zeta(2p)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique impaire telle que $\forall t \in]0;\pi[, f(t) = 1$ et $f(0) = 0 = f(\pi)$

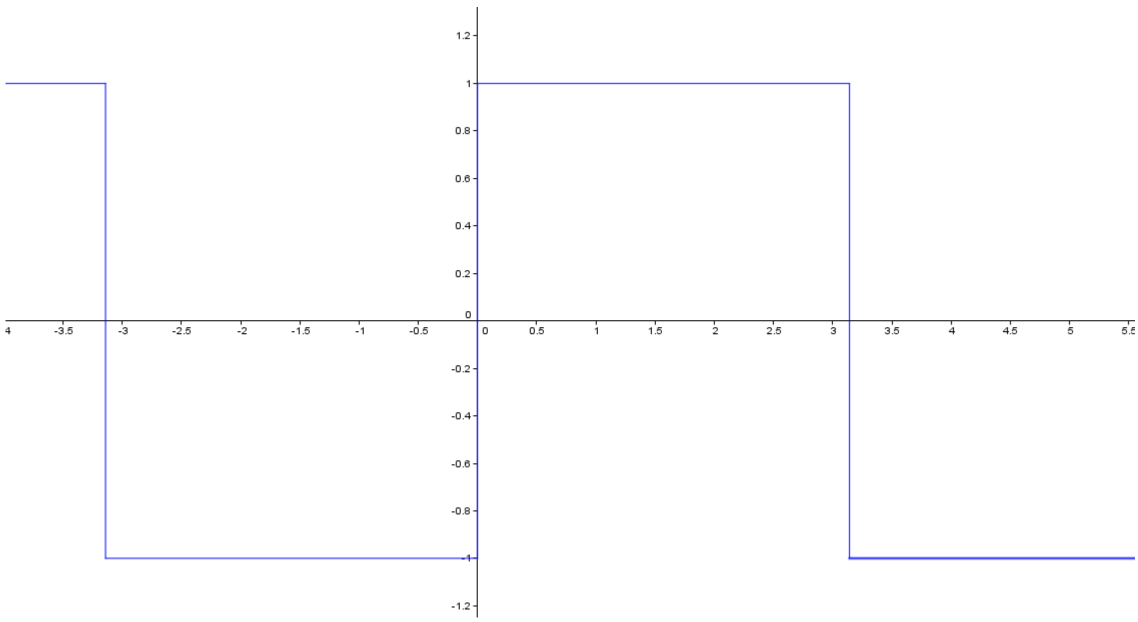


FIGURE 10.3 – Fonction créneau

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \\
&= \frac{-i}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \\
&= -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(kt)dt \\
&= 0 \textbf{ si } k=0 \\
&= \frac{i}{\pi}[\frac{\cos(kt)}{k}]_0^{\pi} \textbf{ sinon}
\end{aligned}$$

On a $c_0 = 0$ et $\forall p \in \mathbb{Z}, c_{2p}(f) = 0$ et $c_{2p+1} = -\frac{2i}{(2p+1)\pi}$. Or $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 1$, la formule de Parseval permet alors de conclure que :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^2}{6}$$

Plus généralement, en démontrant les deux lemmes suivants : une fonction continue par morceaux 2π périodique admet une primitive 2π périodique si et seulement si $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et $c_k(g') = ikc_k(g)$. On peut alors généraliser par récurrence, on trouve alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1}B_{2p}\pi^{2p}2^{2p-1}}{(2p)!}$$

où B_n désigne les nombres de Bernoulli

Chapitre 11

Espaces préhilbertiens

Sommaire

11.1 Produit scalaire

11.1.1 Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on dit que $\begin{array}{cccc}(.|.) & : & E^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & (x|y)\end{array}$ est une forme bilinéaire symétrique (fbs) si et seulement si :

1. $\forall (x;y;z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda x + y|z) = \lambda(x|z) + (y|z)$
2. $\forall (x;y) \in E^2, (x|y) = (y|x)$

Formes quadratiques

On lui associe $\begin{array}{cccc} q & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x|x) \end{array}$ forme quadratique associée

Produit scalaire

Une forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire si et seulement si sa forme quadratique associée est définie positive

1. $\forall (x;y;z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda x + y|z) = \lambda(x|z) + (y|z)$
2. $\forall (x;y) \in E^2, (x|y) = (y|x)$
3. $\forall x \in E, (x|x) = q(x) \geq 0$
4. $\forall x \in E, (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$

On a donc $\forall x \in E \setminus \{0\}, (x|x) > 0$

Norme associée à un produit scalaire

On définie la norme quadratique associée au produit scalaire :

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{q(x)}$$

Produit scalaire complexe (HP)

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on dit que $(.|.) : E^2 \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire complexe si et seulement si :

1. $(.|.)$ est linéaire par rapport à la seconde variable
2. $\forall (x;y) \in E^2, (y|x) = \overline{(x|y)}$
3. $\forall x \in E \setminus \{0\}, (x|x) > 0$

Exemples

1. Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, $\begin{array}{cccc} (.|.) & : & (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & ((x_1;...;x_n),(y_1;...;y_n)) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$
2. Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$

$$((x_1;...;x_n),(y_1;...;y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$

Dans les 2 cas

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} (\text{ resp. } \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2})$$

3. Dans l^2, $\begin{array}{cccc} (.|.) & : & l^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (u_n|v_n) & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \end{array}$ suites de carré sommables, série convergente car $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$ (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u_n} v_n$)

4. Soit $E = \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$
$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad (resp. \quad \int_a^b f(\bar{t})g(t)dt)$$

5. Soit $E = \mathcal{L}^2(I) \cap \mathcal{C}^0(I)$
$$(f|g) = \int_I fg \quad (resp. \quad \int_I \bar{f}g$$

6. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\omega : I \to \mathbb{R}_+$ continue positive (ou qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points) et telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, t \mapsto t^k \omega(k) \in \mathcal{L}^1(I)$$
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$)
$$(P|Q) = \int_I P(t)Q(t)dt \ \text{(resp. } \int_I \bar{P}Q\omega))$$
Soit $P \in \mathbb{R}[X], (P|P) = \int_I P(t)^2\omega(t)dt \geq 0$
$(P|P) = 0 \Rightarrow \int_I P(t)^2\omega(t)dt = 0 \Rightarrow P^2 = 0 \Rightarrow P = 0$, car $\omega > 0$ sur une partie infinie. On dit que $(.|.)$ est un produit scalaire à poids. Sur $I = [0;1]$, on peut $\omega = 1$ et
$$(P|Q) = \int_{[0;1]} PQ$$
Sur $I =]-1;1[$, on peut prendre $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$$(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$
Sur $\mathbb{R}_+$, on prend $\omega(t) = e^{-t}$
$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$
Sur $\mathbb{R}$, on prend $\omega(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$
$$(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

11.1.2 Propriétés

Propriétés générales

1. $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{R}\times E, q(\lambda x)=\lambda^2 q(x)$ (resp. $|\lambda|^2 q(x)$). En particulier : $q(-x)=q(x)$ et $\|\lambda x\|_2=|\lambda|\times\|x\|_2$
2. $\forall x\in E, (x|0)=(0|x)=0$ et $q(0)=0$
3. Identités de polarisation :
$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)\ \ (\text{ resp. } 2Re(x|y))$$
$$\|x-y\|_2=\|x\|^2+\|y\|^2-2(x|y)$$
$$(x|y)=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$
4. Identité du parallélogramme :
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz, Minkowski

Soit $(.|.)$ une forme bilinéaire symétrique positive sur E, on a $\forall(x;y)\in E^2$
1. $|(x|y)|\leq\|x\|_2\times\|y\|_2$ Cauchy-Schwartz
2. $\|x+y\|_2\leq\|x\|_2+\|y\|_2$ Minkowski

Si de plus $(.|.)$ est un produit scalaire on a égalité dans Cauchy-Schwartz si et seulement si $(x;y)$ est liée. Pour Minkowski si et seulement si $x=0$ ou $\exists\lambda\geq 0, y=\lambda x$

Preuve :

1. On note $q(x)=(x|x)=\|x\|_2$. Formons $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & \lambda & \mapsto & q(x+\lambda y)=\|x\|^2+\lambda^2\|y\|^2+2\lambda(x|y)\end{array}$
C'est un trinôme du second degré en λ de signe constant sur $\mathbb{R}$
$\Delta=4(x|y)^2-4\|x\|^2\times\|y\|^2\leq 0\Rightarrow|(x|y)|\leq\|x\|\|y\|$
2. $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2$

Cas d'égalité : si $(.|.)$ est un produit scalaire, si on a égalité dans Cauchy-Schwartz,
$$\Delta=0\Rightarrow\exists\lambda_0\in\mathbb{R}/\|x+\lambda_0 y\|^2=0$$
donc $x=\lambda_0 y$, réciproque immédiate.
Pour Minkowski $(x|y)=\|x\|\|y\|$, donc $\exists\mu\in\mathbb{R}/x=\mu y$ et $(x|y)=\lambda\|x\|^2=\|x\|\|y\|\geq 0$, d'où $\mu\geq 0$

Cas complexe

C'est encore vrai pour un produit scalaire complexe, on le démontre en posant :
$$(x|y)=|(x|y)|e^{i\theta}$$

donc $|(x|y)| = e^{-i\theta}(x|y) = (e^{i\theta}|y) \in \mathbb{R}_+$.

On forme alors $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & \lambda & \mapsto & q(e^{i\theta}x+\lambda y) = \|x\|^2 + 2\lambda|(x|y)| + \lambda^2\|y\| \geq 0 \end{array}$

Exemple

Si $(a_n),(b_n) \in l^2$

$$|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2}$$

Remarque

L'inégalité de Minkowski, montre que $\|.\|_2$ est une norme (semi-norme dans le cas d'une forme quadratique positive)

11.1.3 Orthogonalité

Définitions

Soit $(.|.)$ une forme bilinéaire symétrique sur E

1. $\forall (x;y) \in E^2, x \perp y \Leftrightarrow (x|y) = 0$
2. Soit $\mathcal{A}$ une partie de E, on définit :

$$\mathcal{A}^\perp = \{x \in E / \forall a \in \mathcal{A}, (x|a) = 0\} = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} a^\perp$$

3. On dit que deux parties de E, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont orthogonales si et seulement si $\forall (a;b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}, (a|b) = 0$ si et seulement si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^\perp$ si et seulement si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^\perp$

Propriétés

1. $\{0\}^\perp = E$ et si $(.|.)$ est un produit scalaire, $E^\perp = \{0\}$
2. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathcal{B}^\perp \subset \mathcal{A}^\perp$
3. Pour toute partie $\mathcal{A}$ de E, $\mathcal{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E,

$$\mathcal{A}^\perp = Vect(\mathcal{A})^\perp \qquad \mathcal{A} \subset (\mathcal{A}^\perp)^\perp$$

4. Si F et G sont deux sous-espace vectoriel de E

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

Preuve :

1. $\forall x \in E, (x|0) = 0$ donc $x \in \{0\}^\perp$ et $\{0\}^\perp = E$. Si $x \in E^\perp, (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (produit scalaire)

2. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, soit $x \in \mathcal{B}^\perp$ et $a \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}, (x|a) = 0$, donc $x \in \mathcal{A}^\perp$
3. $\forall a \in E, a^\perp = \{x \in E/(a|x) = 0\} = Ker(f_a)$, avec $f_a = (a|x)$ sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{A}^\perp = \bigcap\limits_{a \in \mathcal{A}} a^\perp$

   Remarque : si $a \neq 0, f_a \neq 0$ (car $f_a(a) = \|a\|^2 > 0$) donc $a^\perp$ est un hyperplan. D'autre part $\mathcal{A} \subset Vect(\mathcal{A})$, donc $Vect(\mathcal{A})^\perp \subset \mathcal{A}^\perp$ et si $x \in \mathcal{A}^\perp, \forall n \in \mathbb{N}, \forall (a_1; ...; a_n) \in \mathcal{A}^n, \forall (\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\left(x|\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x|a_i) = 0$$
   car $x \in \mathcal{A}^\perp$ et $x \in (Vect(\mathcal{A}))^\perp$. Enfin, $\forall a \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathcal{A}^\perp, (x|x) = 0$ donc $a \in \mathcal{A}^\perp$
4. $\begin{cases} F & \subset F+G \\ G & \subset F+G \end{cases} \Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$

   Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp, \forall (y,z) \in F \times G, (x|y+z) = (x|y) + (x|z) = 0, x \in (F+G)^\perp$

   Enfin $\begin{cases} F \cap G \subset F \\ F \cap G \subset G \end{cases} \Rightarrow F^\perp \cup G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp = Vect(F^\perp \cup G^\perp) \subset (F \cap G)^\perp$

   ⚠En dimension infinie, on peut avoir $F \subsetneq (F^\perp)^\perp$, soit dans $\mathbb{R}[X]$
$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$
$$H = X\mathbb{R}[X] = \{XP/P \in \mathbb{R}[X]\} = \{A \in \mathbb{R}[X]/A(0) = 0\}$$
   hyperplan, noyau de la forme linéaire non nulle $A \mapsto A(0)$. Soit $P \in H^\perp$, comme $XP \in H$
$$(P|XP) = 0 = \int_0^1 tP(t)^2 dt$$
   $t \mapsto tP(t)^2$ est nulle sur $]0;1]$, donc $P = 0$ (s'annule sur $]0;1]$). Ainsi $H^\perp = \{0\}$ et $H \subsetneq (H^\perp)^\perp = \mathbb{R}[X]$

Remarque

Si E est un espace muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien, euclidien s'il est de dimension finie. Un espace hilbertien est un espace complet muni d'un produit scalaire

11.1.4 Familles orthogonales

Définition

Soit $(E, \|.\|_2)$ un espace préhilbertien, on dit que $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale (resp. orthonormée) :

1. $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) = 0$
2. resp. $\forall (i,j) \in I^2, (x_i|x_j) = \delta_{i,j}$

Une famille orthonormée est une famille où tout les vecteurs ont la même norme, 1

Théorème

Une famille orthogonale ne comprenant pas 0 (en particulier une famille orthonormée) est libre

Preuve : soit $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$ (à support fini, $\{i \in I / \lambda_i \neq 0\}$ est fini)

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 &= \forall j \in I, (x_j | \sum_{i\in I} \lambda_i x_i) = 0 \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i (x_j | x_i) = 0 \\ &= \lambda_j \|x\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_j = 0 \end{aligned}$$

Exemples

1. La base canonique est une b.o.n de $\mathbb{R}^n$
2. Dans l^2, soit pour $p \in \mathbb{N}$, $e_p = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}} = (0; ...; 0; 1; 0; ...; 0)$, (e_p) est o.n. Notons que
$$Vect[e_p]_{p\in\mathbb{N}} = \{(u_n) / \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = 0\} \neq l^2$$
et (e_p) n'est pas une base de l^2
3. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), 2\pi\text{−périodique }\}$ muni de $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}g$
Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\begin{array}{cccc} e_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & e^{int} \end{array}$
$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2, (e_n | e_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt$$
Or $(e_n|e_m) = 1$ si $m = n = \frac{1}{2\pi}[\frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)}]_0^{2\pi} = 0$ sinon, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est o.n

Vecteur unitaire, normalisé

On dit que $x \in E$ est unitaire (ou normalisé) si et seulement si $\|x\| = 1$. Pour $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|}$ et $-\frac{x}{\|x\|}$ sont les seuls unitaires colinéaires à x

Théorème de Pythagore

Soit $(x_1; ...; x_n)$ une famille orthogonale, on a :

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 &= (\sum_{i=1}^{n} x_i | \sum_{j=1}^{n} x_j) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} (x_i|x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\end{aligned}$$

Remarque

On a la réciproque pour $n = 2$, on a :

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \Leftrightarrow (x_1|x_2) = 0$$

C'est faux pour $n \geq 3$

11.1.5 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème

Soit $(E, \|.\|_2)$ un espace préhilbertien et $(x_1; ...; x_n)$ (resp. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une famille libre. On cherche à construire $(f_1; ...; f_n)$ (resp. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) tel que :

1. $(f_1; ...; f_n)$ (resp. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est orthogonale
2. $Vect[f_k]_{k\in[|1;n|]}$ (resp. $\in \mathbb{N}$) $\in Vect[x_1; ...; x_n]$
3. La coordonnée de f_k selon x_k vaut 1

Supposons qu'une telle famille existe. La matrice de $(f_1; ...; f_n)$ dans $(x_1; ...; x_n)$ est alors triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$$

donc $(f_1; ...; f_n)$ est une base de $Vect[x_1; ...; x_n]$. De plus $\forall k \in [|1; n|]$ (resp. $\in \mathbb{N}$)

$$Vect[f_1; ...; f_n] = Vect[x_1; ...; x_n] = F_k$$

Nécessairement $f_1 = x_1$. Soit $k \in [|1; n-1|]$ (resp. $\in \mathbb{N}$), supposons $(f_1; ...; f_n)$ définie et unique :

$$f_{k+1} = x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,k} f_j$$

$\forall i \in [|1; k|], (f_{k+1}|f_i) = 0 \Leftrightarrow (x_{k+1}|f_i) = -\alpha_{i,k}\|f_i\|^2$ car $(f_1; ...; f_n)$ est orthogonale si et seulement si :

$$\alpha_{i,k} = \frac{(x_{k+1}|f_i)}{\|f_i\|^2}$$

d'où l'unicité en cas d'existence, réciproquement en définissant ainsi $(f_1; ...; f_n)$ par récurrence, en remontant les calculs, les 3 conditions sont satisfaites

En bref

Le procédé de Gram-Schmidt donne un procédé algorithmique pour orthonormalisé une famille libre $(x_1;...;x_n)$:

$$f_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \text{ et } \forall k \in [|1;n|], f_k = \frac{1}{x_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k|f_i)}{\|f_i\|^2} f_i}(x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k|f_i)}{\|f_i\|^2} f_i)$$

Pour construire une telle famille, on normalise le premier vecteur, puis pour construire les autres, on prend le k-ième vecteur moins la somme sur les vecteurs précédemment construit, puis on normalise

Théorème

Soit $(x_1;...;x_n)$ (resp. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une famille libre dans un espace préhilbertie, une famille $(\alpha_1;...;\alpha_n)$ (resp. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^n$ (resp. $(\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$). Il existe alors une unique famille de vecteurs $(\varepsilon_1;...;\varepsilon_n)$ (resp. $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

1. $\forall k \in [|1;n|]$ (resp. $\in \mathbb{N}$), $\varepsilon_k \in Vect(x_k)$
2. La famille ε_i est orthogonale
3. La coordonnée de ε_i selon x_i vaut α_i

Preuve : utiliser le procédé de Gram-Schmidt

Remarque

Il existe une famille orthonormée vérifiant 1. et 2. et $\forall i \in [|1;n|]$ (resp. $\mathbb{N}$), la coordonnée de ε_i selon α_i strictement positive

Polynômes orthogonaux

Soit $(P|Q) = \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt$ un produit scalaire à poids sur $\mathbb{R}[X]$. On part de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se donne $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. $\exists!(P_n)$ orthogonale telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$ et la coordonnée de P_n est α_n. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ admet une n racines simples $\in \mathring{I}$
Preuve : notons d'abors que $\forall n \geq 1, P_n \in Vect[P_0;...;P_{n-1}]^{\perp} = \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$. Notons $(\alpha_1;...;\alpha_p)$ les racines avec changement de signe de P_n sur $\mathring{I}$ (si P_n ne s'annule par sur $\mathring{I}, p = 0$). Soit

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i), Q = 1 \text{ si } p = 0$$

Si $n = 0$ l'énoncé est vrai
Si $n \geq 1$, supposons $p \leq n - 1$. Comme $\forall i \in [|1;p|], \alpha_i$ est racine de P_n, de multiplicité impaire alors PQ garde un signe constant sur I et

$$(Q|P_n) = \int_I (QP_n)(t)\omega(t)dt = 0$$

$QP_n\omega$ est continue de signe constant sur I. Ainsi $\forall t \in I, (P_nQ)(t)\omega(t) = 0$ donc $P_nQ = 0$, car ω est non nulle sur une partie infinie. Nécessairement $p = n$

Formule de Rodrigue

$\exists(\beta_n, \gamma_n, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n / \forall n \in \mathbb{N}$

$$\beta_n P_{n+2} = (X - \gamma_n)P_{n+1} - \Delta_n P_n$$

Preuve : $\deg(XP_{n+1}) = n + 2$, donc $\exists(\lambda_0; ...; \lambda_{n+2}) \in (\mathbb{R}^*)^{n+3}$, tel que

$$XP_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+2} \lambda_i P_i$$

Si $n \geq 1$, soit $j \in [|0; n-1|]$

$$(XP_{n+1}|P_j) = \int_I tP_{n+1}(t)P_j(t)\omega(t)dt = (P_{n+1}|XP_j) = 0$$

car $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$. Par ailleurs, par orthogonalité,

$$(XP_{n+1}|P_j) = \lambda_j \|P_j\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$$

Polynômes de Legendre

Soit pour $n \in \mathbb{N}, L_n = \frac{1}{2^n n!}((X^2-1)^n)^{(n)}$. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, \deg L_n = n$ et $\gamma(L_n) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

$$\begin{aligned}
(P|L_n) &= \int_{-1}^{1} P(t)L_n(t)dt \\
&= \frac{1}{2^n n!}([P(t)((t^2-1)^n)^{(n-1)}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P'(t)((t^2-1)^n)^{(n-1)}dt) \\
&\vdots \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} P^{(n)}(t)(t^2-1)^n dt \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (P^{(n)}|(X^2-1)^n)
\end{aligned}$$

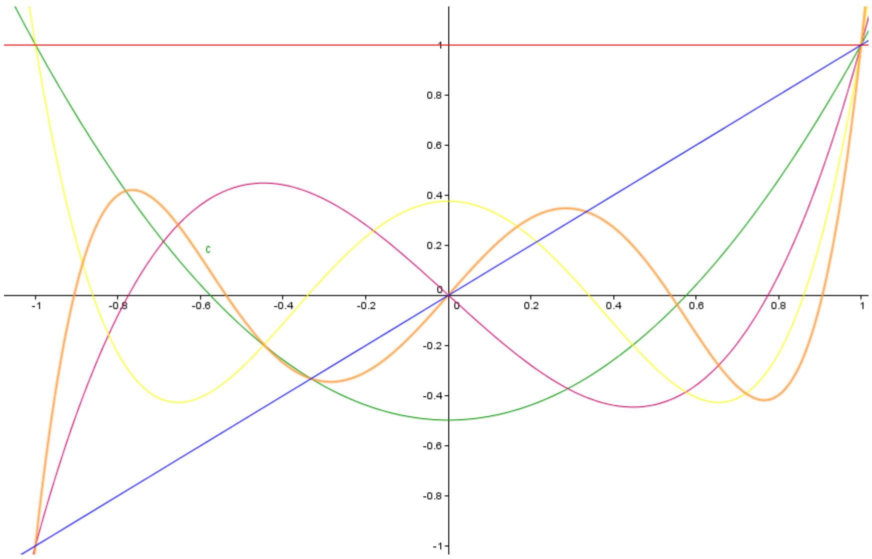
Le calcul montre alors que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et que

$$\|L_n\|_2^2 = \frac{2}{2n+1}$$

De plus, par récurrence triviale et en appliquant le théorème de Rolle, on obtient que L_n admet n racines simples sur $\mathbb{R}$
En utilisant le fait que pour un produit scalaire à poids on est $(XP|Q) = (P|XQ)$, on montre que :

$$XL_{n+1} = \frac{n+2}{2n+3} L_{n+2} + \frac{2}{(2n+1)\|L_n\|_2^2}$$

La famille $(L_n\sqrt{\frac{2n+1}{2}})$ est une famille totale, d'après le théorème de Weierstrass, car $Vect(L_n\sqrt{\frac{2n+1}{2}})$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([-1;1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, donc pour $\|.\|_2$



Remarque

On a généralement pour un produit scalaire à poids : $(A|BC) = (AB|C)$
Lorsqu'on s'impose $\forall n \in \mathbb{N}, \gamma(P_n) = 1, \beta_n = 1$ par identification et

$$(XP_{n+1}|P_n) = \gamma_n \|P_{n+1}\|^2 \Rightarrow \gamma_n = \frac{(XP_{n+1}|P_n)}{\|P_{n+1}\|^2}$$

De même $\Delta_n = \frac{(XP_{n+1}|P_n)}{\|P_n\|^2}$. La formule de Rodrigue permet donc de calculer les (P_n) par récurrence

Exemple

$I =]-1;1[, \omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, en posant $t = \cos(\theta), dt = -\sin(\theta)d\theta, \theta \in]0;\pi[$ et $0 < \sin\theta = \sqrt{1-t^2}$

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)d\theta$$

Soit T_n le n-ième polynôme de Tchebychev, $\deg(T_n) = n$, $\gamma(T_n) = 2^{n-1}$ et $T_0 = 1$

$$\forall n \neq m, (T_n|T_m) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0$$

(T_n) est l'unique suite de polynômes orthogonaux tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma(T_n) = 2^{n-1}$.
Ici $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Enfin

$$\|T_n\|^2 = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2n\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et $\|T_0\|^2 = \pi$

Lemme des Mines (HP)

Soit E un espace euclidien, $(e_1;...;e_p)$ une famille libre telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2$$

Soit $x \in Vect[e_1;...e_p]^\perp, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, donc la famille est génératrice. Soit $j \in [|1;p|]$

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{p}(e_j|e_i)^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i=1, i\neq j}^{p}(e_j|e_i)^2 \geq \|e_j\|^4$$

donc $\|e_j\| \leq 1$. Soit $H = Vect[e_i]_{i\neq j}$, hyperplan. Soit x unitaire orthogonal à H : $\forall i \neq j, (x|e_i) = 0$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2 = (x|e_j)^2 = 1 \leq \|x\|^2\|e_j\|^2$$

donc $\|e_j\|^2 = 1 \Rightarrow \|e_j\| = 1$, donc en reportant, $\forall i \neq j (e_i|e_j) = 0$

11.1.6 Bases orthonormées

Théorème

> Soit $(E, \|.\|)$ un espace préhilbertien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le procédé de Gram-Schmidt, il existe une b.o.n de E
>
> 1. Soit $x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $x_i = (e_i|x)$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ($|x_i|^2$ dans le cas d'un produit scalaire)
> 2. Soit $(x;y) \in E^2, \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\ y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \end{cases}$ alors
>
> $$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ (resp. } \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i)$$

Preuve :

1. $\forall j \in [|1;n|], (e_j|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i(e_j|e_i) = x_j$ et $\|x\|^2 = \sum_{(i,j)\in[|1;n|]^2} x_i x_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$
2. $(x|y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (e_i|e_j) = \sum x_i y_i$

Remarque

Le produit scalaire dans une b.o.n s'exprime comme le produit scalaire canonique dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

11.2 Supplémentaire orthogonal

11.2.1 Existence éventuelle

Théorème

Soit $(E, \|.\|)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E

1. On a toujours $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$
2. Si $E = F \oplus F^{\perp}$, on note $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$ (somme directe orthogonale). On a alors

$$F = (F^{\perp})^{\perp}$$

Dans ce cas on dit que F possède un unique supplémentaire orthogonal : $F^{\perp}$

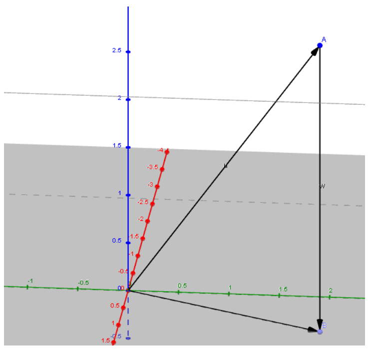
Preuve :

1. Si $x \in F \cap F^{\perp}, (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Si $E = F \oplus F^{\perp}$, soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$, on peut décomposer : $x = x_1 + x_2 / x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$
Comme $x \in (F^{\perp})^{\perp}, (x|x_2) = 0 = (x_1|x_2) + \|x_2\|^2$, donc $x_2 = 0$ et $x = x_1 \in F$. Ainsi $F = (F^{\perp})^{\perp}$
⚠En dimension finie, on a toujours $E = F \oplus F^{\perp}$. Ce n'est pas forcément le cas en dimension infinie ! ! ! cf $\mathbb{R}[X]$ muni de $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. On a vu que $X\mathbb{R}[X] = H, H \subsetneq (H^{\perp})^{\perp} = \mathbb{R}[X]$ donc H n'admet pas de supplémentaire orthogonal ($H^{\perp} = \{0\}$)

Projections et symétries orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire orthogonal. On peut définir p_F la projection orthogonale sur F (parallèlement à $F^{\perp}$) et s_F la symétrie orthogonale (parallèlement à $F^{\perp}$), $x - p_F(x) \in F^{\perp}$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \|s_F(x)\|^2$$



11.2.2 Caractérisation métrique

Théorème

Soit $(E, \|.\|)$ espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F admet un supplémentaire orthogonal
2. $\forall x \in E, \exists y \in F / \|x - y\| = d(x, F)$

Dans ce cas, $y = p_F(x)$ et c'est l'unique vecteur de F vérifiant 2.

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. soit $x \in E$, on peut définir $p_F(x)$, soit $z \in F$, on veut montrer que $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - z\|$

On a $\begin{cases} z - p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$ d'après le théorème de Pythagore

$$\|x - z\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|z - p_F(x)\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

On a égalité si et seulement si $\|z - p_F(x)\|^2 = 0 \Leftrightarrow z = p_F(x)$. Ainsi

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

2. $\Rightarrow$ 1. Soit $x \in E$ et $y \in F / d(x, F) = \|x - y\|$. Montrons que $x - y \in F^\perp$. Soit $z \in F$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, y + tz \in F \quad &\Rightarrow \quad \|x - (y + tz)\|^2 \geq \|x - y\|^2 \\ &\Rightarrow \quad \|x - y\|^2 - 2t(x - y|z) + t^2\|z\|^2 \geq \|x - y\|^2 \\ &\Rightarrow \quad -2t(x - y|z) + t^2\|z\|^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad t\|z\|^2 - 2(x - y|z) \geq 0, \forall t > 0 \end{aligned}$$

quand $t \to 0$, $(x - y|z) \leq 0$. Ce résultat vaut aussi pour $-z$, donc $(x - y|z) = 0$, d'où

$$x = y + x - y, y \in F \text{ et } y \in F, x - y \in F^\perp \Rightarrow E = F \oplus F^\perp$$

Cas de la dimension finie

Soit F un sous-espace de E. Soit $(\varepsilon_1; ...; \varepsilon_n)$ une b.o.n de F. On a

1. $\forall x \in E, x - \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|x)\varepsilon_i \in F^\perp$
2. $E = F \oplus F^\perp, p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|x)\varepsilon_i$
3. $d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|x_i)^2$

Preuve : soit $x' = x - \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|x)\varepsilon_i$, comme $F = Vect[\varepsilon_1; ...; \varepsilon_n]$, pour montrer $x' \in F^\perp$, il suffit de montrer que $\forall j \in [|1; n|], (\varepsilon_j|x') = 0$. Or $(\varepsilon_j'|x') = (\varepsilon_j|x) - \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|x)(\varepsilon_j|\varepsilon_i) = (\varepsilon_j|x) - (\varepsilon_j|x) = 0$

donc $x' \in F^\perp$. Ainsi

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|x)\varepsilon_i + x', \text{ donc } E = F \oplus F^\perp$$

et $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|x)\varepsilon_i$. Enfin, d'après le théorème de Pythagore

$$\|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2$$

Exemples

1. Droite vectorielle : $F = Vect[u]$, $\|u\| = 1$ alors $\forall x \in E, p_F(x) = (u|x)u$
2. Orthogonal d'une droite : $p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x) = x - (x|u)u$. On notera que :

$$\forall x \in E, x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$$

Remarque

Pour un produit scalaire complexe, on a :

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(\varepsilon_i|x)|^2$$

Inégalité de Bessel

Soit (s'il en existe) $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée dénombrable (donc E est de dimension infinie). Alors $((\varepsilon_i|x)^2)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\varepsilon_i|x)^2 \leq \|x\|^2$$

Preuve : soit J partie finie de I et $F = Vect(\varepsilon_i)_{i\in J}$. On peut appliquer la proposition précédente à F :

$$\sum_{i\in J} (\varepsilon_i|x)^2 = \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

ce qui établit la sommabilité et l'inégalité de Bessel

11.2.3 Famille totale

Théorème-définition

Soit $(E, \|.\|_2)$ un espace préhilbertien, $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée. Notons $G = Vect[\varepsilon_i]_{i\in I}$

$$\forall x \in E, \sum_{i\in I} (\varepsilon_i|x)^2 = \|x\|_2 \text{ égalité de Parseval } \Leftrightarrow \bar{G} = E$$

Dans ce cas, on dit que la famille $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ est totale, on a si $I = \mathbb{N}^*$

$$\|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i|x)\varepsilon_i - x\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La série $\sum(\varepsilon_i|x)\varepsilon_i$ converge vers x en $\|.\|_2$

Preuve : quitté à énumérer I, on peut supposer $I = \mathbb{N}^*$. Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = Vect[\varepsilon_1; ...; \varepsilon_n), G = \bigcup_{n\geq 1} F_n$

$$\forall x \in E, p_{F_n}(x) = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i|x)\varepsilon_i \text{ et } \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i|x)^2 = \|x - p_F(x)\|^2$$

<u>Si $\bar{G} = E$</u> : soit $\varepsilon > 0, \exists y \in G/\|x-y\|_2 \leq \sqrt{\varepsilon}$ et $\exists N \in \mathbb{N}/y \in F_N$, alors $\|x - p_{F_n}(x)\|_2^2 \leq \|x-y\|_2^2 \leq \varepsilon$

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i|x)^2 \leq \varepsilon$$

d'où $\forall n \geq N, \|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i|x)^2 \leq \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i|x)^2 \leq \|x\|^2$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i|x)^2 = \sum_{i=1}^{+\infty}(\varepsilon_i|x)^2 = \|x\|^2$$

<u>Réciproque</u> : soit $x \in E, \exists N \in \mathbb{N}/\|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i|x)^2 \leq \|x\|^2$ et

$$\|x - p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i|x)^2 \leq \varepsilon$$

Ceci prouve que : $E = \bar{G}$, enfin

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x - \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i|x)^2\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i|x)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemples

1. Dans l^2 muni de $\|(u_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$. Soit pour $p \in \mathbb{N}, e_p = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est o.n, soit
   $G = Vect[e_p]_{p\in\mathbb{N}} = \{$ suites réelles nulles à partir d'un certain rang $\}$
   Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. Soit pour $N \in \mathbb{N}, V_N = (v_{n,N})_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_{n,N} = u_n$ si $n \leq N$ et 0 sinon

$$\|u - v_N\|_2 = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} v_N = u$ au sens de $\|.\|_2$ et $\bar{G} = l^2$. Ici l'égalité de Parseval s'écrit :

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (e_n|u)^2$$

2. Soit segment $[a;b]$ et $\omega : [a;b] \to \mathbb{R}_+$ continue tel que $\{t \in [a;b]/\omega(t) > 0\}$ est infini. Soit $E = \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ muni de :

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt$$

semi-norme sur E. Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$ $G = Vect[f_n]_{n\in\mathbb{N}}$, famille orthonormale obtenu par le procédé de Gram-Schmidt, est l'ensemble des fonctions polynômes sur $[a;b]$. Soit $f \in E$, d'après le théorème de Weierstrass,

$$\exists (P_n) \in G^{\mathbb{N}} / \underset{\lim}{n \to} +\infty \|P_n - f\|_{\infty,[a;b]} = 0$$

$$\|P_n - f\|_2^2 = \int_a^b (P_n - f)(t)^2 \omega(t)dt \leq (b-a)\|\omega\|_{\infty,[a;b]} \|P_n - f\|_{\infty,[a;b]}^2$$

Dans $(E, \|.\|_2), \bar{G} = E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E

Théorème

Si la famille $(e_i)_{i\in I}$ est totale dans $(E, \|.\|_2)$, soit $G = Vect[e_i]_{i\in I}$ alors $G^\perp = \{0\}$ et si $(x,y) \in E^2$ vérifient $\forall i \in I, (x|e_i) = (y|e_i)$ alors $x = y$

Preuve : si $x \in G^\perp$, $\|x\|_2 = \sum\limits_{i\in I} (x|e_i)^2 = 0$ donc $x = 0$, puis on applique à $x - y$

On a la réciproque dans les espaces de Hilbert

11.2.4 Déterminant de Gram (HP)

Définition

Soit $(E, \|.\|_2)$ un espace préhilbertien, $(x_1; ...; x_p) \in E^p$. on lui associe la matrice de Gram :

$$\mathcal{G}ram(x_1; ...; x_p) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_p) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (x_p|x_1) & & & (x_p|x_p) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

matrice symétrique et $Gram(x_1; ...; x_p) = \det(\mathcal{G}ram(x_1; ...; x_p))$

Théorème

1. $(x_1;...;x_p)$ est libre si et seulement si $Gram(x_1;...;x_p) \neq 0$, ce qu'on suppose par la suite. On note $F = Vect[x_1;...x_p]$
2. Soit $(\varepsilon_1;...;\varepsilon_p)$ une b.o.n de F et $P = \mathcal{P}_{\varepsilon_i \to x_i} = \begin{pmatrix} (x_1|\varepsilon_1) & \dots & (x_p|\varepsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1|\varepsilon_p) & \dots & (x_p|\varepsilon_p) \end{pmatrix}$
   On a $\mathcal{G}ram(x_1;...;x_p) = {}^tP \times P$. $Gram(x_1;...;x_p) = (\det(P))^2 > 0$
3. Soit $(e_1;...;e_p)$ b.o.n de F obtenu par le procédé de Gram-Schmidt à partir de $(x_1;...;x_p)$. Alors :
   $$P = \begin{pmatrix} (x_1|e_1) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & (x_p|e_p) \end{pmatrix}$$
   $Gram(x_1;...;x_p) = \prod_{i=1}^{p} (x_i|e_i)^2 \leq \prod_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$ c'est l'inégalité de Hadamard avec égalité si et seulement si $(x_1;...;x_p)$ est orthogonale
4. Soit $x \in E$, on a :
   $$d(x,F) = \sqrt{\frac{Gram(x;x_1;...;x_p)}{Gram(x_1;...;x_p)}}$$

Preuve :

1. Soit $(\lambda_1;...;\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, notons $C_1;...;C_p$ les colonnes de $\mathcal{G}ram(x_1;...;x_p)$ si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$.
   Comme $\forall j \in [|1;p|], C_j = \begin{pmatrix} (x_1|x_j) \\ \vdots \\ (x_p|x_j) \end{pmatrix}$. Alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0 = \begin{pmatrix} (x_1| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) \\ \vdots \\ (x_p| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) \end{pmatrix}$
   Réciproquement : si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0$ alors $\forall j \in [|1;p|], (x_j| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) = 0$ et $\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\|_2^2 = 0$ d'où $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$
2. $\forall (i,j) \in [|1;p|]^2, (x_i|x_j) = \sum_{k=1}^{p} (x_i|\varepsilon_k)(\varepsilon_k|x_j) = [{}^tPP]_{i,j}$
3. L'inégalité et le cas l'égalité proviennent de Cauchy-Schwartz et on a égalité si et seulement si $\forall i \in [|1;p|], x_i$ et e_i sont colinéaires, $(x_1;...;x_p)$ est orthogonale
4. Soit $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F : $x - p_F(x) \in F^\perp = \{x_1;...;x_p\}^\perp$
   $$\mathcal{G}ram(x;x_1;...;x_p) = \begin{pmatrix} (x|x) & (x_1|x) & \dots & (x_p|x) \\ (x|x_1) & (x_1|x_1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x|x_p) & (x_p|x_1) & \dots & (x_p|x_p) \end{pmatrix}$$

Si $p_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ effectuons $C_0 \longleftarrow C_0 - \lambda_1 C_1 - ... - \lambda_p C_p$

$$\begin{aligned} Gram(x; x_1; ...; x_p) &= \begin{vmatrix} (x - p_F(x)|x) & * \\ 0 & \mathcal{G}ram(x_1; ...; x_p) \end{vmatrix} \\ &= (x - p_F(x)|x) Gram(x_1; ...; x_p) \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 Gram(x_1; ....; x_p) \end{aligned}$$

d'où

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{Gram(x; x_1; ...; x_p)}{Gram(x_1; ...; x_p)}}$$

Remarques

1. Si F est un hyperplan, soit e normalisé orthogonal à F : $x - p_F(x) = (x|e)e$. Par conséquent :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = |(x|e)|$$

2. Dans le cas de 2 vecteurs :

$$Gram(x, y) = \begin{vmatrix} \|x\|^2 & (x|y) \\ (x|y) & \|y\|^2 \end{vmatrix} = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x|y)^2 \geq 0$$

avec 0 si et seulement si (x, y) est liée. On retrouve Cauchy-Schwartz

Chapitre 12

Espaces Euclidiens

Sommaire

12.1 Généralités

12.1.1 Définitions

Définition

On appelle espace euclidien $(E, (.|.))$ tout espace préhilbertien de dimension finie. Dans un tel espace, il existe des bases orthonormées (obtenu par le procédé de Gram-Schmidt à partir d'une base). Soit $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ une b.o.n de E

Produit scalaire dans une b.o.n

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY = {}^tYX \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Théorèmes

1. Tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire orthogonal, on a : $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$ et $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F = codim_E(F)$
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriel de E, on a : $\begin{cases} (F+G)^{\perp} & = F^{\perp} \cap G^{\perp} \\ (F \cap G)^{\perp} & = F^{\perp} + G^{\perp} \end{cases}$

Preuve :

1. F est de dimension finie, donc $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$ et $F = (F^{\perp})^{\perp}$. Le premier point implique que $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$
2. On a toujours le premier point ainsi que l'inclusion $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$
   De plus ici, $F \cap G = (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp} = (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp}$. Alors $(F \cap G)^{\perp} = ((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp})^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

12.1.2 Théorème de représentation des formes linéaires

Théorème

Soit E un espace euclidien et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, espace des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$. On adim $E^* = \dim E$. Soit $a \in E$ et $\begin{array}{cccc} \varphi_a & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (a|x) \end{array}$ forme linéaire. Alors $\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & E^* \\ & & a & \mapsto & \varphi_a \end{array}$ est un isomorphisme

$$\forall f \in E^*, \exists! a \in E / \forall x \in E, \varphi(x) = (a|x)$$

Preuve : $\forall (\lambda, a, b, x) \in \mathbb{R} \times E^3, \varphi_{\lambda a + b}(x) = (\lambda a + b|x) = \lambda(a|x) + (b|x) = \lambda\varphi_a(x) + \varphi_b(x)$ donc φ est linéaire. De plus si $a \in \ker \varphi$ alors $\varphi_a = 0$ et $\forall x \in E, (a|x) = 0 \Rightarrow \|a\|^2 = 0 \Rightarrow a = 0$, φ est injective, donc bijective en dimension finie, c'est un isomorphisme

Remarque

$\ker \varphi_a = \{a\}^\perp$. En outre,

$$\forall x \in E, |\varphi_a(x)| \leq |(a|x)| \leq \|a\|\|x\|$$

d'où $|||\varphi_a||| \leq \|a\|$. Si $a = 0$, on a égalité et si $a \neq 0$, on a pour $x = \frac{a}{\|a\|}, |\varphi_a(x)| = \|a\| \Rightarrow |||\varphi_a||| = \|a\|$

Équation d'un Hyperplan vectoriel

Soit H un hyperplan de E et $a \in H^\perp \setminus \{0\}$, $H^\perp = Vect[a]$ et $H = \{a\}^\perp$. Soit $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i, \forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$

$$x \in H \Leftrightarrow (a|x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

12.2 Isométries

12.2.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que c'est une isométrie vectorielle (ou endomorphisme orthogonal) si et seulement si :

1. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
2. $\forall (x;y) \in E^2, \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$
3. $\forall (x;y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. $\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| = \|x - y|$
2. $\Rightarrow$ 3. $\forall (x;y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = \frac{1}{4}(\|u(x) - u(y)\|^2 + \|u(x) + u(y)\|^2) = \frac{1}{4}(\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2) = (x|y)$
3. $\Rightarrow$ 1. $(u(x)|u(x)) = (x|x) \Rightarrow \|u(x)\| = \|x\|$

Exemples

1. id_E et $-id_E$
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F, $\forall x = x_1 + x_2 \in E / x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$

$$\|s_F(x)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$$

Groupe orthogonal

On définit $O(E)$ l'ensemble des isométries de E. C'est un sous-groupe de $GL(E)$ appelé groupe orthogonal

Action d'une isométrie sur une b.o.n

Soit $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ une b.o.n de E et $u \in \mathcal{L}(E)$

$$u \in O(E) \Leftrightarrow (u(e_1); ...; u(e_n)) \text{ est une b.o.n}$$

Preuve : cf cours de MPSI

Spectre et stabilité

1. $\dim E = 1$, $O(E) = \{id; -id\}$
2. Si F est stable par $u \in O(E)$ alors $u_{|F} \in O(F)$ et $F^{\perp}$ est stable par u
3. $u \in O(E) \Rightarrow Sp(u) \subset \{1; -1\}$

Preuve :

1. c'est une homothétie de rapport λ et $\forall x \in E \setminus \{0\}, \|u(x)\| = |\lambda|\|x\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$
2. $\forall x \in F, \|u_{|F}(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|, u_{|F} \in O(F) \subset GL(F)$. Soit alors $y \in F^{\perp}$ et $x \in F$, $(u(y)|x) = (u(y)|u_{|F}(u_{|F}^{-1}(x))) = (y|u_{|F}^{-1}(x)) = 0$ donc $u(y) \in F^{\perp}$
3. Si x_0 est vecteur propre, $F = Vect[x_0]$ est stable et $u_{|F} = \pm id_F$

12.2.2 Forme matricielle, $O_n(\mathbb{R})$

Théorème

Soit E un espace euclidien de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ une b.o.n de E fixée, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = mat_{\mathbb{B}}(u)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $u \in O(E)$
2. ${}^tMM = I_n$
3. M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$
4. $M{}^tM = I_n$

Dans ce cas on dit que M est une matrice orthogonale, on note

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I_n\}$$

Preuve : cf cours de MPSI

⚠La condition $u \in O(E)$ si et seulement si ${}^tMM = I_n$ ne vaut que dans une b.o.n

Propriétés

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$
2. Le système des vecteurs colonnes de M forme une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique
3. ${}^tM \in O_n(\mathbb{R})$
4. Le système des lignes de M forme une b.o.n de $\mathbb{R}^n$

Preuve : cf cours de MPSI

Remarque

Pour vérifier qu'une matrice appartient à $O_n(\mathbb{R})$, on vérifie que chaque colonne est nominalisée et qu'elles sont deux à deux orthogonales

$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \|c_1\|^2 = \|c_2\|^2 = \|c_3\|^2 = 1$

$(c_1|c_2) = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0 = (c_1|c_3) = (c_2|c_3)$

Structure topologique de $O_n(\mathbb{R})$

$O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Preuve : $\forall M = (m_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall j \in [|1;n|]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$, donc $\forall (i,j) \in [|1;n|]^2, |m_{i,j}| \leq 1, O_n(\mathbb{R})$ est bornée. De plus, soit $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$ continue et $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ est fermé. $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné en dimension finie, c'est un compact

Structure de groupes

1. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ appelé groupe orthogonal
2. $\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \det(M) \in \{+1; -1\}$
3. Soit $SO_n(\mathbb{R})$ (noté aussi $O_n^+(\mathbb{R})$) $= \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$. C'est un sous-groupe appelé groupe spécial orthogonal
4. $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$ vérifie $O_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R}) \cap O_n^-(\mathbb{R})$. Cet ensemble n'a pas de structure algébrique

Preuve : cf. cours de MPSI

Exemple

Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(M) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1$, donc $M \in O_3^-(\mathbb{R})$

Structure de $O(E)$

Soit E un espace euclidien

1. $\forall u \in O(E, \det(u) \in \{-1; +1\}$. On dit que c'est une isométrie directe (resp. indirecte) si et seulement si $\det u = +1$ (resp. -1)
2. La composée de deux isométries directes est directe, de deux indirecte est directe, d'une indirecte et d'une directe est indirecte
3. On note $O^+(E) = SO(E) + \{u \in O(E) / \det u = +1\}$ c'est un sous-groupe de $O(E)$. On note $O^-(E) = \{u \in O(E) / \det u = -1\}$

⚠Il ne suffit pas que $\det u = \pm 1$ pour que $u \in O(E)$! ! !, cf $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exemples

1. Soit H un hyperplan de E, s_H la réflexion par rapport à H (symétrie orthogonale par rapport à H). Dans une b.o.n adaptée à $E = H \oplus H^\perp$

$$mat_{\mathcal{B}}(s_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   $\det s_H = -1$, s_H est indirecte

2. $\det(-id_E) = (-1)^{\dim E}$, donc $-id_E$ est directe si et seulement si $\dim E \in 2\mathbb{N}$
3. Retournement ou demi-tour est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de codimension 2. Dans une b.o.n adaptée la matrice d'un retournement est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   un demi-tour est toujours direct

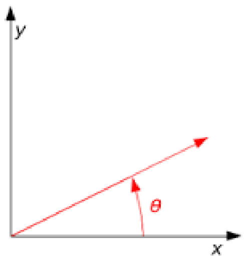
12.2.3 Étude de $O_2(\mathbb{R})$

Théorème

1. $M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$
2. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$. De plus $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. Par récurrence, il vient $\forall n \in \mathbb{Z}, R_\theta^n = R_{n\theta}$
3. $R_\theta = R_{\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$. $SO_2(\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe commutatif $(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}})$ et à $(\mathbb{U}, \times)$
4. $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

   $$Sp_{\mathbb{R}}(R_\theta) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv 0[2\pi] \\ \theta \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R_\theta = I_2 \text{ ou } -I_2$$

   Si $\theta \not\equiv 0[\pi], R_\theta$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ et n'a pas de valeurs propres réelles
5. $M \in O_2^-(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = S_\theta$
6. $\chi_{S_\theta} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ et S_θ est la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport à $R\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$



Structure de $O_2(E)$

Soit E un plan euclidien

1. $O^+(E)$ est un sous-groupe commutatif de $O(E)$
2. $O^-(E)$ est l'ensemble des réflexions de E
3. Tout élément de $O^+(E)$ est le produit de 2 réflexions

Preuve : 3.

$$S_\theta \times S_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

⚠$O^+(E)$ est commutatif, mais pas $O(E)$! $(S_0 \times S_\theta = R_{-\theta})$

Topologie de $O_n(\mathbb{R})$ (HP)

$SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, mais pas $O_n(\mathbb{R})$, dont les composantes connexes par arcs sont :

$$O_n(\mathbb{R}) = O_n^-\mathbb{R} \cup SO_n(\mathbb{R})$$

Preuve : pour le premier point, on applique le théorème de réduction, on construit un chemin entre une matrice fixée et n'importe quelle matrice, en posant les arguments des rotations de la forme θt. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, det étant continu sur $O_n(\mathbb{R})$, $\det O_n(\mathbb{R})$ serait un intervalle de $\mathbb{R}$, or $\det O_n = \{-1; 1\}$, donc $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. Par un raisonnement analogue au précédent on montre que $O_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

12.2.4 Théorème de réduction

Lemme utile

Soit E un espace euclidien de dimension $\geq 1, u \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe un sous-espace F de E stable par u de dimension 1 ou 2

Preuve : si u admet une valeur propre réelle λ, soit x_0 un vecteur propre associé : $F = Vect[x_0]$ convient

Si $Sp_{\mathbb{R}}[u] = \emptyset, \chi_u$ s'écrit $\prod\limits_{k=1}^{m}(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^{r_k}$ avec $r_k \geq 1$, $\alpha_k^2 - 4\beta_k < 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton

$$\prod_{k=1}^{m}(u^2 + \alpha_k u + \beta_k id)^{r_k} = 0$$

donc $\exists k_0 \in [|1; n|]/u^2 + \alpha_k u + \beta_k id$ ne soit pas injectif (utiliser le déterminant) sinon le produit le serait. Soit $x_0 \in Ker(u^2 + \alpha_{k_0} u + \beta_{k_0} id) \setminus \{0\}$. Soit $F = Vect[x_0, u(x_0)], \dim F = 2$ car $x_0 \neq 0$ et $u(x_0) \notin Vect[x_0]$ (sinon $Sp(u) \neq \emptyset$). Comme $u(x_0)^2 = -\alpha_{k_0} u(x_0) - \beta_{k_0} x_0 \in F$. F est stable par u

Théorème de réduction des isométries

1. Soit $u \in O(E), \exists k \in \mathbb{N}, \exists(\theta_1; ...; \theta_k) \in \mathbb{R}^k$, $\exists\mathcal{B}$ b.o.n de E

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $M \in O_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}) / P^{-1}MP = {}^tPMP$ soit de la forme précédente. On dit que M est orthosemblable à une telle matrice

Preuve :

1. Par récurrence sur la dimension de E
   $\dim E = 1$, dans toute b.o.n de E, $mat(u) = (-1)$ ou (1)
   Supposons la propriété vraie si $\dim E \leq n$. Soit E espace euclidien tel que $\dim E = n+1$, $u \in \mathcal{L}(E)$. D'après le lemme, il existe F sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2 stable par u. Dans une b.o.n $\mathcal{B}_1$ de F, $mat_{\mathcal{B}_1}(u) = (1)$ ou (-1), si $\dim F = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ si $\dim F = 2$ et $u_{|F}$ est indirecte et R_θ si $\dim F = 2$ et $u_{|F}$ est directe
   Par ailleurs $F^\perp$ est stable par u et $u_{|F} \in O(F^\perp)$ comme $\dim F^\perp \leq n$, d'après (HR), $\exists \mathcal{B}_2$ b.o.n de $F^\perp / mat_{\mathcal{B}_2}(u_{|F})$ est de la forme requise, en recollant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une b.o.n de E dans laquelle la matrice de u est de la forme requise
2. Considérer $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à M : $u \in O(\mathbb{R}^n)$

Corollaire (HP)

Soit $u \in O(E), p = codim_E(Ker(u - id_E))$

1. u peut s'écrire comme produit de p réflexions
2. p est le nombre minimal dont u est le produit

Preuve :

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   produits de 2 réflexions. Avec les notations des théorème, u est le produit de $2k + s = codim(Ker(u - id_E))$ réflexions
2. Si $u = s_{H_1} \circ ... \circ s_{H_m}$ où H_i hyperplan si $x \in \bigcap_{i=1}^{m} H_i$ alors $u(x) = x$ et $\bigcap_{i=1}^{m} H_i \subset Ker(u - id_E)$ donc
   $$Ker(u - id)^\perp \subset (\bigcap_{i=1}^{m} H_i)^\perp = \sum_{i=1}^{m} H_i^\perp$$
   d'où $p \leq m$

Corollaire

Les réflexions engendrent au sens de groupe multiplicatif $O(E)$

12.2.5 Orientation de l'espace

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On choisit une base $\mathcal{B}_0$, dite base de référence (base canonique dans $\mathbb{R}^n$). Soit $\mathcal{B}$ une autre base de E, $\det \mathcal{B} \neq 0$

$\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} > 0$: $\mathcal{B}$ est directe dans E orienté par $\mathcal{B}_0$

$\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} < 0$: $\mathcal{B}$ est indirecte dans E orienté par $\mathcal{B}_0$

Orientation induite d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E, on choisit $x_0 \in E \setminus H$. On dit que $(x_1; ...; x_{n-1})$ est une base directe de H orienté par x_0 si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}_0}(x_0; x_1; ...; x_{n-1}) > 0$$

Cas d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien orienté par une base $\mathcal{B}_0$. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux b.o.n de E et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \in O_n(\mathbb{R})$, donc $\det P = \pm 1$. Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont toutes les 2 directes :

$$\det P = \det_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2 = \det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_2 \det_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_0 = \pm 1$$

Produit mixte

Soit $(x_1; ...x_n) \in E^n$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}_2}(x_1; ...; x_n) = \det_{\mathcal{B}_1}(x_1; ...; x_n) \det_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1 = \det_{\mathcal{B}_1}(x_1; ...; x_n)$$

Ainsi $(x_1; ...; x_n)$ a le même déterminant dans toutes les b.o.n.d, on l'appelle produit mixte de $(x_1; ...x_n)$, noté $[x_1; ...; x_n]$. C'est le volume orienté du parallélépipède défini par $(x_1; ...; x_n)$

Exemple

En dimension 2, soit $(e_1; e_2)$ b.o.n.d d'un plan euclidien orienté, $(x_1; x_2) \in E^2$, si $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$, posons $f_1 = \frac{x_1}{\|x\|}$ et soit f_2 l'unique vecteur unitaire, $(f_1; f_2)$ soit une b.o.n.d
$\exists ! \theta \in [0; 2\pi[/ x_2 = \|x\|_2 (f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta)$. On a

$$[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} \|x_1\| & \|x_2\| \cos\theta \\ 0 & \|x_2\| \sin\theta \end{vmatrix} = \|x_1\| \times \|x_2\| \sin\theta$$

Aire orientée du parallélogramme défini par $(x_1; x_2)$. Le produit mixte est antisymétrique

Lien avec le produit scalaire

En dimension 2 : $(x_1|x_2) = \|x_1\| \times \|x_2\|$

$$[x_1, x_2]^2 + (x_1|x_2)^2 = \|x_1\|^2\|x_2\|$$

Produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 2$. Soit $(x_1;...;x_{n-1}) \in E^{n-1}$. L'application : $\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [x_1;...;x_{n-1};x] \end{array}$ est une forme linéaire, donc $\exists ! x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \in E / \forall x \in E$

$$[x_1;...;x_{n-1};x] = (x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}|x)$$

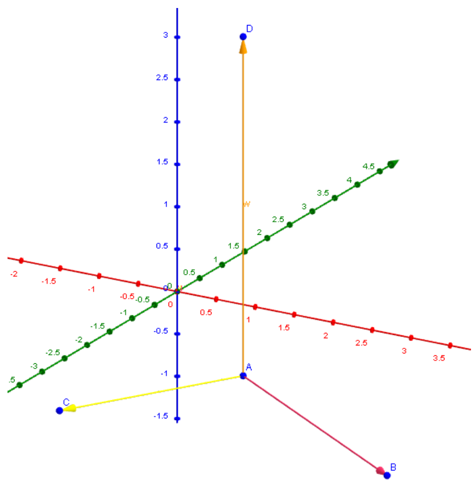


FIGURE 12.1 – Produit vectoriel en dimension 3

Propriétés

1. $\wedge$ est antisymétrique et alternée
2. $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} = 0 \Leftrightarrow (x_1;...;x_{n-1})$ est liée
3. Si $(x_1;...;x_{n-1})$ est libre $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ est l'unique vecteur de E tel que
   (a) $\forall i \in [|1;n-1|], (x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}|x_i) = 0$
   (b) $\|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\| = |[x_1;...;x_{n-1}]|$
   (c) $(x_1;...;x_{n-1};x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$ est une base directe
4. $(e_1;...;e_n)$ est une b.o.n.d si et seulement si $\forall i \in [|1;n|], e_i = e_{i+1} \wedge .... \wedge e_n \wedge e_1 \wedge ... \wedge e_{i-1}$

Effet d'une isométrie

Le fait qu'une isométrie soit directe ou indirecte lui est intrinsèque. Si l'espace euclidien est orienté, une isométrie directe respecte l'orientation et une indirecte renverse l'orientation

Rotations en dimension 2

Soit E un plan euclidien orienté. Soit $u \in SO(E)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ et $\mathcal{B}' = (f_1; f_2)$ deux b.o.n.d de E et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \in SO_2(\mathbb{R})$. $\exists! \theta \in [0; 2\pi[/ mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$
On a $mat_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1} R_\theta P = R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$, groupe commutatif. Ainsi u a la même matrice R_θ dans toutes les b.o.n.d : on dit que u est la rotation d'angle orienté θ dans le plan euclidien orienté E

⚠Dans une b.o.n.i $\mathcal{B}''$, on vérifie $mat_{\mathcal{B}''}(u) = R_{-\theta}$. Dans tous les cas on a : $tr(u) = 2\cos\theta$. θ est l'unique élément $\in [0; 2\pi[/ \forall x \in E \setminus \{0\}$, si y vérifie $(\frac{x}{\|x\|}; y)$ est une b.o.n.d, on ait $u(x) = \|x\|(\frac{x}{\|x\|}\cos\theta + y\sin\theta)$

$$mat_{(\frac{x}{\|x\|};y)}(u) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Produit mixte en dimension 3

On définit le produit mixte de 3 vecteurs est définit comme :

$$[x, y, z] = \det_{\mathcal{B}_0}(x, y, z) = (x|y \wedge z)$$

Produit vectoriel en dimension 3

En dimension 3, le produit vectoriel de deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Double produit vectoriel

$$\forall (u, v, w) \in E^3, (u \wedge v) \wedge w = (u|w)v - (v|w)u$$

Produit vectoriel, produit scalaire et angle

1. $\forall (x,y) \in E^2, (u|v) = \|u\| \times \|v\| \cos(u,v)$
2. $\forall (x,y) \in E^2, u \wedge v = \|u\| \times \|v\| |\sin(u,v)| n$, où n est la direction de $u \wedge v$ définit par la règle des trois doigts, unitaire

12.2.6 Réduction, des isométries de l'espace

Isométries directes

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, $u \in SO(E) \setminus \{id\}$. On a :

1. $\dim Ker(u - id) = 1, D = Ker(u - id)$ est une droite vectorielle appelée axe de u. Soit $P = D^{\perp}$. On choisit f_3 unitaire $\in D$ et on oriente P par f_3
2. P est stable par u et $u_{|P}$ est une isométrie directe de P
3. $\exists! \theta \in]0; 2\pi[/ u_{|P}$ est la rotation d'angle θ dans P orienté par f_3. On dit alors que u est la rotation d'axe D orientée par f_3, d'angle θ
4. Soit (f_1, f_2) une b.o.n.d de P orienté par f_3, on a

$$mat_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$tr(u) = 1 + 2\cos\theta$

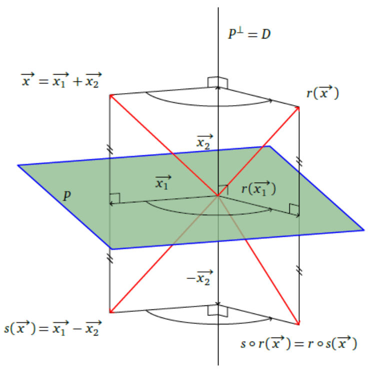


FIGURE 12.2 – Rotation en dimension 3

Preuve :

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ une b.o.n de E et $A = mat_{\mathcal{B}}(u) \in SO_3(\mathbb{R})$

$$\det(A - I_3) = \det A \det(I_3 - A^{-1}) = \det(I_3 - {}^tA) = -\det(A - I_3) = 0$$

Comme $u \neq id, \dim Ker(u-id) = 1$ ou 2. Si on avait $\dim Ker(u-id) = 2$ comme $u \in O(E)$: $Ker(u-id)^{\perp}$ est stable par u et $u_{|Ker(u-id)^{\perp}} = \pm id_{Ker(u-id)^{\perp}}$
Si $u_{|D'} = id_{D'}$ alors $u = id$, non
Si $u_{|D'} = -id_{D'}$ alors u est la réflexion par rapport à $Ker(u-id), \det u = 1$, non plus
Nécessairement $\dim Ker(u-id) = 1$

2. D est stable par $u \in O(E)$, donc $P = D^{\perp}$ est stable par u. Dans une b.o.n adaptée à $E = P \oplus D$:

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det A = \det u = 1$, donc $u_{|P} \in SO(P)$. De plus $u_{|P} \neq id_P$, sinon $u = id$

⚠La rotation d'axe D orientée par f_3 d'angle θ est aussi la rotation d'axe D orienté par $-f_3$ d'angle $-\theta$

Remarque

En pratique, on détermine d'abord $D = Ker(u-id)$, on a $\cos\theta = \frac{tr(u)-1}{2}$ ce qui définit θ au signe près. On choisit f_3 unitaire $\in D$ et $f_1 \in \{f_3\}^{\perp}$ unitaire et $f_2 = f_3 \wedge f_1$ de sorte que (f_1, f_2) soit une b.o.n.d unitaire de P orienté par f_3. On a :

$$\sin\theta = (u(f_1)|f_2) = (f_3 \wedge f_1|u(f_1)) = [f_3, f_1, u(f_1)]$$

Exemple

Reconnaître l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $A \in SO_3(\mathbb{R})$. On résout :

$$\begin{aligned}
(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - y + 2z & = 0 \\ 2x - y - z & = 0 \\ x - 2y - z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - y + 2z & = 0 \\ 2x - y - z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ -3y - 3z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = -z/z \in \mathbb{R} \\ x & = z \end{cases}
\end{aligned}$$

$f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On définit $f_2 = f_3 \wedge f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$D = Vect[f_3]$ et $P = D^{\perp}$

(f_1, f_2) b.o.n.d de P orienté par f_3. On a $\cos\theta = \frac{tr(A)-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta \pm \frac{\pi}{3}$

$Af_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\sin\theta = [f_3, f_1, u(f_1)] = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

Remarque

u est un retournement si et seulement si dans une bonne base orthonormée sa matrice est de la forme : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $tr(u) = -1$, c'est alors la symétrie orthogonale par rapport à D

Toute rotation est le produit de 2 réflexions, les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Isométries indirectes

Soit u une isométrie indirecte de E (euclidien orienté de dimension 3)

$$\det(-u) = -\det u = 1, -u \in SO(E)$$

Soit $-u = id$ et $u = -id$ (produit de 3 réflexions. Ou bien -u est une rotation d'axe D orienté par f_3, d'angle θ. Dans une b.o.n.d adaptée :

$$mat_{\mathcal{B}}(-u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta+\pi} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{\theta+\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

u est le produit commutatif d'une rotation et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe de rotation (rotation-miroir). Notons que u est une réflexion si et seulement si $tr(u) = 1$. Il suffit alors d'identifier $Ker(u - id)$

12.3 Endomorphismes auto-adjoint

12.3.1 Définition, propriétés

Définition

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est auto-adjoint ou symétrique si et seulement si

$$\forall (x;y) \in E^2 : (u(x)|y) = (x|u(y))$$

On note $S(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

Exemples

1. Les homothéties
2. Les projecteurs et symétries orthogonales. En effet soit F sous-espace vectoriel de E et p_F (resp. s_F) projecteur orthogonal sur F (resp. symétrie orthogonal par rapport à F). Soit $x = x_1 + x_2 / x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$ et $y = y_1 + y_2 / y_1 \in F$ et $y_2 \in F^\perp$
$(p_F(x)|y) = (x_1|y) + (x_2|y) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|p_F(y))$
$(s_F(x)|y) = (x_1 - x_2|y_1 + y_2) = (x|s_F(y))$

Remarque

Soit $u \in O(E)$, si u est auto-adjoint

$$\forall (x;y) \in E^2, (x|y) = (u(x)|u(y)) = (u(x)^2|y)$$

Ceci valant $\forall (x;y) \in E, \forall x \in E, u(x)^2 = x : u^2 = id_E$, donc u est une symétrie. De plus $\forall (x_1;x_2) \in Ker(u - id) \times Ker(u + id)$

$$(u(x_1)|x_2) = (x_1|x_2) = (x_1|u(x_2)) = -(x_1|x_2)$$

donc $(x_1|x_2) = 0$, $E = Ker(u - id) \oplus Ker(u + id)$ u est une symétrie orthogonale. On retiendra qu'une isométrie auto-adjointe est une symétrie orthogonale

Caractérisation matricielle

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$, b.o.n de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = mat_{\mathcal{B}}(u)$

$$u \textbf{ est auto-adjoint } \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A$$

Preuve :

$$\begin{aligned} u \in S(E) &\Leftrightarrow \forall (x;y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y)) \\ &\Leftrightarrow \forall (X;Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(AX)Y = {}^tX(AY) \\ &\Leftrightarrow {}^tX{}^tAY = {}^tXAY \\ &\Leftrightarrow {}^tA = A \end{aligned}$$

Remarque

Si $A \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$, alors d'après ce qui précède, l'endomorphisme u canoniquement associé est une symétrie orthogonale

Exemples

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. On cherche uniquement $Ker(u - id), \det A = -1$, c'est une réflexion

12.3.2 Théorème spectral

Lemme 1

Soit $u \in S(E)$ auto-adjoint et F stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u

Preuve : soit $(x; y) \in F \times F^{\perp}, (x|u(y)) = (u(x)|y) = 0$ donc $u(y) \in F^{\perp}$

Lemme 2

Soit $u \in S(E)$, alors u admet au moins une valeur propre réelle

Preuve : soit $\mathcal{B}$ b.o.n de E et $A = mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}/AX = \lambda X$. Il vient : ${}^t\overline{X}AX = \lambda {}^t\overline{X}X$, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ${}^t\overline{X}X = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$
On transpose et on conjugue : ${}^t\overline{X}AX = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = \lambda{}^t\overline{X}X$, donc $\overline{\lambda} = \lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Ainsi $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ et $Sp(u) \neq \emptyset$

Théorème

1. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Alors $\exists(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exists\mathcal{B}$ b.o.n de E, telle que
$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Un endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans une b.o.n
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), / P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Preuve : par récurrence sur la dimension de E. C'est vrai si $\dim E = 1$.
Supposons que c'est vrai si $\dim E \leq n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $u \in S(E)$. D'après le lemme 2, $\exists \lambda \in Sp(u)$ et soit $F = Ker(u - \lambda id) \neq \{0\}$ est stable par u.
D'après le lemme 1, $F^\perp$ est stable parce que $\dim F^\perp \leq n, u_{|F^\perp}$ est auto-adjoint, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut conclure

Remarque

Les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux, on peut le vérifier directement ; si $x \in Ker(u - \lambda id)$ et $y \in Ker(u - \mu id)$, $\lambda \neq \mu$, $u \in S(E)$

$$(u(x)|y) = \lambda(x|y) = (x|u(y)) = \mu(x|y)$$

d'où $(x|y) = 0$

12.3.3 Formes quadratiques associées à un endomorphisme auto-adjoint (HP)

Définition

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint (resp. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle).

On lui associe $\begin{array}{rccl} \varphi & : & E^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & (u(x)|y) = (x|u(y)) = (u(y)|x) \end{array}$

et $\begin{array}{rccl} q & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (u(x)|x) \end{array}$

(resp. $\begin{array}{rccl} \varphi & : & (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (X,Y) & \mapsto & (AX|Y) = {}^tYAX = {}^tXAY \in \mathbb{R} \end{array}$

et $\begin{array}{rccl} q & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & X & \mapsto & {}^tXAX \end{array}$ où on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$)

On dit que u (resp. A) est positif ou défini positif si et seulement si q l'est, id est :

$$\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0 \textbf{ ou } \forall x \in E \setminus \{0\}, (u(x)|x) > 0$$

(resp. $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0$ ou $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0$)
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définie positive)

Théorème de caractérisation

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint (resp. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) : u est positif (resp. défini positif) si et seulement si $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$)
2. A est positive (resp. définie positive) si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$)

Preuve : si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$), soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé, ${}^tXAX = \lambda {}^tXX \geq 0$ (resp. > 0), donc $\langle \geq 0$ (resp. $\lambda > 0$)
Réciproquement si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$), soit $(e_1; ...; e_n)$ une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs

propres de A, $\forall i \in [|1;n|], Ae_i = \lambda_i e_i$
Soit $X \in \mathbb{R}^n$, avec $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a :

$$AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$$

${}^tXAX = (AX|X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i \geq 0$ (resp. > 0 si $X \neq 0$)

Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

> Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) / B^2 = A$. On note $B = \sqrt{A}$

Preuve :

Existence d'après le théorème spectral, $\exists(\lambda_1; ...\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, \exists P \in O_n(\mathbb{R})$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP$$

Posons $B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
$Sp(B) = \{\sqrt{\lambda_1}; ...; \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+$, donc $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B^2 = A$

Unicité soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A, $u \in S(E)$ et $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$. D'après ce qui précède, $\exists v \in S^+(E)$ (auto-adjoint positif) tel que $v^2 = u$ (si $(e_1; ...e_n)$ est une b.o.n de vecteurs propres de u et $\forall i \in [|1;n|], u(e_i) = \lambda_i e_i$, alors $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$)
Soit $x \in \mathcal{S}^+(E) / w^2 = u = v^2$. Notons $\mu_1; ...; \mu_p$, les valeurs propres distinctes positives ou nulles de w. Les valeurs propres de u sont $\mu_1^2; ...; \mu_p^2$ distinctes car $\mu_i \geq 0$
Soit $i \in [|1;p|]$ et $x \in E, w(x) = \mu_i x \Rightarrow u(x) = w^2(x) = \mu_i^2 x$, donc

$$Ker(u - \mu_i id) \subset Ker(u - \mu_i^2 id)$$

w est auto-adjoint donc diagonalisable et

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} Ker(w - \mu_i id) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} Ker(w - \mu_i^2 id)$$

somme directe car les (μ_i^2) sont deux à deux distincts. Nécessairement :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} Ker(w - \mu_i^2 id)$$

$\forall i \in [|1;p|], Ker(w-\mu_i id) = Ker(w+\mu_i id)$, w et u ont donc les mêmes sous-espaces propres :

$$\forall \lambda \in Sp(u) : Ker(u-\lambda id) = Ker(w-\sqrt{\lambda} id)$$

Ceci vaut aussi pour v :

$$Ker(v-\lambda id) = Ker(w-\sqrt{\lambda} id) = Ker(u-\lambda id)$$

v et w coïncident sur les sous-espaces propres de u, dont la somme vaut $\mathbb{R}^n$
Finalement : $w = v$ $(A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$

12.3.4 Décomposition polaire (HP)

Théorème

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists!(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) / A = SO$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) / A = SO$

Preuve :

1. Si S et O existent : $A = SO$, ${}^tA = {}^tO{}^tS = O^{-1}S$, donc $A{}^tA = SOO^{-1}S = S^2$
   Or ${}^t(A{}^tA) = A{}^tA$, donc $A{}^tA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

   $${}^tXA{}^tAX = {}^t({}^tAX){}^tAX = \|{}^tAX\|^2 > 0$$

   car ${}^tA \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, donc ${}^tAX \neq 0$. Ainsi $A{}^tA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et nécessairement :

   $$S = \sqrt{{}^tAA} \text{ et } O = S^{-1}A$$

   ce qui montre l'unicité. Réciproquement, définissons ainsi S et O, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A = SO$

   $$O{}^t0 = S^{-1}A{}^tA{}^tS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n \Rightarrow O \in O_n(\mathbb{R})$$

   On a l'analogue de la forme exponentielle pour les nombres complexes
2. Soit pour $p \in \mathbb{N}^*, A_p = A - \frac{1}{p}I_n \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Comme $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ est fini, $\exists p_0 \in \mathbb{N}^* / \forall p \geq p_0, A_p \in GL_n(\mathbb{R})$. On peut décomposer A_p d'après le 1. :

   $$\exists!(S_p; O_p) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) / A_p = S_pO_p$$

   Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on extrait : $O_{\sigma(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} O \in O_n(\mathbb{R})$
   Or $\forall p \geq p_0, S_{\sigma(p)} = A_{\sigma(p)}O_{\sigma(p)}^{-1}$, la passage à l'inverse étant continu (utiliser la formule de la comatrice ou les opérations élémentaires du pivot de Gauss-Jordan),

   $$\lim_{p\to+\infty} S_{\sigma(p)} = AO^{-1}$$

   $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc fermé : $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

   $$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall p \geq p_0, {}^tXS_{\sigma(p)}X \geq 0$$

   X étant fixé, quand $p \to +\infty, {}^tXSX \geq 0$ et $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et $A = SO$

Remarque

Si $A \notin GL_n(\mathbb{R})$, on a unicité pour $S = \sqrt{^tAA}$, mais pas pour O (cf $O_n = 0 \times I_n = 0 \times \times(-I_n)$)

12.3.5 Réduction des endomorphismes antisymétriques (HP)

Définition

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si et seulement si

$$\forall (x; y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$$

Lien avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ une b.o.n de E, $A = mat_{\mathcal{B}}(u)$

$$\forall (i, j) \in [|1; n|]^2, a_{i,j} = (u(e_i)|e_j) = -(e_i|u(e_j)) = -(u(e_j)|e_i) = -a_{i,j}$$

d'où $^tA = -A$, et réciproquement

Spectre

Soit $\lambda \in Sp(u), x \in E \setminus \{0\}/u(x) = \lambda x$, $(u(x)|x) = -(x|u(x)) = 0 = \lambda\|x\|_2^2$, d'où

$$Sp(u) \subset \{0\}$$

En dimension impaire $\chi_u(X) \sim_{\pm\infty} X^n$, donc χ_u admet au moins une racine réelle en dimension impaire, par suite dans ce cas on a : $Sp(u) = \{0\}$

Réduction des endomorphismes antisymétriques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme antisymétrique, alors il existe $\mathcal{B}$ b.o.n de E telle que :

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -a_k & & & \\ & & & a_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve : Par récurrence sur la dimension de E
$\dim E = 1$, alors $u = 0$, oui
Supposons que le résultat est vrai si $\dim E \leq n$. Soit E un espace euclidien tel que $\dim E = n+1$.
On sait que u admet au moins un sous-espace propre F de dimension 1 ou 2 stable par u
$\dim F = 1 \Rightarrow u_{|F} = 0$
$\dim F = 2$, alors dans une b.o.n $\mathcal{B}_F$ adaptée de F, $mat(u_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_r \\ a_r & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$

Lemme $F^{\perp}$ est stable par u. Soit $x \in F^{\perp}, \forall y \in F, (x|y) = 0, (u(x)|y) = -(x|u(y)) = 0$, d'où le lemme
En appliquant l'hypothèse de récurrence et en recollant les bases, on a le résultat souhaité

Exponentielle

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, la transposition étant linéaire et continue : ${}^t(e^A)e^A = I_n$. Alors

$$ {}^te^A = {}^t(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{({}^tA)^n}{n!} = e^{-A} $$

$\det({}^te^A) = e^{tr(A)} = 1$, car $tr(A) = 0$

$$ \exp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset SO_n(\mathbb{R}) $$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = aR_{\frac{\pi}{2}}$, donc $A^{2p} = (-1)^p a^{2p} I_2$ et $A^{2p+1} = (-1)^p a^{2p+1} R_{\frac{\pi}{2}}$

$$ \exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \cos a I_2 + \sin a R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} $$

Soit $A \in SO_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists(\theta_1; ...; \theta_k) \in \mathbb{R}^k$, tel que

$$ A = P \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} $$

On pose : $M = P \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & -a_k & & \\ & & & a_k & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

alors ${}^tM = P \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & -a_k & & \\ & & & a_k & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tP = -M$, donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$$\exp M = P \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -a_k & & & \\ & & & a_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

$$\exp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$$

12.3.6 Matrices de Gram et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (HP)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, notons $(e_1; ...; e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$a_{i,j} = (Ae_j|e_i) = {}^tAe_j = {}^te_i\sqrt{A}\sqrt{A}e_j = {}^t(\sqrt{A}e_i)\sqrt{A}e_j = (\sqrt{A}e_i|\sqrt{A}e_j)$$

Ainsi $A = \mathcal{G}ram(\sqrt{A}e_1; ...; \sqrt{A}e_n)$ et d'après l'inégalité de Hadamard

$$0 \leq \det A \leq \prod_{i=1}^{n} \|\sqrt{A}\|^2 = \prod_{i=1}^{n} (\sqrt{A}e_i|\sqrt{A}e_i) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

$$\begin{aligned} \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{A}e_1; ....; \sqrt{A}e_n) \textbf{ est orthogonale} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \neq j, (\sqrt{A}e_i|\sqrt{A}e_j) = a_{i,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \textbf{ est diagonale} \end{aligned}$$

Réciproquement si $(x_1; ...x_p) \in E^p, \mathcal{G}ram(x_1; ...; x_p = ((x_i|x_j))_{i,j} \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$

$${}^tY\mathcal{G}ram(x_1; ...; x_p)Y = \sum_{(i,j)\in[|1;p|]^2} y_iy_j(x_i|x_j) = \|\sum_{i=1}^{p} y_ix_i\|^2 \geq 0$$

donc $\mathcal{G}ram(x_1; ...x_p) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$. Si de plus $(x_1; ...x_p)$ est libre, $\mathcal{G}ram(x_1; ...; x_p) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$

12.3.7 Théorème d'intercalation des valeurs propres (HP)

Classement des valeurs propres

Soi $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on lui associe la forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto q(X) = {}^tXAX = \sum_{(i,j)\in[|1;p|]^2} y_iy_jx_ix_j$$

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on définit $\varphi(F) = \max\limits_{X \in F/\|X\|=1} {}^tXAX$ définie car q est continue sur $S(0;1)$ compacte. Notons $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$, les valeurs propres de A avec multiplicité

$$\forall k \in [|1;n|], \lambda_k = \min_{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n / \dim F = k} \varphi(F)$$

Preuve : Soit $(e_1;...;e_n)$ une b.o.n de vecteurs propres de A, avec $\forall i \in [|1;n|], Ae_i = \lambda_i e_i$. Si $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, q(X) = {}^tXAX = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$. Soit F un sous-espace vectoriel de dim $= k$ de $\mathbb{R}^n$, $\dim Vect[e_k;...;e_n] = n-k+1$, donc $F \cap Vect[e_k;...e_n] \neq \{0\}$ (sinon la somme serait de dimension n+1). Soit x unitaire dans $F \cap Vect[e_k;...e_n]$, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \Rightarrow q(X) \geq \lambda_k \sum\limits_{i=k}^{n} x_i^2 = \lambda_k$ et $\varphi(F) \geq \lambda_k$. De plus, soit $F_k = Vect[e_1;...;e_k]$ de dimension k, $\forall X = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i \in F_k$, avec $\|X\|_2 = 1$

$$q(X) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k$$

d'où $\varphi(F_k) = \lambda_k$, de plus $q(e_k) = \lambda_k$, CQFD

Remarque

$k = 1, \lambda_1 = \min\limits_{\|X\|_2=1} q(X)$
$k = n, \lambda_n = \min_{\|X\|_2=1} q(X) = \varphi(\mathbb{R}^n)$

Théorème

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ valeurs propres avec multiplicité. Soit $A' = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R}), \mu_1 \leq ... \leq \mu_{n-1}$ ses valeurs propres. On a

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1} \leq ... \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$

On dit que les valeurs propres de A' sont intercalées entre les valeurs propres de A. Notons $\pi(X') = X$, bijective de $\mathbb{R}^{n-1} \to G$

Preuve : soit $(e_1;...e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $G = Vect[e_i]_{i \in [|1;n|] \setminus \{i_0\}}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i_0-1} \\ 0 \\ x_{i_0+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in G$, il vient

$$ {}^tXAX = \sum_{(i,j) \in ([|1;p|] \setminus \{i_0\})^2} y_i y_j x_i x_j = {}^tX'A'X'$$

où $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i_0-1} \\ x_{i_0+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit $k \in [|1; n-1|]$, montrons que $\lambda_k \leq \mu_k$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $F' = \pi(F)$ sous-espace vectoriel de dimension k de G donc de $\mathbb{R}^n$. D'après ce qui précède, $\max\limits_{X \in F, \|X\|_2=1} {}^tX'A'X' = \max\limits_{X \in F, \|X\|_2=1} {}^tXAX \leq \lambda_k$. Ceci valant pour tout les sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^{n-1}, \mu_k \geq \lambda_k$
Montrons maintenant que $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k+1 de $\mathbb{R}^n$
si $F \subset G, \varphi(F) \geq \mu_{k+1} \geq \mu_k$
sinon, G est un hyperplan de $\mathbb{R}^n, F + G = \mathbb{R}^n$, d'après la formule de Grassmann, $n = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$, $\dim F \cap G = k$ et $\varphi(F) \geq \varphi(F \cap G) \geq \mu_k$. Ceci valant pour tout espace de dimension $k+1$ de $\mathbb{R}^n, \lambda_{k+1} \geq \mu_k$

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$, donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$, $\mu_1 = 2$
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\psi = X^2 - 2X - 1 = (X - (1+\sqrt{2}))(X - (1-\sqrt{2}))$, donc $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$ avec $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 2$

Chapitre 13

Calcul différentiel

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie et U un ouvert de E

Sommaire

13.1 Différentiabilité

13.1.1 Définitions, exemples

Définition

Soit $a \in U$, on dit que f est différentiable en a si et seulement si

$$\exists l \in \mathcal{L}(E,F)/f(a+h) = f(a) + l(h) + o(h)$$

Dans ce cas l'application l est unique, on l'appelle différentielle de f au point a et on la note $l = df_a$. On a :

$$f(a+h) = f(a) + df_a + o(h)$$

Preuve : si $l_1, l_2 \in \mathcal{L}(E,F)^2$ vérifient :
$f(a+h) = f(a) + l_1(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$
$f(a+h) = f(a) + l_2(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$
On a $(l_1 - l_2)(h) = \|h\|(\varepsilon_2 - \varepsilon_1(h)$. Fixons $h \in E$, pout $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit, $a + th \in U$ et $(l_1 - l_2)(h) = \|h\|(\varepsilon_2 - \varepsilon_1(th) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, ceci valant $\forall h \in E, l_1 = l_2$

Remarque

Cette définition ne dépend pas de la norme, car $\dim E < +\infty$

Exemples

1. Si $f \in \mathcal{L}(E,F), \forall (a,h) \in E^2, f(a+h) - f(a) = f(h)$, donc f est différentiable en tout point et $\forall a \in E, df_a = f$
2. Pour les applications affines, $f = g + \alpha/\alpha \in F, g \in \mathcal{L}(E,F), \forall a \in E, df_a = g$
3. Si $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en a si et seulement si $\exists df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R},F)/$

   $$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h) \Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + \lambda h + o(h)$$

   si et seulement si $df_a(h) = f'(a)h$
4. Soit $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ une norme. Si elle était différentiable en , $\exists l \in \mathcal{L}(E,F)/$

   $$\|h\| = \|0\| + l(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

   Fixons $h \in E, \forall t \in \mathbb{R}^*$

   $$\|th\| = |t|\|h\| = tl(h) + |t|\|h\|\varepsilon(ht)$$

   Pour $t > 0, \|h\| = l(h) + \|h\|\varepsilon(th) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} l(h)$
   Pour $t < 0, \|h\| = -l(h) + \|h\|\varepsilon(ht) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -l(h)$
   donc $\|h\| = -\|h\| = l(h)$, non il suffit de prendre $h \neq 0$, on retiendra qu'une norme n'est jamais différentiable à l'origine
5. Soit q une forme quadratique de forme bilinéaire associée φ. Soit $a \in E$

   $$q(a+h) = \varphi(a+h, a+h) = q(a) + q(h) + 2\varphi(a,h)$$

Or pour $h \neq 00, q(h) = \|h\|(\|h\|q(\frac{h}{\|h\|})) = \|h\|\varepsilon(h)$, q est continue (polynôme en les coordonnées), donc bornée sur $S(0;1)$ et si $M = \sup\limits_{\|x\|=1} |q(x)|, |\varepsilon(h)| \leq M\|h\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi $q(a+h) = q(a) + 2\varphi(a,h) + o(h)$, q est différentiable en a et $df_a : h \to 2\varphi(a,h)$. En particulier $\|.\|^2$ est différentiable en tout point et $d_{\|.\|^2} = 2(a|h)$

Remarque

La différentiabilité en un point équivaut à l'existence d'un dl_1 en ce point :

$$f(a+h) - f(a) = df_a(h) + o(h)$$

C'est la meilleure approximation linéaire de $f(a+h) - f(a)$ quand $h \to 0$. Dans le cas d'un graphe, $\begin{array}{cccc} f & : & \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \mapsto & f(x;y) \end{array}$
On définit le graphe de $f : \Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y)\}$

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + l(h,k) + o(h,k) = f(a,b) + h\alpha + h\beta + o(h,k)$$

13.1.2 Dérivée directionnelle

Définition

Soit U ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$ et $h \in E$ fixé. On dit que f admet une dérivée selon la direction (ou selon le vecteur) h au point a si et seulement si l'application $\begin{array}{ccc}]-\alpha;\alpha[& \to & F \\ t & \mapsto & \varphi(t) = f(a+th) \end{array}$ est dérivable en 0, on note alors $\varphi'(0) = D_h f(a)$

$$D_h f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

dérivée selon la direction h de f au point a. On se rapproche de a selon la direction h, $D_h f(a)$ est la pente de f en a dans la direction de h

Théorème

Si f est différentiable en a, alors $\forall h \in E$, f admet une dérivée selon la direction h en a et $D_h f(a) = df_a(h)$

Preuve : fixons $h \in E$, si f est différentiable en a,

$$f(a+th) = f(a) + tdf_a(t) + o(th)$$

d'où $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = df_a(h)$ ⚠La réciproque est fausse ! On peut avoir existence de $D_h f(a), \forall h \in E$, sans que f soit différentiable en a ! ! !
$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \mapsto & \frac{x^2}{y} \textbf{ si } y \neq 0 \\ & & (x;0) & \mapsto & 0 \end{array}$ Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ et $t \neq 0, f(th,tk) = \frac{th^2}{k} = \varphi(t)$ si $k \neq 0$, φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = D_{h,k} f(0;0) = \frac{h^2}{k}$; $f(th,0) = 0$ si $h = 0$, ici $D_{(h,0)} f(0;0) = 0$
f admet une dérivée directionnelle dans toutes les directions, mais $\forall x \neq 0, f(x,x^3) = \frac{1}{x}$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ quand $x \to 0$, f n'est pas continue en 0, donc pas différentiable

13.1.3 Dérivées partielles

Définition

Soit $f : U \subset E \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ une base de E (base canonique lorsque $E = \mathbb{R}^n$). On dit que f admet une dérivée partielle selon la i-ième variable (où $i \in [|1; n|]$) au point a si et seulement si elles y admet une dérivée selon le vecteur e_i, on la note alors

$$D_i f(a) = D_{e_i} f(a)$$

Cas de $\mathbb{R}^n$

Dans le cas particulier (fort fréquent) où $E = \mathbb{R}^n$, f admet une dérivée partielle en $a = (a_1; ...; a_n)$ selon la i-ième variable si et seulement si : $\begin{array}{cccc} \varphi & : &]-\alpha;\alpha[& \to & F \\ & & t & \mapsto & f(a+te_i) = f(a_1; ...; a_i + te_i; ...; a_n) \end{array}$ est dérivable en 0 (et $\varphi'(0) = D_i f(a)$) si et seulement si la i-ième application partielle de f en a $\begin{array}{cccc} f_{a_i} & : &]a_i-\alpha;a_i+\alpha[& \to & F \\ & & x_i & \mapsto & f(a_1; ...; x_i; ...; a_n) \end{array}$ est dérivable en a_i, alors

$$D_i f(a) = f'_{a_i}(a)$$

Notation des variables

Si on nomme les variables $(x_1; ...; x_n)$ (i.e qu'on note $\begin{array}{cccc} f & : & U & \to & F \\ & & (x_1; ...; x_n) & \mapsto & f(x_1; ...; x_n) \end{array}$. On notera $D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, dérivée partielle selon la i-ème variable en a

Théorème

Si f est différentiable en a, elle admet des dérivées partielles selon toutes les variables en a et $\forall i \in [|1; n|]$

$$D_i f(a) = df_a(e_i)$$

Par ailleurs $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) h_i$$

Preuve : cela découle du 13.1.2.2 et de la linéarité de df_a

Notation différentielle

Si les variables sont notées $(x_1;...;x_n)$, (pour $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$).
On définit $\forall i \in [|1;n|]$, $dx_i \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & F \\ (x_1;...;x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$ forme linéaire. Le théorème précédant s'écrit, $\forall h = (h_1;...;h_n) \in \mathbb{R}^n$

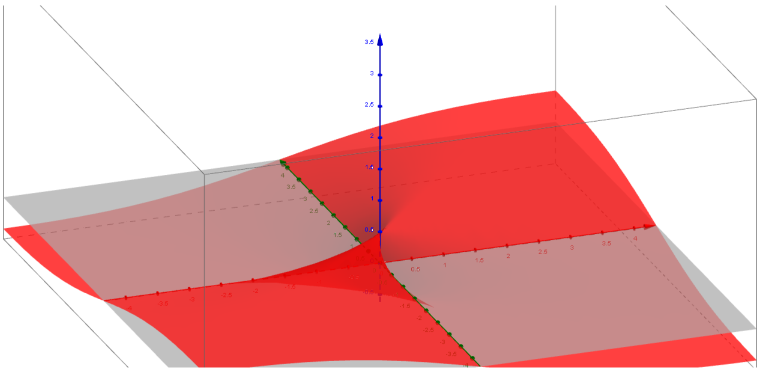
$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$$

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i$$

C'est la linéarité de la différentielle

⚠La réciproque est fausse : l'existence d'une dérivée partielle en un point n'implique pas celle des autres dérivées directionnelles, ni a fortiori la différentiabilité en a!!!

$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x;y) \neq (0;0) \\ (0;0) & \mapsto & 0 \end{array}$ Ici $f_{1,(0,0)} : x \mapsto f(x,0) = 0$ et $f_{2,(0;0)} : y \mapsto$



$f(0,y) = 0$, donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)$$

En revanche selon la direction $(1,1)$, $\forall t \neq 0, f(t,t) = \frac{1}{2}$ et $f(0,0) = 0$, ainsi $t \mapsto \varphi(t) = f((0;0) + t(1;1))$ n'est pas continue en 0, donc n'y est pas dérivable

13.1.4 Propriétés élémentaires

Théorème

Si f est différentiable en a, elle y est continue

Preuve : $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a)$

Exemples

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ & & (x;y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x;y) \neq (0;0) \\ & & (0;0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

$\forall x \neq f(x,x) = \frac{1}{2}$ qui ne tend par vers $f(0;0;) = 0$ quand $x \to 0$, f n'est pas continue en 0 donc n'y est pas différentiable

Théorème

> Soit $f, y : U \subset E \to F$, différentiable en a
>
> 1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f + g$ est différentiable en a et
>
> $$d(\lambda f + g)_a = \lambda df_a + dg_a$$
>
> 2. Si de plus $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, fg est différentiable en a et
>
> $$d(fg)_a = df_a g(a) + f(a) dg_a$$
>
> (vrai aussi si D est une algèbre normée de dimension finie)

Preuve :

1. $\forall h \in E / a + h \in U$

$$(\lambda f + g)(a+h) = (\lambda f + g)(a) + (\lambda df_a + dg_a)(h) + o(h)$$

2. $fg(a+h) = fg(a) + (f(a)dg_a + g(a)df_a)(h) + o(h)$

13.1.5 Composition des différentielles

Théorème

> Soit E,F,G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, U ouvert de E, V ouvert de F. $f : U \to V$ et $g : V \to G$. Soit $a \in U$, on suppose que f est différentiable en a et que g l'est en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et
>
> $$d(g \circ f) = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Preuve : écrire les développements limités à l'ordre 1 avec les différentielles

Exemples

1. Cas où $E = \mathbb{R}$. Ici $\begin{array}{cccc} \gamma & : & I \subset \mathbb{R} & \to & V \\ & & t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$

   γ est différentiable en a $\Leftrightarrow$ γ est dérivable en a, et

$$\forall h \in \mathbb{R}, d\gamma_a(h) = h\gamma'(ta)$$

$\forall h \in \mathbb{R}, g \circ \gamma : I \subset \mathbb{R} \to F$

$$d(g \circ \gamma)_a(h) = dg_{\gamma(a)}(d\gamma_a(h)) = hd_{g_{\gamma(a)}}(\gamma'(a))$$

$g \circ \gamma$ est donc dérivable en a et

$$(g \circ \gamma)'(a) = d_{g_{\gamma(a)}}(\gamma'(a))$$

Dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}^n$ et où les variables sont notées $(x_1; ...; x_n)$. On note $\begin{array}{cccc} \gamma & : & I & \to & V \\ & & t & \mapsto & \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \vdots & x_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$. Il vient

$$(g \circ \gamma)'(a) = dg_{\gamma(a)}(x_1'(a); ...; x_n'(a)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\gamma(a))x_i'(a)$$

En notations différentielles, on identifie "physiquement" g et $g^* = g \circ \gamma$. On écrit :

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

$$(g^*)'(t) = \frac{dg}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

2. $\begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & x^2 - 3y^2 z \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) = 2t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$$(g \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(t))\frac{dy}{dt} = 8t - 12t^3$$

3. Cas où $F = \mathbb{R}$, ici $f : U \subset E \to I \subset \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$

$$d(g \circ f)_a(h) = dg_{f(a)}(df_a(h)) = hdf_a(h)g'(f(a))$$

   On retiendra $d(g \circ f)_a = g'(f(a))df_a$

4. $d(\arctan f)_a = \frac{df_a}{1+f(a)^2}$

5. $d(\sqrt{f})_a = \frac{df_a}{2\sqrt{f(a)}}$

6. Si $f = \|.\|^2, df_a(h) = 2(a|h)$. En tout point, $a \neq 0$, $\|.\|_2 = \sqrt{\|.\|_2}$ est différentiable (car $\sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et

$$d(\|.\|_2)_a(h) = (\frac{a}{\|a\|_2}|h)$$

Changement de variables

Cas où $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^p$, on note les variables dans E $(x_1; ...; x_n)$ et dans F $(y_1; ...; y_p)$

$$\begin{array}{cccc} f & : & U \subset E & \to & F \\ & & (x_1; ...; x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(x_1; ...; x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1; ...; x_n) \end{pmatrix} \text{ noté } \begin{pmatrix} y_1(x_1; ...; x_n) \\ \vdots \\ y_p(x_1; ...; x_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} g & : & V & \to & G \\ & & (y_1; ...; y_p) & \mapsto & g(y_1; ...; y_p) \end{array}$$ Il vient $\forall (h_1; ...; h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_a(h_1; ...; h_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} h_i \\ &= dg_{f(a)}(df_a(h_1; ...; h_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f y_i}{\partial x_i}(a) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \times \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) h_i \end{aligned}$$

Ceci valant $\forall (h_1; ...; h_n) \in \mathbb{R}^n$, en identifiant

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \times \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \times \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(a)$$

On notera $g^* = g \circ f$ (mêmes fonctions physiques) et on écrit

$$\frac{\partial g^*}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(a)$$

On retiendra symboliquement

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Passage des coordonnées polaires aux cartésiennes

Soit $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (r, \theta) & \mapsto & (r \cos\theta, r \sin\theta) = (x(r, \theta), y(r, \sin\theta)) \end{array}$ différentiable en tout point

$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta$

$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin\theta dr + r \cos\theta d\theta$

Soit $\begin{array}{ccccc} g & : & V \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & g(x, y) \end{array}$, $g^*(r, \theta) = g(r \cos\theta, r \sin\theta)$

Si g est différentiable en $(x_0, y_0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$ alors g^* l'est en (r_0, θ_0) et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^*}{\partial r}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial r}(r_0,\theta_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial r}(r_0,\theta_0) \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\theta_0 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\theta_0 \\
\frac{\partial g^*}{\partial \theta}(r_0,\theta_0) &= -r_0\sin\theta_0\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) + r_0\cos\theta_0\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

On retiendra

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}}$$

Ce qui se déduit de l'expression de la différentielle de g^*. En un point $r \neq 0$, on peut inverser le système :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

13.1.6 Gradient

Définition

Soit E un espca euclidien, U ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$, différentiable en $a \in U, df_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, d'après le théorème de représentation des formes linéaires :

$$\exists! x \in E / \forall h \in E, df_a(h) = (x|h)$$

On note :

$$(\mathrm{grad} f)(a) = x$$

Par définition $(\mathrm{grad} f)(a)$ est l'unique vecteur de E tel que $\forall h \in E$

$$df_a(h) = ((\mathrm{grad} f)(a)|h)$$

Si $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ est une b.o.n de E, on a $\forall i \in [|1;n|]$

$$((\mathrm{grad} f)(a)|e_i) = df_a(e_i) = D_{e_i} f(a)$$

En particulier si $E = \mathbb{R}^n$ euclidien, $\mathcal{B}_c$ base canonique et si les variables sont notés $(x_1; ...; x_n)$, on aura

$$(\mathrm{grad} f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Gradient en polaires

Soit $E=\mathbb{R}^2$ alors $g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) \end{array}$ et $g^* \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & g(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$.
On a

$$\text{grad}g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \frac{\partial g^*}{\partial r}(r,\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\frac{\partial g^*}{\partial \theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Composée avec un arc paramétré

Soit $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable en $a_0 = \gamma(t_0)$, $\gamma \; : \; \begin{array}{ccc} I & \to & U \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$ dérivable en t_0.
On a

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = df_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = ((\text{grad}f)(\gamma(t_0))|\gamma'(t_0))$$

13.2 Classe $\mathcal{C}^1$

13.2.1 Définition

Définition

Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$, on dit que f est différentiable sur U si et seulement si elle l'est en tout point de U. On définit alors $df \; : \; \begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df_a \end{array}$
On dit que f est $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si df est définie et continue sur U (i.e $\forall a \in U, \lim\limits_{x\to a} |||df_x - df_a||| = 0$ où $|||.|||$ est une norme subordonnées à des normes quelconque de E et F (dimension finie)

Théorème

1. Toute application linéaire ou affine est $\mathcal{C}^1$
2. $\forall i \in [|1;n|]$, $e_i^* \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1;...;x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$ est $\mathbb{C}^1$
3. Théorème généraux de la classe : toute combinaison linaire, produit, composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ l'est encore

Preuve :

1. Si f est linéaire, $\forall a \in E, df_a = f$ donc df est constante (de même si elle est affine)
2. e_i^* est linéaire
3. découle des propriétés des différentielles et que si f est différentiable en a, elle y est continue

Exemples

1. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & \frac{e^{x^3-3\ln(x^2y^2+2)}\cos\frac{xz}{\sqrt{z^4+3}}}{x^8+y^8+49e^{3z+4y}} \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ d'après les théorèmes généraux de la classe

2. $\begin{array}{ccccc} f & : & GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$, car $M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^tCom(M)$, les coefficients de M^{-1} sont donc des fractions rationnelles en ceux de M. Pour calculer df_M, on peut :

   (a) former $f(M+H) - f(M) = (M+H)^{-1} - M^{-1}$ définie pour $\|H\|$ suffisamment petit $(I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} - M^{-1}$, soit $|||.|||$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que si $|||H||| \leq \frac{1}{2|||M^{-1}|||}$ alors $|||M^{-1}H||| \leq |||M^{-1}||| \times |||H||| < \frac{1}{2}$ et (algèbre normée de dimension finie)

$$\begin{aligned} (I_n + M^{-1}H)^{-1} &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k \\ &= I_n + M^{-1}H + \sum_{k=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k \\ |||(I_n + M^{-1}H)^{-1}||| &= |||I_n + M^{-1}H||| + 2|||H|||^2|||M^{-1}|||^2 \end{aligned}$$

   Ainsi $f(M+H) - f(M) = -M^{-1}HM^{-1} + o(|||H|||)$ avec $df_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$

   (b) Sachant que f est différentiable car de classe $\mathbb{C}^1$, soit $\begin{array}{ccccc} \varphi & : &]-\alpha;\alpha[& \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & t & \mapsto & f(M+tH) \end{array}$
   On sait que $df_M(t) = D_Hf(M) = \varphi'(0)$. Il vient

$$\varphi(t) = (M+tH)^{-1} = (I_n + tM^{-1}H)^{-1}M^{-1} = (\sum_{k=0}^{+\infty}(-tM^{-1}H)^k)M^{-1}$$

   $\varphi'(0)$ est le coefficient en t :$-M^{-1}HM^{-1}$

3. Différentielle du déterminant, det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ (car $\det M$ est somme de produits des coefficients de M). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\begin{array}{ccccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \det(M+tH) \end{array}$. On a $d(\det)_M(H) = \varphi(0)$
   Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$: $\varphi(t) = \det M \det(I_n + tM^{-1}H)$ pour $t \neq 0, \varphi(t) = \det M \times t^n \det(\frac{1}{t}I_n + M^{-1}H))$. φ étant polynomiale, $\varphi'(0)$ est le coefficient en t dans $\varphi(t), \det M = tr(M^{-1}H) = tr(({}^tCom(M))H)$. Soit $A|B) = tr({}^tAB)$ produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc si $M \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{grad}(\det)_M = Com(M)$$

   Or $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et grad(det) est continue donc $\forall M\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{grad}(\det)_M = Com(M)$

13.2.2 Théorème de caractérisation

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, U ouvert de E et $f : U \to F$ ($\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie). Soit $\mathcal{B} = (e_1; ...; e_n)$ une base de E.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in U, \forall i \in [|1;n|], D_{e_i}f(a) \text{ existe} \\ \begin{array}{cccc} D_{e_i}f & : & U & \to & F \\ & & a & \mapsto & D_{e_i}f(a) \end{array} \text{ est continue} \end{cases}$$

On retiendra : f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les dérivées partielles sont définies et continues sur U

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) $\forall a \in U, \forall i \in [|1;n|], D_{e_i}f(a)$ existe et vaut $df_a(e_i)$ et

$$\|D_{e_i}f(a) - D_{e_i}f(b)\| = \|df_a(e_i) - df_b(e_i)\| \leq \|df_a - df_b\| \times \|e_i\|$$

donc $a \mapsto D_{e_i}f(a)$ est continue

(2) $\Rightarrow$ (1) : pour $n = 2$, soit $(a,b) \in U$. Si f est différentiable en (a,b) nécessairement $df_{(a,b)}(h,k) = D_{e_1}f(a,b)h + D_{e_2}f(a,b)k$

Formons donc $\varphi(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - D_{e_1}f(a,b)h - D_{e_2}f(a,b)k$. On veut montrer que : $\varphi(h,k) = o(\|(h,k)\|)$

On a $f(a+h,b+k) - f(a,b) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - f(a+h,b) + f(a+h,b)$, h et k étant fixés, soit $\begin{array}{ccc} \psi_1 : [0;1] & \to & F \\ t & \mapsto & f(a+th,b) \end{array}$ $\mathcal{C}^1$ car $D_{e_1}f$ existe et est continue

$$f(a+h,b) - f(a,b) = \psi_1(1) - \psi_1(0) = \int_0^1 \psi_1'(t)dt = \int_0^1 hD_{e_1}f(a+th,b)dt$$

De même, on forme $\begin{array}{cccc} \psi_2 & : & [0;1] & \to F \\ & & t & \mapsto & f(a+h,b+tk) \end{array}$ $\mathcal{C}^1$

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) = \psi_2(1) - \psi_2(0) = \int_0^1 \psi_2'(t)dt = \int_0^1 kDe_{e_2}f(a+h,b+tk)dt$$

d'où

$$\varphi(h,k) = \int_0^1 h(D_{e_1}f(a+th,b) - D_{e_1}f(a,b)) + k(D_{e_2}f(a+h,b+tk) - D_{e_2}f(a,b))dt$$

$D_{e_1}f$ et $D_{e_2}f$ étant continues, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \|h,k\|_\infty \leq \alpha$ alors

$$\|D_{e_i}f(a+h,b+k) - D_{e_i}f(a,b)\| \leq \varepsilon$$

$\forall t \in [0;1], \|D_{e_1}f(a+h,b+k) - D_{e_1}f(a,b)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|D_{e_2}f(a+h,b+k) - D_{e_2}f(a,b)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\|\varphi(h,k)\| \leq \varepsilon\|(h,k)\|_\infty$, CQFD

Ceci établit que f est différentiable en (a,b) et que

$$df_{(a,b)} = hD_{e_1}f(a,b) + kD_{e_2}f(a,b)$$

Cette expression montre que df est continue sur U. On applique un principe analogue pour n quelconque en faisant varier successivement une seule des coordonnées

Remarque

Ce théorème est utile pour montrer qu'une fonction définie spécialement en un point est $\mathcal{C}^1$: on vérifie que les dérivées partielles existent en tout point et qu'elles sont continues (au point considéré)

Exemples

1. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \\ & & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$

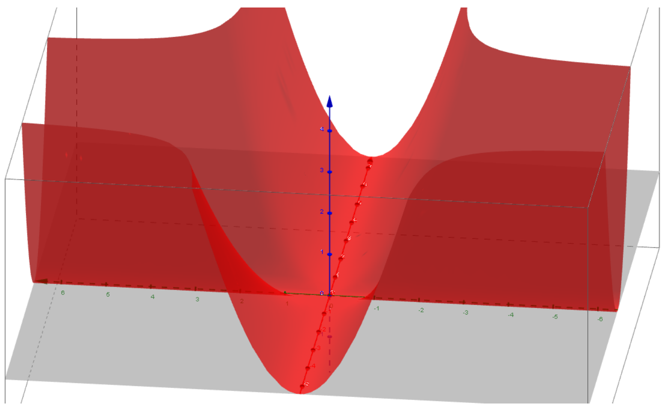
   Pour étudier la continuité en (0,0), on passe en coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Il vient : $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\cos^2\theta\sin^2\theta \leq r^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est $\mathbb{C}^1$ d'après les théorèmes généraux. En $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 2x\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

   x et y jouent des rôles symétriques : $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$
   En $(0,0)$, on a les applications partielles $f(x,0) = f(0,y) = 0$, les dérivées partielles existent et valent 0. Enfin,

$$\forall r > 0, \forall\theta \in \mathbb{R}, |\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)| = 2r|\cos\theta\sin^4\theta| \leq 2r \underset{(x;y)\to(0;0)}{\longrightarrow} 0$$

   De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$



   ⚠L'existence des dérivées partielles ne garantit pas la classe $\mathcal{C}^1$ (une application peut être définie sans être continue) ou la différentiabilité

2. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \\ & & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$, $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 f(x,0) = f(0,y) = 0$, donc

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et valent 0 en $(0,0)$. Cependant $\forall x \neq 0, f(x,x) = \frac{1}{2}$, donc f n'est pas continue en $(0,0)$, donc pas différentiable

13.2.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit U un ouvert convexe de E, $f : U \to F$, $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $(a;b) \in U^2$, on suppose que $\forall t \in [0;1]$,

$$|||df_{a+t(b-a)}||| \leq M(\text{ où } M \in \mathbb{R}_+)$$

alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$

Preuve : formons $\begin{array}{cccc} \varphi & : & [0;1] & \to & F \\ & & t & \mapsto & f(a+t(b-a)) \end{array}$

$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 df_{a+t(b-a)}dt$

$$\begin{aligned} \|f(b)-f(a)\| &= \|\int_0^1 df_{a+t-b-a)}(b-a)dt\| \\ &\leq \int_0^1 \|df_{a+t(b-a)}(b-a)dt\| \\ &\leq \int_0^1 |||df_{a+t(b-a)}||| \times \|b-a\|dt \\ &\leq M\|b-a\| \end{aligned}$$

Corollaire

Soit U un ouvert convexe et $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$

1. f est M-lipschitzienne sur U si et seulement si $\forall x \in U, |||df_x||| \leq M$
2. f est constante sur U si et seulement si $\forall x \in U, df_x = 0$
3. Soit $g : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$, $f - g$ est constante si et seulement si $df = dg$

Preuve :

1. Si $\forall x \in U, \|df_x\| \leq M$, d'après le théorème, f est M-lipschitzienne sur U. Si f est M-lipschitzienne sur U, soit $x \in U, h \in E, \forall t \neq 0, \|\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\| \leq M\|h\|$ quand $t \to 0$, f étant différentiable en x, $\|df_x\| \leq M\|h\| \Rightarrow |||df_x||| \leq M$
2. f est constante si et seulement si elle est 0-lipschitzienne
3. se déduit de 2.

Cas d'un ouvert connexe par arcs

Soit U un ouvert connexe par arcs de E et $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\forall x \in U, df_x = 0$ alors f est constante sur U

Preuve : soit $x \in U$ et $x_0 \in U$. Soit $\gamma : [0;1] \to U$ continu tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$. Soit $t_0 = \sup\{t \in [0;1]/\forall u \in [0;t], f(\gamma(u)) = f(x_0)\}$. Par continuité de γ et f, $f(\gamma(t_0)) = f(x_0)$, U étant ouvert :$\exists \alpha_0 > 0/B(\gamma(t_0), \alpha_0) \subset U$. Par continuité de γ, $\exists \eta > 0/\forall t \in [t_0 - \eta; t_0 + \eta] \cap [0;1], \gamma(t) \in B(\gamma(t_0), x_0)$. Par ailleurs, $B(\gamma(t_0), \alpha_0)$ est un ouvert convexe, df y est nulle, donc f est constante sur $B(\gamma(t_0), \alpha_0)$. Donc $\forall t \in [t_0 - \eta; t_0 + \eta] \cap [0;1], f(\gamma(t)) = f(x_0)$. Nécessairement $t_0 = 1$ et $f(x) = f(x_0)$

Remarque

L'IAF ne se généralise pas à des ouverts connexes par arcs. En effet si γ de classe $\mathcal{C}^1 : [0;1] \to U$ vérifie $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a seulement : $\varphi(t) = f(\gamma(t))$:

$$\|f(b) - f(a)\| = \| \int_0^1 \varphi'(t)dt\| = \| \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt\| \leq M \int_0^1 \|\varphi'(t)\|dt$$

On n'a plus plus forcément $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$. Par exemple : $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)/x \leq 0\}$, $f(x,y) = 2\arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})$ et $f(0,1) = \frac{\pi}{2}$, $f(0,-1) = -\frac{\pi}{2}$

13.2.4 Condition nécessaire d'extremum

Théorème

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Soit $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathring{\mathcal{A}}$. Si f admet un extremum local en $x_0 \in \mathring{\mathcal{A}}$, i.e $\exists \alpha_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in B(x_0, \alpha_0), f(x) \leq f(x_0), \text{ maximum local}$$

$$\forall x \in B(x_0, \alpha_0), f(x) \geq f(x_0), \text{ minimum local}$$

alors $df_{x_0} = 0$. On dit que x_0 est un point critique de f. On retiendra que si f admet un extremum en un point intérieur alors c'est un point critique. Les extremums sont à rechercher parmi les points critiques

Preuve : soit $h \in E$ et $\begin{array}{cccc} \varphi & : &]-\alpha;\alpha[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & f(x_0+th) \end{array}$ définie au voisinage de 0 car $x_0 \in \mathring{\mathcal{A}}$, φ est dérivable en 0 et y admet un extremum donc $\varphi'(0) = df_x(h)$. Ceci valant $\forall h \in E, df_x = 0$

Remarque

Si $(e_1;...;e_n)$ est une base de E, $df_x = 0$ si et seulement si $\forall i \in [|1;n|], D_{e_i}f(x) = 0$. Si $E = \mathbb{R}^n$ et si les variables sont notées $(x_1;...;x_n)$:

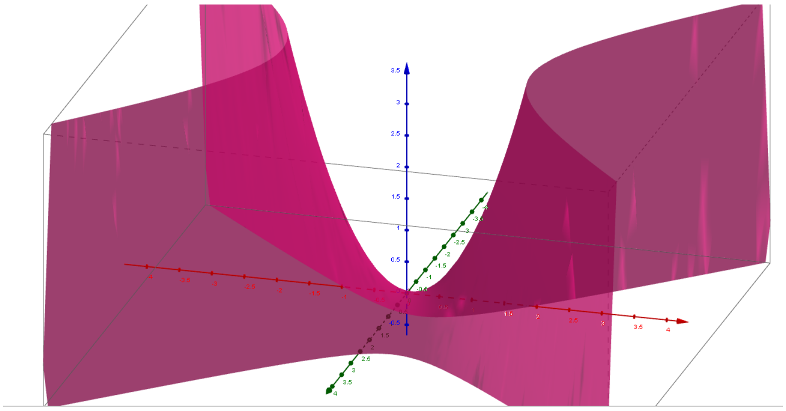
$$df_x = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [|1;n|], \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$$

⚠C'est une condition nécessaire mais pas suffisante

Exemples

1. $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^3 \end{array}$, 0 est un point critique mais pas extremum

2. $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & x^2-y^2 \end{array}$ On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Le seul point critique est $(0,0)$. Ce n'est pas un extremum car $\forall \varepsilon > 0, f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > f(0,0) = 0$ et $f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^2 < f(0,0) = 0$



Remarque

L'existence d'un extremum se prouve généralement par des arguments de compacité (fonction continu sur un compact). Sur un tel domaine, on séparera la recherche des extremums intérieur (parmi les points critiques) et sur la frontière on mènera une étude spécifique

Exemples

1. Soit $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$ compact. $f \; : \; \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-4y^2 \end{array}$ continue sur D donc admet maximum et minimum sur D. f est différentiable sur $\mathring{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\}$. Si f présente un extremum en $(x_0;y_0) \in \mathring{D}$ alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = 2x_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) = -8y_0 = 0$$
donc $(x_0;y_0) = 0$ or $f(\varepsilon, 0) > 0$ et $f(0,\varepsilon) < 0$, pas d'extremum en $(0,0)$. Les extremum sont donc atteint sur la frontière $fr(D) = \{(\cos\theta, \sin\theta)/\theta \in [0;2\pi]\}$. Soit $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - 5\sin^2\theta$. Le maximum est atteint pour $\sin^2\theta = 0$ et vaut 1, le minimum est atteint pour $\sin^2\theta = 1$ et vaut -4
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1} = \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \frac{1}{2}{}^tXAX - {}^tBX = \frac{1}{2}(AX|X) - (B|X) \end{array}$
Soit $\lambda_1 = \sin Sp(A) > 0, \forall X \in \mathbb{R}^n, (AX|X) \geq \lambda_1 \|X\|^2, {}^tBX \leq \|B\|\|X\|$, d'où
$$f(X) \geq \frac{\lambda_1}{2}\|X\| - \|B\|\|X\| \underset{\|X\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
donc f n'admet pas de maximum global, mais elle admet un minimum global (considérer $R \geq 0 / \|X\| \geq R, f(X) \geq f(0) = 0$). Comme $\mathbb{R}^n$ est ouvert, si f présente un minimum en X_0, $df_{X_0} = 0$. Il vient,
$$f(X_0+H) - f(X_0) = \frac{1}{2}{}^t(X_0+H)A(X_0+H) - \frac{1}{2}{}^tX_0AX_0 - (B|X_0+H) + +(B|X_0) = (AX_0|H) - (B|H)$$

d'où $df_{X_0}(H) = (AX_0 - B|H)$

$$(\text{grad} f)(X_0) = AX_0 - B = 0$$

Or $A \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $X_0 = A^{-1}B$. Alors $f(X_0) = -\frac{1}{2}(B|A^{-1}B)$

Cas où $\mathring{\mathcal{A}}$

Soit $\Sigma_n = \{(x_1; ...; x_n) \in \mathbb{R}_+^* / \sum_{k=1}^{n} = 1\}$ (simplexe). C'est l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique Ce sont des fermés bornées en dimension finie : les simplexes sont donc

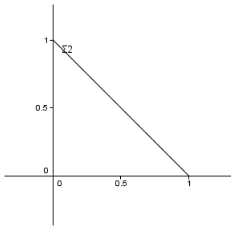


FIGURE 13.1 – Simplexe Σ_2

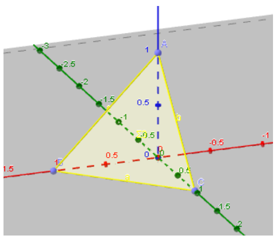


FIGURE 13.2 – Simplexe Σ_3

compact, $\mathring{\Sigma}_n = \emptyset$ car $\Sigma_n \subset H$ hyperplan affine d'équation $x_1 + ...x_n = 1$. Soit f définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^n / \Sigma_n \subset U$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, par continuité, f admet un maximum et un minimum sur Σ_n compact. L'intérieur d'un simplexe étant vide, on ne peut appliquer la condition nécessaire d'extremum !!! Soit $(x_1; ...; x_n) \in \Sigma_n / \forall i \in [|1; n|], x_i \in]0; 1[$. Soit $h = (h_1; ...; h_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\exists \alpha > 0 / |t| \leq \alpha, \forall i \in [|1; n|], x_i + th_i \in [0; 1]$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i + th_i = 1 \Rightarrow (x + th) \in \Sigma_n$

Formons $\begin{array}{cccc} \varphi & : & [-\alpha; \alpha] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & f(x + th) \end{array}$

Si $f_{|\Sigma_n}$ présente un extremum en 0,

$$\varphi'(0) = df_x(h) = 0 = ((\text{graf} f)(x)|h)$$

En particulier pour $i \neq j$ et $h = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \Rightarrow (\mathrm{grad} f)(x) \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1;...;x_n) & \mapsto & \prod_{i=1}^{n} x_i \end{array}$

$\forall x = (x_1;...;x_n) \in \Sigma_n, f(x) \geq 0$ et s'il existe $i \in [|1;n|]/x_i = 0$ alors $f(x) = 0$. Ceci montre que $\min_{\Sigma_n} f = 0$, par ailleurs le maximum est atteint en $x = (x_1;...;x_n) \in \Sigma_n / \forall i \in [|1;n|], x_i \in]0;1[$.
D'après ce qui précède

$$\forall i \neq j, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} x_k = \frac{1}{x_k}\prod_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{x_j}\prod_{k=1}^{n} x_k > 0$$

Ainsi $x_i = x_j$ et $x = \frac{1}{n}(1;...;1)$ et $\max_{\Sigma_n} f = \frac{1}{n^n}$

Notons que si $(y_1;...;y_n) \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{(0;...;0)\}$ soit $S = \sum_{i=1}^{n} y_i > 0$ et $\forall i \in [|1;n|], z_i = \frac{y_i}{S}, (z_1;...;z_n) \in \Sigma_n$, donc

$$\prod_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{S}\prod_{i=1}^{n} y_i \leq \frac{1}{n^n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

avec égalité si et seulement si $y_1 = ... = y_n$

13.2.5 Matrice jacobienne

Définition

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, U ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\begin{array}{cccc} f & : & U & \mapsto & \mathbb{R}^n \\ & & (x_1;...;x_p) & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1(x_1;...;x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1;...;x_n) \end{pmatrix} \end{array}$ On appelle matrice (jacobienne) de f en a la matrice de df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ on la note $Jf_a \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in [|1;n|] \times [|1;p|]$ le coefficient d'indice (i,j) de Jf_a et la i-ème coordonnée dans le base canonique de $\mathbb{R}^n$ de $df_a(e_i) = D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$. Ainsi

$$Jf_a = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{(i,j)\in[|1;n|]\times[|1;p|]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Symboliquement, on écrit $\forall i \in [|1;n|]$

$$df_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

On retiendra :

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} = Jf \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Jacobien

Lorsque $n = p$, on définit le jacobien de f en a : $\det Jf(a)$

Exemple

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta; r\sin\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) \end{array}$ On écrit

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$Jf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, de jacobien r

Remarques

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si $\begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{M}_{n,p} \\ a & \mapsto & Jf_a \end{array}$ est définie, continue sur U
2. Si $n = 1$, dans $\mathbb{R}^p$ euclidien, la jacobienne est le gradient ($\in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$)

Théorème

Si $f : U \subset \mathbb{R}^p \to V \subset \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^m$ avec f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. On a,

$$J(g \circ f)_a = Jg_{f(a)} \times Jf_a$$

Preuve : $d(g \circ f) = dg_{f(a)} \circ df_a$

13.2.6 Dérivation au sens complexe (HP)

Définition

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ (identifié à $\mathbb{C}$) et $\begin{array}{ccccc} f & : & U & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{array}$ On lui associe $\begin{array}{ccccc} \tilde{f} & : & U & \to & \mathbb{C} \\ & & z = x+iy & \mapsto & \tilde{f} = f_1(x,y) + i f_2(x,y) \end{array}$ On cherche une condition sur f pour que $\tilde{f}$ soit dérivable au sens complexe en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U, \exists \tilde{f}(z_0) \in \mathbb{C}/$

$$\begin{cases} \tilde{f}(z_0+h) = \tilde{f}(z_0) + h\tilde{f}(z_0) + o(h) \\ \lim\limits_{h\to 0, h\in\mathbb{C}} \frac{\tilde{f}(z_0+h)-\tilde{f}(z_0)}{h} = \tilde{f}'(z_0) \end{cases}$$

Pour $h = h_1 + ih_2$, ceci équivaut à :

$$f_1(x_0+h_1, y_0+h_2) + if_2(x_0+h_1, y_1+h_2) = f_1(x_0,y_0) + if_2(x_0,y_0) + (h_1ih_2)\tilde{f}(z_0) + o((h_1,h_2))$$

si et seulement si : $\begin{cases} f \text{ est différentiable en } (x_0,y_0) \\ Jf_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{cases}$

La différentielle de f en (x_0,y_0) est la similitude directe de rapport $a+ib = \tilde{f}(z_0)$. Ce qui équivaut aux équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Fonctions harmoniques

On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est harmonique si et seulement si $\forall (x,y) \in U$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Δ est l'opérateur Laplacien. On suppose $\overline{U}$ bornée, et f est continue sur $\overline{U}$. On va montrer le principe du maximum, c'est à dire que es extremums d'une fonction harmonique sont atteint sur le frontière de U. On pose $(x_0,y_0) \in \overline{U}/\max\limits_{\overline{U}} f = f(x_0,y_0)$. On suppose que $(x_0,y_0) \in U$. Soit $r > 0/B((x_0,y_0),r) \subset U$. Pour $n \geq 1$, on définit $f_n(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{n}f(x^2,y^2)$.

$$\Delta f_n(x,y) = \frac{4}{n} > 0$$

En utilisant l'égalité de la moyenne (cf infra) on peut montrer le principe du maximum, on en déduit :

$$\begin{cases} \Delta(f-g) = 0 \\ f-g = 0 sur fr(U) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{\overline{U}} = -\max\limits_{\overline{U}}(g-f) = 0 \\ f-g = 0 \text{ sur } fr(U) \end{cases} \Rightarrow f = g$$

Laplacien en polaire

Soit $f \; : \; \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$ Dans ce cas

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Égalité de la moyenne

Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ harmonique sur U. Soit $(x_0, y_0) \in U$ et r / $\overline{B((x_0,y_0),r)} \subset U$. On pose

$$\forall r \in [0,\rho], F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + \sin\theta)d\theta$$

valeur moyenne de f sur $\mathcal{C}((x_0,y_0),\rho)$. On veut montrer que F est constante sur $[0,\rho]$. Le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre permet de montrer que la fonction

$$G(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)d\theta$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $G'(r) = 0$ sur $]0,\rho]$

$$\forall\theta \in [0,2\pi], f(x_0,y_0) = f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$$

Lien avec les fonctions holomorphes

Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2/\sqrt{x^2+y^2} < R$. On définit $\tilde{f}(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$, on vérifie qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\Delta f = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2} = 0$$

13.3 Classe $\mathcal{C}^k$

13.3.1 Définition

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $(e_1, ..., e_n)$ une base fixée de E. Soit U ouvert de E, on définit pour $i \in [|1;n|]$

$$\mathcal{C}^1(U,F) = \text{ l'espace vectoriel des fonctions } \mathcal{C}^1 : U \to F$$

et $\begin{array}{cccc} D_i & : & \mathcal{C}^1(U,F) & \to & \mathcal{C}^0(U,F) \\ & & f & \mapsto & D_i f = D_{e_i} f \end{array}$ l'opérateur de dérivation par rapport à la k-ième variable. On définit pour $k \geq 0$

$$f est de classe \mathcal{C}^k \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est au moins } \mathcal{C}^1(U,F) \\ \forall i \in [|1,n|], D_i f \in \mathcal{C}^{k-1}(U,F) \end{cases}$$

Pour $(i_1, ..., i_k) \in [|1;n|]^k$, on peut alors définir :

$$D_{i_k}...D_{i_1} f = D_{i_k}[...D_{i_1} f] = (D_{i_k}...D_{i_1})f$$

application dérivée partielle d'ordre k (il y en a n^k). Si les variables sont notées $(x_1, ..., x_k)$, on note :

$$D_{i_k}...D_{i_1} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(...\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}...\partial x_{i_1}}$$

(on dérive par rapport à x_{i_1} puis x_{i_2}... enfin par rapport à x_{i_k})

Exemple

Si $n = 3$ et $k = 2$ et si les variables sont notées (x, y, z)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial z})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial z}))$$

Remarque

On vérifie sans peine (grâce au théorème de caractérisation de la classe $\mathcal{C}^1$ que cela équivaut à dire que $df \in \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathcal{L}(E, F))$

Théorème

1. f est $\mathcal{C}^k$ sur U si et seulement toutes ses dérivées partielles aux ordres $\leq k$ sont définies continues sur U
2. Toute somme, produit, composée de fonctions $\mathcal{C}^k$ l'est encore

Classe $\mathcal{C}^\infty$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est $\mathcal{C}^n$ si et seulement si toutes les dérivées partielles à tout ordre sont définies et continues sur U

Exemples

1. $\forall i \in [|1; n|],\ e_i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$
2. Par composition, somme et produits : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{\exp(x^3 - 2y\sqrt{y^4 + 4x^2 + 3})}{1 + \sin^2(3x^2y - z^3)} \end{array}$ est $\mathbb{C}^\infty$
3. det et le passage à l'inverse dans $GL_n(\mathbb{C})$ sont $\mathcal{C}^\infty$

13.3.2 Théorème de Schwarz

Si f est $\mathcal{C}^2 : U \to F, \forall (i, j) \in [|1; n|]^2$

$$D_i D_j f = D_j D_i f$$

Preuve : sans perte de généralité, on peut supposer $n = 2$ et $E = \mathbb{R}^2$, notons les variables (x, y). Soit $(x_0, y_0) \in U$. On veut montrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0,y_0)$$

Formons pour $h\in\mathbb{R}$ (h suffisamment petit pour que les points $\in U$)

$$F(h)=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)$$

h étant fixé, définissons $g(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y),\mathcal{C}^1$. De sorte que $F(h)=g(y_0+h)-g(y_0)$.
Soit $\begin{array}{cccc}\varphi & : & [0;1] & \to & F\\ & & t & \to & g(y_0+th)\end{array}$

$$F(h)=\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1\varphi'(t)dt=h\int_0^1 g'(y_0+th)dt=h\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+th)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+th)dt$$

t étant fixé, soit $\begin{array}{cccc}\Psi_t & : & [0;1] & \to & F\\ & & u & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+uh,y_0+th)\end{array}$ $\mathcal{C}^1$

$$F(h)=h\int_0^1(\Psi_t(1)-\Psi_t(0))dt=h\int_0^1\int_0^1\Psi_t'(u)dudt=h^2\int_0^1\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+uh,y_0+th)dudt$$

Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ sur U : pour $\varepsilon>0,\exists\alpha>0/|h|\leq\alpha$ et $|k|\leq\alpha$

$$|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+h,y_0+k)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)|\leq\varepsilon$$

Si $|h|\leq\varepsilon$ (et $h\neq 0$),

$$|\frac{F(h)}{h^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)|\leq\int_0^1\int_0^1|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+h,y_0+th)-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)|dudt\leq\varepsilon$$

Ainsi, $\lim_{h\to 0}\frac{F(h)}{h^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$. De même en formant $l(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$, on obtient $\lim_{h\to 0}\frac{F(h)}{h^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$

⚠La continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ en (x_0,y_0) est nécessaire !

Soit $\begin{array}{cccc}f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ & & (x,y) & \mapsto & \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\\ & & (0,0) & \mapsto & 0\end{array}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=-y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=-1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

13.3.3 Exemples à connaître

Séries entières

Soit $\sum a - nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que
$$f : \begin{array}{ccc}]-R;R[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (r,\theta) & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \end{array}$$ est $\mathcal{C}^\infty$

Lemme Soit $\rho \in [0;R[, (j,k) \in \mathbb{N}^2$, la série de fonctions
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n(n-1)...(n-j+1)r^{n-j}(in)^k e^{in\theta}$$
converge normalement sur $[-\rho;\rho]\times\mathbb{R}$
Preuve : $\forall(r,\theta)\in[-\rho;\rho]\times\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}\geq j$
$$|a_n n(n-1)...(n-j+1)r^{n-j}(in)^k e^{in\theta}| \leq |a_n| n^{j+k}\rho^{n-j}$$
terme général d'une série convergente
Soit alors, pour $l\in\mathbb{N}$
$$\mathcal{P}_l : \begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^l \text{ sur }]-R;R[\times\mathbb{R} \\ \forall(j,k)\in\mathbb{N}^2/j+k\leq l, \forall(r,\theta)\in]-R;R[\times\mathbb{R} \\ \frac{\partial^{j+k}f}{\partial r^j\partial\theta^k}(r,\theta) = \sum_{n\geq j} a_n n(n-1)...(n-j+1)r^{n-j}(in)^k e^{in\theta} \end{cases}$$
Initialisation : $j=0=k$, d'après le lemme f est continue sur $]-R;R[\times\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_0$
Hérédité : soit $l\in\mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_l$ vraie. Soit $(j,k)\in\mathbb{N}^2/j+k=l+1$, d'après le lemme j ou $k\geq 1$, d'après $\mathcal{P}_l$: $\frac{\partial^{j+k-1}f}{\partial^r j-1\partial\theta^k}$ existe et vaut ...
Le lemme permet de dériver une fois de plus par rapport à r (théorème de dérivation d'une série de fonction, la série des dérivées converge normalement sur $[-\rho;\rho]\times\mathbb{R}, \forall\rho<R$ et garantit que $(r,\theta)\mapsto\frac{\partial^{j+k}f}{\partial^j r\partial^k\theta}$ est continue sur $[-R;R]\times\mathbb{R}$. De même si $k\geq 1, \mathcal{P}_{l+1}$
Conclusion : f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[\times\mathbb{R}$

Fonction gamma d'Euler

Soit $D=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et $\Gamma : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & \Gamma(x+iy)=\int_0^{+\infty} t^{x-1+iy}e^{-t}dt \end{array}$ Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et dérivable au sens complexe. Formons, $f : \begin{array}{ccc} D\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{C} \\ (x,y,z) & \mapsto & t^{x-1+iy}e^{-t} \end{array}$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $D\times\mathbb{R}_+^*$

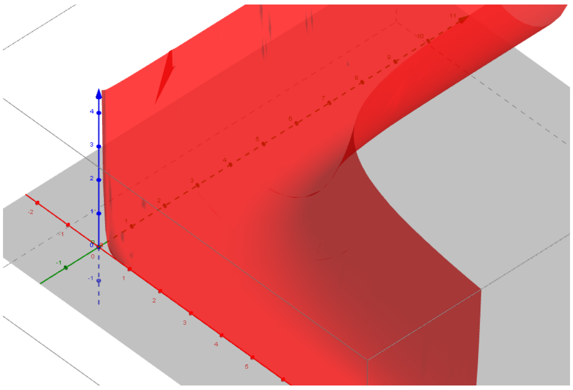
Lemme $\forall(j,k)\in\mathbb{N}^2, t\mapsto\frac{\partial^{j+k}f}{\partial x^j\partial y^k}$ est intégrable $\forall(x,y)\in D$
Preuve :
$$\begin{aligned} |\frac{\partial^{j+k}f}{\partial x^j\partial y^k}(x,y,t)| &= |\ln t^j(i\ln t)^k t^{x+iy-1}e^{-t}| \\ &= |\ln t^j+k|t^{x-1}e^{-t} \\ &= O_\infty(\frac{1}{t^2}) \\ &= O_0(t^{\frac{x}{2}-1}) \end{aligned}$$

intégrable d'après le critère de Riemann. On montre par une méthode analogue au cas précédant par récurrence que Γ est $\mathcal{C}^\infty$.
Soit $\Gamma_1(x,y) = Re(\Gamma(x,y)) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\cos(y\ln t)e^{-t}dt$ et $\Gamma_2(x,y) = Im(\Gamma(x,y)) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\sin(y\ln t)e^{-t}dt$.
D'après ce qui précède,

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\cos(y)\ln(t)e^{-t}dt = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial y}(x,y) = \int_0^{+\infty} -\ln(t)t^{x-1}\sin y\ln te^{-t}dt = -\frac{\partial \Gamma_2}{\partial y}(x,y)$$

Γ est donc dérivable au sens complexe



13.4 Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé

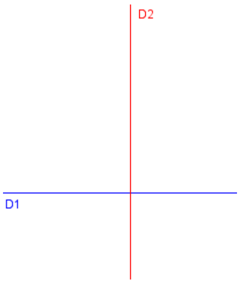
13.4.1 Définition

Définition

> Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{A}$ une partie non vide de E et $a \in \mathcal{A}$. On dit qu'un vecteur est tangent à $\mathcal{A}$ en a si et seulement si $\exists \alpha > 0, \exists \gamma :]-\alpha;\alpha[\to \mathcal{A}$ est $\mathcal{C}^1$ / $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$. L'ensemble des vecteurs tangent à $\mathcal{A}$ en a sera notée $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a)$

Exemples

1. Si $\mathcal{A} = \{a\}$ alors $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a) = \{0\}$ car les arcs tracés sur $\mathcal{A}$ passant par a sont constants
2. Si $\mathcal{A}$ est ouverte, soit $a \in \mathcal{A}$ et $x \in E, \exists \alpha > 0/|t| < \alpha, a + tx \in \mathcal{A}$, on peut former $\begin{array}{cccc} \gamma & : &]-\alpha;\alpha[& \to & \mathcal{A} \\ & & t & \mapsto & a+tx \end{array}$ $\mathcal{C}^1$ et $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = x, \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a) = E$
3. Soit dans $\mathbb{R}^2, \mathcal{A} = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$.



Soit $\gamma :]-\alpha;\alpha[\to \mathcal{A}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\forall t \in]-\alpha;\alpha[\gamma(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow x(t)y(t) = 0$. Comme $n \geq 2, x(\frac{\alpha}{n})y(\frac{\alpha}{n} = 0$ ou bien $I = \{n \geq 2/x(\frac{\alpha}{n} = 0\}$ est infini et $\forall n \in I, \gamma(\frac{\alpha}{n}) \in D_2, \gamma'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\gamma(\frac{\alpha}{n})-\gamma(a)}{\frac{\alpha}{n}} \in D_2$ ou bien I est fini et $J = \{n \geq 2/y(\frac{\alpha}{n} = 0\}$ est infini donc $\gamma'(0) \in D_1$. Ainsi $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(0,0) \subset D_1 \cup D_2$

Réciproquement, doit $X \in D_1 \cup D_2$, $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{A} \\ t & \mapsto & tX \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = X$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(0,0) = D_1 \cup D_2$$

4. Soit dans $\mathbb{R}^n$, la sphère $S_{n-1} = \{(x_1;...;x_n) \in \mathbb{R}^n/x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$. Soit $a = (a_1;...;a_n) \in S_{n-1}$. Soit $\gamma] - \alpha;\alpha[\to S_{n-1}$ tel que $\gamma(0) = a$, $\forall t \in]-\alpha,\alpha[, \|\gamma(t)\|^2 = 1$ en dérivant $\forall t \in]-\alpha,\alpha[, 2(\gamma(t)|\gamma'(t)) = 0$ et $(a|\gamma'(0)) = 0$. Ainsi $\gamma'(0) \in H \Rightarrow \mathcal{T}_{S_{n-1}}(a) \subset H$.

   Réciproquement, soit $x \in H \setminus \{0\}, b = \frac{x}{\|x\|}$. Soit $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & S_{n-1} \\ \theta & \mapsto & a\cos\theta + b\sin\theta \end{array}$ tracé sur S_{n-1} car $(a|b) = 0$, donc

$$\|a\cos\theta + b\sin\theta\|^2 = \|a\cos\theta\|^2 + \|b\sin\theta\|^2 = 1$$

   , $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = b$. Soit $\gamma_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & S_{n-1} \\ t & \mapsto & \gamma(\|x\|t) \end{array}$ $\mathcal{C}^1, \gamma_1(0) = a$ et $\gamma_1'(0) = \|x\|b = x \in \mathcal{T}_{S_{n-1}}(a)$

   Finalement $\mathcal{T}_{S_{n-1}}(a) = \{a\}^\perp$

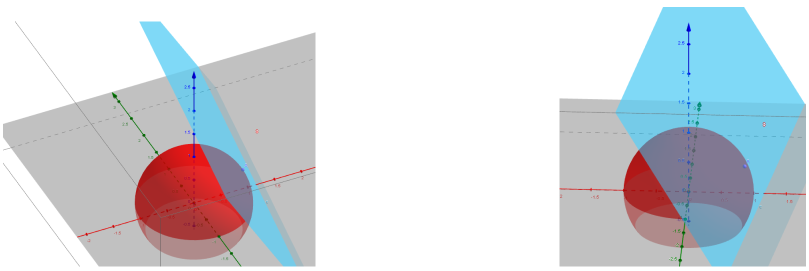


FIGURE 13.3 – Plusieurs vue d'un plan tangent à une sphère en un point

5. Soit $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/\det M = 1\}$. Soit $M_0 \in SL_n(\mathbb{R})$, reconnaitre $\mathcal{T}_{SL_n(\mathbb{R})}(M_0)$

   Cas où $M_0 = I_n$ $\gamma : \begin{array}{ccc}]-\alpha;\alpha[& \to & SL_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}$ $\mathcal{C}^1/\gamma(0) = I_n$. Soit $A = \gamma'(0)$. On a $\forall t \in]-\alpha,\alpha[, \det M(t) = \varphi(t) = 1 \Rightarrow \varphi'(t) = d(\det)_{M(t)}(M'(t)) = 0$. Ainsi $\varphi'(0) =$

$d(\det)_{I_n}(A) = 0 = tr(A)$

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/tr(A) = 0$. Soit $\begin{array}{rcll} \gamma & : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & t & \mapsto & \exp(tA) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \end{array}$ $\mathcal{C}^1$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A\exp(tA)$$

Par ailleurs $\det\exp(tA) = e^{tr(A)} = e^0 = 1$, donc $\gamma(t) \in SL_n(\mathbb{R})$ et $\gamma(0) = I_n, \gamma'(0) = A$. Finalement

$$\mathcal{T}_{SL_n(\mathbb{R})}(I_n) = Ker(tr)$$

Cas général soit $\gamma :]-\alpha, \alpha[\to SL_n(\mathbb{R}), \mathcal{C}^1/\gamma(0) = M_0$, on peut lui associer $\begin{array}{rcll} \varphi & : &]-\alpha,\alpha[& \to & SL_n(\mathbb{R}) \\ & & t & \mapsto & M_0^{-1}\gamma(t) \end{array}$ $\mathcal{C}^1, \varphi(0) = I_n, \varphi'(0) = M_0^{-1}\gamma'(0)$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{T}_{SL_n(\mathbb{R})}(M_0) = M_0 Ker(tr)$$

c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Théorème

1. $0 \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(a)$
2. Si $x \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(a)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(a)$

Preuve :

1. Former $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = a$
2. Si $\gamma :]-\alpha, \alpha[\to \mathcal{A}$ vérifie $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$, on forme $\begin{array}{rcll} \gamma_1 & : &]-\frac{\alpha}{\lambda}; \frac{\alpha}{\lambda}[& \to & \mathcal{A} \\ & & t & \mapsto & \gamma(\lambda t) \end{array}$, $\gamma_1(0) = a, \gamma_1'(0) = \lambda x, \lambda \neq 0$

13.4.2 Cas d'une ligne ou surface équipotentielle

Théorème

Soit $F : U \subset E$ euclidien $\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{A} = \{a \in U / F(a) = c\}$ (ligne ou surface de niveau, équipotentielle). Soit $x \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(a)$. On a

$$((\text{grad} f)(a)|x) = 0$$

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau, surfaces équipotentielles

Preuve : Soit $\gamma :]-\alpha, \alpha[\to \mathcal{A}, \mathcal{C}^1/\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$, $\forall t \in]-\alpha, \alpha[, F(\gamma(t)) = c$, en dérivant on a le résultat souhaité

Remarques

1. Comme $dF_a(h) = (\text{grad}f(a)|h)$, si h est unitaire alors $(\text{grad}F(a)|h) \leq \|\text{grad}F(a)\|$ avec égalité si et seulement si h est colinéaire au gradient
2. En un point x_0 d'une ligne de niveau, $F(x) = c$. Si y est un vecteur tangent à $\mathcal{A} = \{x \in E/F(x) = c\}$ en x_0, on a
$$((\text{grad}F)(x_0)|y) = 0$$
noté $\nabla F(x_0)|y) = 0$, donc $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(x_0) \subset (\nabla F(x_0))^{\perp}$. A-t-on l'inclusion réciproque ? Généralement non (cf exemple 3)
$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/F(x, y) = xy = 0\} = \mathbb{R}(1, 0) \cup \mathbb{R}(0, 1)$$
$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ et $\nabla F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(0, 0) = D_1 \cup D_2$ et $(\nabla F(0, 0))^{\perp} = \mathbb{R}^2 \neq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(0, 0)$
En revanche pour $(x_0, y_0) \in \mathcal{A} \setminus \{(0, 0)\}$, si par exemple $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$
$$\nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\nabla F(x_0, y_0))^{\perp} = \mathbb{R}(0, 1) = D_2$$
On définit pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda t + y_0 \end{pmatrix}$, ainsi $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$
Ici $(\nabla F(x_0, y_0))^{\perp} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(x_0, y_0)$

Théorème des fonctions implicites

Si $\nabla F(x_0) \neq 0$ alors $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(x_0) = (\nabla F(x_0))^{\perp}$. Ce résultat se démontre dans le cas particulier d'un graphe (cas du programme)

Preuve : soit $\begin{array}{cccc} G & : & \Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^{n-1} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1; ...; x_{n-1}) & \mapsto & G(x_1; ...; x_{n-1}) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On forme le graphe de G, $\mathcal{A} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n/x_n = G(x_1, ..., x_{n-1})\}$
Posons $F(x_1, ..., x_n) = G(x_1, ..., x_{n-1}) - x_n$
$$\mathcal{A} = \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \times \mathbb{R}/F(x_1, ..., x_n) = 0\}$$
Pour $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}, \nabla F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_{n-1}}(a) \\ -1 \end{pmatrix}$. Soit $x \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a)$, on a $(\nabla F(a)|x) = 0, x \in (\nabla F(a))^{\perp}$ et si $\gamma :]-\alpha; \alpha[\to \mathcal{A}$ vérifie $\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma'(0) = x \end{cases}$, on a $\forall t \in]-\alpha, \alpha[, \gamma_n(t) = G(\gamma_1(t), ..., \gamma_{n-1}(t))$,
$$\gamma_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t) \frac{\partial G}{\partial x_i}(\gamma_1(t), ..., \gamma_{n-1}(t))$$

d'où $\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(0) \frac{\partial G}{\partial x_i}(a)$

Réciproquement soit $x = (x_1, .., x_n) \in (\nabla F(a))^{\perp}$. Formons $\gamma \; : \; \begin{array}{ccc}]-\alpha, \alpha[& \to & \mathcal{A} \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a_1 + t_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + tx_{n-1} \\ G(a_1 + t_1; ...; a_{n-1} + tx_{n-1}) \end{pmatrix} \end{array}$,

$\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$. Ainsi dans le cas d'un graphe

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a) = (\nabla F(a))^{\perp}$$

Pour $n = 3$, on a affaire à une surface $z = G(x, y), F(x, y, z) = G(x, y) - z$. Soit $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{A}$

$$\nabla F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(a_1, a_2) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a_1, a_2) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla F(a))^{\perp} = Vect[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(a_1, a_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a_1, a_2) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a)$ est un plan dit plan tangent à $\mathcal{A}$ en a

13.4.3 Application à la recherche d'extremums (HP)

Théorème des extremums liés

Soit une ligne de niveau $\mathcal{A} = \{a \in E / F(a) = c\}$ (où $F : U \subset E \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$). Soit $H : \Omega$ ouvert $\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, où $\mathcal{A} \subset \Omega$. On recherche les extremums de H sur $\mathcal{A}$. Seulement, on a généralement $\mathring{\mathcal{A}} = \emptyset$. Si H présente un extremum local en $a \in \mathcal{A}$, soit $x \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a)$. Soit $\gamma :]-\alpha, \alpha[\to \mathcal{A}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$

Soit $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc}]-\alpha, \alpha[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & H(\gamma(t)) \end{array}$, φ présente un extremum en 0 et est $\mathcal{C}^1$ donc

$$\varphi'(0) = 0 = dH_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dH_a(x)$$

Si E est euclidien, $(\nabla H_a | x) = 0$. Ceci valant $\forall x \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a), \nabla H_a \in (\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a)^{\perp}$. Dans le cas où $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(a) = (\nabla F(a))^{\perp}$

$$\nabla H_a \in \mathbb{R} \nabla F(a)$$

Exemple

Déterminer $\min_{A \in SL_n(\mathbb{R})} tr({}^tAA)$. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $tr({}^tAB) = (A|B)$. on cherche $\min_{A \in SL_n(\mathbb{R})} \|A\|^2 = d(0, SL_n(\mathbb{R}))^2$. On a $\|I_n\|^2 = n$. Soit $A \in SL_n(\mathbb{R}), \|A - I_n\| \geq 2\sqrt{n} \Rightarrow \|A\| \geq \|A - I_n\| - \|I_n\| \geq \sqrt{n}$

$\mathcal{C} = SL_n(\mathbb{R}) \cap \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \|A - I_n\| \leq 2\sqrt{n}\}$ compact (fermé borné en dimension finie). Sur $\mathcal{C}, \|.\|^2$ admet un minimum en A_l qui est un minimum sur $SL_n(\mathbb{R})$. $SL_n(\mathbb{R})$ est donc une ligne de niveau du déterminant.

Or $(\nabla \det)(A_0) = Com(A_0) = {}^tA_0^{-1}$ et $\mathcal{T}_{SL_n(\mathbb{R}}(A_0) = \{A_0 M / tr(M) = 0\}$

Soit $B \in (\nabla \det A_0)^{\perp}, tr(A_0^{-1}B) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{SL_n(\mathbb{R})}(A_0)$. Or, $\nabla(\|.\|^2)(A_0) = 2A_0 \in \mathcal{T}_{SL_n(\mathbb{R})}(A_0)^{\perp} =$

$\mathbb{R}^t A_0^{-1}$. $\exists \lambda \in \mathbb{R} / A_0 = \lambda^t A_0^{-1}, {}^t A_0 A_0 = \lambda I_n \Rightarrow \lambda = 1$ d'où $A \in SO_n(\mathbb{R})$, $\min\limits_{A \in SL_n(\mathbb{R})} \|A\|^2 = n = d(0, SL_n(\mathbb{R}))^2$ atteint par toute matrice de $SO_n(\mathbb{R})$

Chapitre 14

Équations différentielles linéaires

Soit dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (fréquemment $E = \mathbb{K}^n$), I intervalle de $\mathbb{R}$

Sommaire

14.1 Définitions et résultats généraux

14.1.1 Équation différentielle linéaire

Définition

Soit $\begin{array}{cccc} a & : & I & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & t & \mapsto & a(t) \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} b & : & I & \to & E \\ & & t & \mapsto & b(t) \end{array}$ On appelle équation différentielle sous forme résolue l'écriture

$$y' = [a(t)](y) + b(t) \tag{14.1}$$

Soit I' un intervalle $\subset I$, on appelle solution de (14.1) sur I', toute application $\begin{array}{cccc} \varpi & : & I' & \to & E \\ & & t & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$ $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in I', \varphi'(t) = [a(t)](\varphi(t)) + b(t)$$

On note $\mathcal{S}_{(14.1),I'}$ l'ensemble des solutions de (14.1) sur I'

Solution maximale

On dit que $\mathcal{S}_{(14.1),I'}$ est solution maximale de (14.1) si et seulement si il n'existe pas d'intervalle I', telle que $I' \subsetneq I'' \subset I$ et $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{(14.1),I''}$ telle que $\tilde{\varphi}_{|I'} = \varphi$ (i.e on ne peut pas prolonger φ en une solution de (14.1) sur un intervalle contenant strictement I')
Notons que toute solution de (14.1) est restriction d'une solution maximale

Problème de Cauchy-Lipschitz

Soit une EDL $y' = [a(t)](y) + b(t)$ et $t_0 \in I, y_0 \in E$. On appelle problème de Cauchy associé à cette EDL l'écriture

$$(C) \begin{cases} y' = [a(t)](y) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On appelle solution de (C) sur un intervalle $I' \subset I$ contenant t_0 toute solution φ de (14.1) sur I' telle que $\varphi(t_0) = y_0$

Remarque

Une ED est la loi générale d'un mouvement physique, un problème de Cauchy est sa particularisation avec une condition initiale

Théorème de Cauchy-Lipschitz

On dit qu'on a unicité pour le problème de Cauchy (C) si et seulement si φ_1 et φ_2 sont solution de (C) sur I_1 et I_2, on a $\varphi_{1|I_1 \cap I_2} = \varphi_{2|I_1 \cap I_2}$ ($t_0 \in I_1 \cap I_2$). On retiendra qu'on a unicité d'une solution maximale à un problème de Cauchy

Remarque

L'unicité traduit le caractère déterministe du mouvement

Forme matricielle

Lorsque $E = \mathbb{K}^n$, soit $\mathcal{B}$ la base canonique et $\forall t \in I, A(t) = mat_{\mathcal{B}}(a(t))$ et $B(t) = mat_{\mathcal{B}}(b(t))$. Notons pour $\varphi : I' \subset I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $t \in I', Y_\varphi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ la colonne des coordonnées de $\varphi(t)$ dans $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{S}_{(14.1),I'} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I', \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I', Y' = AY + B \end{aligned}$$

Équation différentielle scalaire d'ordre n

Soit $n \geq 1$ et $\alpha_1; ...; \alpha_{n-1}, \beta : I \to \mathbb{K}$, on appelle EDLSn sous forme résolue l'écriture :

$$y^{(n)} = \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + \alpha_0(t)y + \beta(t) \tag{14.2}$$

Soit $I' \subset I$, on appelle solution de (14.2) sur I' toute application $\varphi : I' \to \mathbb{K}, \mathcal{C}^n$ telle que

$$\forall t \in I', \varphi^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + ... + \alpha_0(t)\varphi(t) + \beta(t)$$

Problème de Cauchy d'ordre n

Soit $t_0 \in I, (y_0; ...; y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$, on appelle problème de Cauchy associée à (14.2) l'écriture

$$\begin{cases} y^{(n)} = \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + \alpha_0(t)y + \beta(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Une solution de (C) sur $I' \subset I$ contenant t_0 est une solution φ de (14.2) sur I' telle que
$$\begin{cases} \varphi(t_0) = y_0 \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$
On définit de même l'unicité

Forme matricielle

Soit $\varphi : I' \subset I \to \mathbb{K}, \mathcal{C}^n$, on lui associe $\begin{array}{rccc} Y_\varphi & : & I' & \to & \mathbb{K}^n \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \end{array}$ $\mathcal{C}^1$. On a $\varphi \in \mathcal{S}_{(14.2),I'} \Leftrightarrow$

$$Y \text{ est solution sur } I' \text{ de } Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

On se ramène ainsi à une équation du premier ordre avec $E = \mathbb{K}^n$ et φ est solution sur I' de $(C)\begin{cases} (14.2) \\ y(t_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ si et seulement si Y_φ est solution sur I' de $(C')\begin{cases} (14.3) \\ Y(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{cases}$

14.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ continues et $I' \subset I$. On peut définir $\begin{array}{rccc} U & : & \mathcal{C}^1(I',E) & \to & \mathcal{C}^0(I',E) \\ & & \varphi & \mapsto & U(\varphi) \end{array}$ $/\forall t \in I', U(\varphi)(t) = \varphi'(t) - [a(t)](\varphi(t))$. De plus $\forall(\lambda,\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{K} \times \mathcal{C}^1(I,E)^2, \forall t \in I, U(\lambda\varphi_1+\varphi_2)(t) = \lambda\varphi_1' + \varphi_2' - a(t)(\lambda\varphi_1+\varphi_2) = \lambda U(\varphi_1) + U(\varphi_2)$ On associe à (14.1) l'équation dite homogène

$$y' = [a(t)](t)$$

Théorème de structure

Si $\mathcal{S}_{(14.1),I'} \neq \emptyset$ (i.e $b \in Im(U)$) soit $\varphi_1 \in \mathcal{T}_{(14.1),I'}$, on dit que c'est une solution particulière, on a :

$$\mathcal{S}_{(H),I'} = Ker(U)$$

$$\mathcal{S}_{(14.1),I'} = \varphi_1 + \mathcal{S}_{(H),I'}$$

C'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I', \mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_{(H),I'}$

Preuve : cf cours de MPSI

Remarque

Toute solution de (14.1) sur I' s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$$

avec $\varphi_0 \in Ker(U)$

Second membre

On écrit souvent (14.1) sous la forme avec second membre :

$$y' + [a(t)](y) = b(t)$$

L'équation homogène s'écrit aussi :

$$y' + [a(t)](y) = 0$$

14.1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Démonstration (HP)

Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ continues. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$ et $\begin{cases} y' = [a(t)](y) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
φ solution de (C) sur I' si et seulement si $\forall t \in I'$

$$\begin{cases} y' = [a(t)](y) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in I', \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} ([a(u)](\varphi)(u) + b(u))du + y_0 \tag{14.4}$$

est l'équation intégrale associée à (C). Soit $F : \mathcal{C}^0(I, E) \to \mathcal{C}^0(I, E)$ telle que $\forall t \in I, F(\varphi)(t) = \int_{t_0}^{t}([a(u)](\varphi(u)) + b(u))du + y_0$. On cherche un point fixe de F. L'idée est de partir de $\begin{array}{cccc} \varphi_0 & : & I & \to & E \\ & & t & \mapsto & y_0 \end{array}$ et on itère $F, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = F(\varphi_n)$. On va montrer que (φ_n) converge uniformément sur les segments de I. Pour ce faire, on va étudier la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{n+1} - \varphi_n$. Fixons J segment $\subset I$. Notons, $C = \sup\limits_{t\in J} |||a(t)|||$

Lemme Soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^0(I, E)^2, \forall t \in J$

$$\|F(\varphi)(t) - F(\psi)(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} [a(u)](\varphi - \psi)(u)du\| \leq |t_0 - t|C\|\varphi - \psi\|_\infty$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, t \in J$ notons $M_n = \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_\infty$, d'après le lemme :

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| = \|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_{n-1})(t)\| \leq |t_0 - t|CM_n$$

Il s'ensuit en reportant (à l'ordre $n-1$) que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\| &= \|\int_{t_0}^t [a(u)](\varphi_n-\varphi_{n-1})(u)du\| \\
&\leq |\int_{t_0}^t |||a(u)||| \times \|\varphi_n(u)-\varphi_{n-1}(u)\|du| \\
&\leq C|\int_{t_0}^t |u-t_0|CM_{n-1}du| \\
&= C^2\frac{|t-t_0|^2}{2}M_{n-1}
\end{aligned}$$

Par récurrence, $\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\| \leq C^n\frac{|t-t_0|^n}{n!}M_1$. Soit $l(J)=\sup(J)-\inf(J)$, il vient

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|_\infty \leq \frac{C^n l(J)^n}{n!}M_1$$

SATP convergente. Ainsi la série de fonctions $\sum \varphi_{n+1}-\varphi_n$ converge normalement donc uniformément sur les segments de I et (φ_n) converge uniformément sur les segments de I vers $\varphi \in \mathcal{C}^0(I,E)$. De plus, $\forall t \in I, \varphi_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t [a(u)](\varphi_n(u))+b(u)du+y_0$ et comme $\forall u \in J, \|[a(u)](\varphi_n(u)-\varphi(u)\| \leq C\|\varphi_n-\varphi\|_\infty$. La suite de fonctions $(u\mapsto [a(u)](\varphi_n(u)+b(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers $u\mapsto [a(u)](\varphi(u))+b(u)$
Par convergence, on a $\forall t\in J, \varphi(t)=\int_{t_0}^t [a(u)](\varphi(u))+b(u)du+y_0$. Ceci valant pour tout segment $J\subset I$ contenant t_0, donc sur I tout entier. Par ailleurs, si $(\varphi,\psi)\in\mathcal{C}^0(I,E)$ sont solutions de (14.3), d'après le lemme :

$$\forall t\in J, \|\varphi(t)-\psi(t)\| = \|F(\varphi)(t)-F(\psi)(t)\| \leq |t_0-t|C\|\varphi-\psi\|_\infty$$

De même que précédemment, par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}, \|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq C^n\frac{|t_0-t|^n}{n!}\|\varphi-\psi\|_\infty$ d'où $\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq \frac{C^n l(J)^n}{n!}\|\varphi-\psi\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\varphi_{|J}=\psi_{|J}$, ainsi ceci valant pour tout segment de J, $\varphi=\psi$

Énoncé

Pour $a: I\to\mathcal{L}(E), b: I\to E$, continues soit $t_0\in I, y_0\in E$ alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy-Lipschitz :

$$\begin{cases} y'=[a(t)](y)+b(t) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

et elle est définie sur I

Exemples

Soit le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'=y \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ On pose $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & y_0 \end{array}$

$$\varphi_1(t)=\int_{t_0}^t y_0du+y_0 = y_0(t-t_0)+y_0$$

$$\varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_1(u)du + y_0 = y_0\frac{(t-t_0)^2}{2} + y_0(t-t_0) + y_0$$

$$\varphi_n(t) = y_0(\sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0 \exp(t-t_0)$$

Remarque

La preuve du TCL fournit une suite de fonctions qui converge uniformément vers φ sur les segments de I, mais pas une expression explicite de φ !

Corollaire

1. $\begin{array}{cccc} U & : & \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}) \\ & & \varphi & \mapsto & U(\varphi) \end{array}$ $\forall t \in I, U(\varphi)(t) = \varphi'(t) - [a(t)](\varphi(t))$ est surjective
2. $\forall t \in I$, l'application $\begin{array}{ccccc} \Theta_t & : & \mathcal{S}_{(H),I} = Ker(U) & \to & E \\ & & \varphi & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$ est un isomorphisme et $\dim \mathcal{S}_{(H),I} = \dim E$

Preuve : soit $b \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$

1. Soit $(t_0, y_0) \in I \times E$ et φ unique solution sur I de $(C)\begin{cases} y' & = [a(t)](y) + b(t) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$ On a $U(\varphi) = b$, donc U est surjective
2. On applique le TCL à $y' = [a(t)](y), \forall y_0 \in I, \exists! \varphi \in \mathcal{T}_{(H),I} / \varphi(t_0) = y_0$ i.e $\Theta_{t_0}(\varphi) = y_0$, Θ_{t_0} est bijective, elle est linéaire : c'est un isomorphisme

Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

Soit $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}, \beta : I \to \mathbb{K}$, continues et

$$y(n) = \alpha_{n-1}y^{n-1} + ... + \alpha_0 y + \beta \tag{14.5}$$

1. $\forall (t_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in I \times \mathbb{K}^n, \exists! \varphi \in \mathcal{S}_{(14.5),I}$ telle que $\varphi(t_0) = y_0, ..., \varphi(n-1)(t_0) = y_0^{(n-1)}$
2. $\dim \mathcal{S}_{(H),I} = \dim E$

Preuve : on passe par un système différentielle linéaire

14.1.4 Résolvante, Wronskien

Soit $\mathcal{B}$ une base fixée de E (si $E = \mathbb{K}^n, \mathcal{B}$ est la base canonique)

Définitions

Soit $\varphi_1, ..., \varphi_n$, n applications : $I \to E$. Pour $t \in I$ on appelle (matrice) résolvante de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ à l'instant t

$$R_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = mat_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$$

et Wronskien de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ à l'instant t

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = \det R_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$$

Théorème

Soit $y' = [a(t)](y)$ avec $a : I \to \mathcal{L}(E)$ continue. Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in (\mathcal{S}_{(H),I})^n$
Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est libre c'est alors une base de $\mathcal{S}_{(H),I}, \forall t \in I$

$$\mathcal{B}(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$$

est une base de E. On a de plus $\forall t \in J, W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) \neq 0$
Ou bien $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est liée, $\forall t \in I, W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = 0$

Preuve : $\dim \mathcal{S}_{(H),I} = n$ et $\forall t \in I, \Theta_t$ est un isomorphisme. Par isomorphisme $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{(H),I}$ si et seulement si $\mathcal{B}(t) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une base de E si et seulement si $W_{\varphi_1,...,\varphi_n} \neq 0$

Remarque

S'il existe $t_0 \in I / W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t_0) \neq 0$ alors $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{(H),I}$ et $\forall t \in I, W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) \neq 0$

Calcul du Wronskien (HP)

Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in \mathcal{S}^n_{(H),I}$, si cette famille est liée, $\forall t \in I, W_{\varphi_1,...,\varphi_n} = 0$
Si elle est libre c'est une base de $\mathcal{S}_{(H),I}$ et $\forall t \in I, \mathcal{B}(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ est une base de E et $\forall t \in I$

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t); ...; \varphi_i'(t); ...; \varphi_n(t)) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi; ...; \varphi_n) \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}(t)}(\varphi_1(t); ...; [a(t)](\varphi_i); ...; \varphi_n(t))$$

Notons $A(t) = (a_{i,j}(t)) = mat_{\mathcal{B}(t)}a(t)$. On a $\forall i \in [|1;n|]$

$$\det_{\mathcal{B}(t)}(\varphi_1(t);...;[a(t)](\varphi_i);...;\varphi_n(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{1,i}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,i}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,i}(t) & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{i,i}(t)$$

$$W'_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)W_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t) = tr(A)(t)$$

d'où $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = C\exp^{\int_{t_0}^{t} tr(A)(u)du}$ avec $C \in \mathbb{K}^*$

14.1.5 Variations des constantes

Principe

Soit $(\varphi_1;...;\varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{(H),I}$. Pour $t \in I$, soit $\mathcal{B}(t) = (\varphi_i(t))_{i\in[|1;n|]}$ base de E. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}), \forall t \in I, \varphi(t) \in E$ et $\exists(\lambda_i(t)) \in \mathbb{K}^n / \varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\varphi_i(t)$

Soit $\mathcal{B}$ une base fixée de E et $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ colonne des coordonnées de $\varphi(t)$ dans $\mathcal{B}, \forall i \in [|1;n|], x_i \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$. Comme $\begin{pmatrix} \lambda_i(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix}$ est la colonne des coordonnées de $\varphi(t)$ dans $\mathcal{B}(t)$ et $R_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t)$ est la matrice de passage de $\mathcal{B} \to \mathcal{B}(t)$. Il vient

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} = R^{-1}_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t)} {}^tCom(R_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t)) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

donc $\forall i \in [|1,n|], \lambda_i \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ et

$$\forall t \in J, \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\varphi_i'(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\varphi_i(t) = [a(t)](\varphi(t)) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\varphi_i(t)$$

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{S}_{(1),I} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\varphi_i(t) = b(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, mat_{\mathcal{B}(t)}b(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = R^{-1}_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t) \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\forall i \in [|1;n|], \exists \mu_i \in \mathbb{K}, \forall t \in I, \lambda_i(t) = \int_{t_0}^t \beta_i(u)du + \mu_i$

Finalement $\varphi \in \mathcal{T}_{(14.1),I} \Leftrightarrow \exists(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{K}^n / \forall t \in I, \varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\int_{t_0}^t \beta_i(u)du)\varphi_i(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i(t)$

On sait résoudre (14.1) à partir d'une base de solutions de (H) (on dit que $(\varphi_1(t); ...; \varphi_n(t))$ est un système fondamental de solutions de (H) sur I)

Cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre n

Soit $\alpha_0; ...; \alpha_{n-1}, \beta : I \to \mathbb{K}$ continues. On a l'équation (14.2). Soit $\varphi_1; ...; \varphi_n \in (\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}))^n$, on forme $\forall i \in [|1;n|]$, $\begin{array}{cccc} Y_{\varphi_i} & : & I & \to & \mathbb{K}^n \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_i(t) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{array}$ $\in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ On a vu que $(\varphi_1; ...; \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{(H),I}$ si et seulement si $(Y_{\varphi_1}; ...; Y_{\varphi_n})$ est une base de $\mathcal{S}_{(H'),I}$.

On définit $\forall t \in I, R(t) = R_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t) = R_{Y_{\varphi_1};...;Y_{\varphi_n}}(t)$ et $W(t) = W_{Y_{\varphi_1};...;Y_{\varphi_n}}(t) = W_{\varphi_1;...;\varphi_n}(t)$.

On a (φ_i) est une base de $\mathcal{S}_{(H),I} \Leftrightarrow \forall t \in I, (Y_{\varphi_i})$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $Y_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}, \forall t \in I, \exists(\lambda_i(t)) \in \mathbb{K}^n / Y_{\varphi(t)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(t) Y_{\varphi_i}(t)$

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \begin{pmatrix} \varphi_i(t) \\ \varphi_i'(t) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$

14.1.6 Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1

Méthode générale

Soit $\alpha : I \to \mathbb{K}, \beta : I \to \mathbb{K}$ continue et

$$y' = \alpha(t)y + \beta(t) \tag{14.6}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}), \varphi \in \mathcal{S}_{(14.6),I} \forall t \in I, \varphi'(t) - \alpha(t)\varphi(t) = \beta(t)$. On pose $\mathcal{A}(t) = \int_{t_0}^t \alpha(u)du$, $t_0 \in I$ fixé

$$\begin{aligned} (14.6) \quad &\Leftrightarrow \quad (\varphi'(t) - \alpha(t)\varphi(t))e^{-\mathcal{A}(t)} = \beta(t)e^{-\mathcal{A}(t)} \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi \exp \mathcal{A} = \beta \exp \mathcal{A} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{K} / \forall t \in I, \varphi(t) = (\int_{t_0}^t \beta(u)e^{-\mathcal{A}(u)}du + C)e^{\mathcal{A}(t)} \end{aligned}$$

Problème de Cauchy

L'unique solution au problème de Cauchy avec $y(t_0) = t_0$ est celle pour laquelle $C = y_0$

Méthode de la variation de la constante

Soit l'équation différentielle : $y' = a(t)y + b(t)$

1. On résout d'abord l'équation homogène associée : $y' = a(t)y$, on obtient un ensemble de solutions $y_H(t) = Ae^{\int^t a(u)du}$
2. Pour résoudre l'équation avec second membre, on suppose que $y_p = \alpha(t)e^{\int^t a(u)du}$ est solution avec $\alpha : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. En réinjectant, on obtient une équation sur α, que l'on sait résoudre
3. L'ensemble des solutions est donné par $y = y_H + y_p$

Cas vectoriel

Soit l'équation $y' = [a(t)]y + b$ où $a : I \to \mathcal{L}(E), b : I \to E$ et $\dim E \geq 2$ et l'équation matricielle, $Y' = AY + B$ associée. Soit $\forall t \in I, \mathcal{A}(t) = \int_{t_0}^t A(u)du \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a

$$\mathcal{A}'(t) = A(t), \exp(-\mathcal{A}(t)), \exp(-\mathcal{A}(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\mathcal{A}^k(t)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k f_k(t)$$

$f_k'(t) = \frac{1}{k!}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{A}^{i-1}(t)\mathcal{A}(t)\mathcal{A}^{k-i}(t)$
$\|f_k'\|_{\infty,J} \leq \frac{1}{(k-1)!}\sup\limits_{t\in J}|||\mathcal{A}(t)|||^{k-1}\sup\limits_{t\in J}|||A(t)|||$, $t \mapsto e^{-\mathcal{A}(t)}$ est $\mathcal{C}^1$, si $\forall t \in I, A(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ conviennent, on a :

$$(\exp(\mathcal{A}))'(t) = A(t)\exp(-\mathcal{A}(t)) = \exp(-\mathcal{A}(t))A(t)$$

et on peut résoudre l'équation comme un ordre 1 scalaire. Si les 2 ne commutent pas, alors il faut employer une méthode locale si elle existe

14.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

14.2.1 Équation homogène

Position du problème

Soit $p : I \to \mathbb{K}$ et $q : I \to \mathbb{K}$ continues et

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

On sait d'après le TCL que $\dim \mathcal{S}_{(H),I} = 2$. Généralement on ne sait pas expliciter une base de solution de (H) ! ! !
Soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{S}_{(H),I})^2$, on définit

$$W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2)(t)\mathcal{C}^1$$

$$W_{\varphi_1,\varphi_2}'(t) = \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2 = -pW_{\varphi_1,\varphi_2}$$

$\exists C \in \mathbb{K} / \forall t \in I, W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) = Ce^{-\int_{t_0}^t p(u)du}$

$$(H) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

(φ_1, φ_2) est une base de solutions de $\mathcal{S}_{(H),I}$ si et seulement si $C \neq 0$:

$$\begin{aligned} C \neq \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in I, W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) \neq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\forall t \in I, \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{K}^2$

Recherche d'une solution développable en séries entières

Lorsqu'on a une EDL2 : $\alpha y''+\beta y'+\gamma y = \delta$ (sous forme non résolue où α, β, γ polynomiales et δ est DSE. On cherche des solutions DSE de la façon suivante : si $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est solution sur $]-R, R[$ rayon de convergence > 0. On évalue le coefficient de t^n de $\alpha y''+\beta y'+\gamma y$ et par unicité du DSE on identifie le coefficient de t^n à celui de t^n de δ. On obtient une relation de récurrence sur (a_n). On évalue au moyen de cette relation le rayon de convergence R_0 de cette série entière puis en mentionnant qu'on peut remonter les calculs,

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ est solution sur }]-R_0; R_0[$$

Le TCL s'applique seulement sur un intervalle que lequel $\alpha(t) \neq 0$, sur I il suffit de connaître $f(t_0)$ et $f'(t_0)$ pour déterminer une solution

Exemple

$y'' + \frac{2}{t} y' + y = 0$ EDLH2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, le TCL s'applique sur I :

$$y'' + \frac{2}{t} y' + y = 0 \Leftrightarrow ty'' + 2y' + ty = 0$$

Si $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est solution

$tf(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n$

$2f'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) a_{n+1} t^n$

$tf''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} t^n$

De plus $tf''(t) + 2f'(t) + tf(t) = 0$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+1} + a_{n-1}] t^n + a_1 = 0$$

Par unicité de DSE, sur $t \in]-R, R[, a_1 = 0$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{-an - 1}{(n+1)(n+2)}$$

Par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_0$, $R = +\infty$, si $a_0 = 1, f(t) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}t^{2p} = \frac{\sin t}{t} = \text{sinc}(t)$ est solution en remontant les calculs

Remarque

Cette méthode permet de monter que par unicité dans le TCL, une certaine fonction f est DSE : on montre que f est solution d'une ED du type précédant, on vérifie qu'il existe f_1 DSE solution sur $]-R;R[/ \begin{cases} f_1(0) = f(0) \\ f_1'(0) = f'(0) \end{cases}$ Par unicité $f = f_1$ sur $]-R,R[$

Cas où les coefficients sont constants

Soit $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ alors on résout l'équation caractéristique $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, les solutions sur $\mathbb{C}$ sont

1. Si $x^2 + \alpha x + \beta == (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ alors
$$y(t) = Ae^{i\lambda_1} + Be^{i\lambda_2}/(A,B) \in \mathbb{C}^2$$
2. Si $x^2 + \alpha x + \beta = (x - \lambda_0)^2$ alors
$$y(t) = (A + Bt)e^{\lambda_0 t}/(A,B) \in \mathbb{C}^2$$

Recherche d'une base de solution lorsqu'on connait une solution qui ne s'annule pas

Soit $y'' + py' + qy = 0$ avec $p, q : I \to \mathbb{K}$ continues. On suppose qu'on connaît une solution φ_1 sur $I' \subset I/\varphi_1$ ne s'annule pas sur I'. On recherche alors une solution φ sur I' indépendante de φ_1, i.e $\varphi_2(t) = \lambda(t)\varphi_1(t)$ avec $\lambda : I' \to \mathbb{K}\mathcal{C}^2$ non constante. Il vient

$$\begin{cases} \varphi_2' & = \lambda'\varphi_1 + \lambda\varphi_1' \\ \varphi_2'' = \lambda\varphi_1'' + 2\lambda'\varphi_1' + \lambda''\varphi_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2'' + p\varphi_2' + q\varphi_2 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \lambda(\varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1) + \lambda'(p\varphi_1 + 2\varphi_1') + \lambda''\varphi_1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda'(p\varphi_1 + 2\varphi_1') + \lambda''\varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

qui est une EDL1 en λ', on sait la résoudre, reste à calculer une primitive de λ' pour obtenir λ. Finalement (φ_1, φ_2) est une base de solution sur I

Exemple

Soit $y'' + \frac{2}{t}y' + y = 0$ qu'on résout sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. On sait que $\varphi_1(t) = \text{sinc}(t)$ est solution. On choisit, $k \in \mathbb{Z}, I' =]k\pi; (k+1)\pi[$. Ce qui précède s'applique :

$$\lambda'(t) = \frac{C}{\text{sinc}(t)^2} \times \frac{1}{t^2} = \frac{C}{\sin(t)^2}$$

On choisit $C = -1$ et $\lambda(t) = \text{cotan}(t)$. On obtient $\varphi_2(t) = \frac{\cos t}{t}$ qui se prolonge par continuité sur I en une fonction solution. Finalement $(\varphi_(t) = \text{sinc}(t), \varphi_2(t) = \frac{\cos t}{t})$ forme une base de solutions sur I

Utilisation de Cauchy-Lipschitz

Pour montrer qu'une solution f d'une EDL est paire, impaire, T-périodique, il suffit de vérifier que $x \mapsto f(-x)$ (resp. $x \mapsto f(x+T)$) vérifie le même problème de Cauchy que f. Par unicité on peut conclure

14.2.2 Variations des constantes à l'ordre 2

Méthode

Soit $y'' + py' + qy = b$ avec $p, q, b : I \to \mathbb{K}$ continues. On suppose qu'on connaît une base de solution (φ_1, φ_2) sur I. Rappelons que $\forall t \in I, \Theta_t$ est un isomorphisme, soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})^2 / \forall t \in I$

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = \lambda_1(t) \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} + \lambda_2(t) \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi & = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \\ \varphi' & = \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi & = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \\ 0 & = \lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 \end{cases}$$

Il vient $\begin{cases} \varphi' & = \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' \\ \varphi'' & = \lambda_1\varphi_1'' + \lambda_2\varphi_2'' + \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' \end{cases}$ $\varphi'' + p\varphi' + q\varphi = \lambda_1(\varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1) + \lambda_2(\varphi_2'' + p\varphi_2' + q\varphi_2) + \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' = \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2'$

φ solution sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 & = 0 \\ \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' & = b \end{cases}$ est un système de Cramer $\forall t \in I$, car $W_{\varphi_1, \varphi_2} \neq 0$, on le résout et on intègre. On obtient la solution de l'équation homogène aux constantes de primitivation près

Exemple

$y'' + y = \frac{1}{t}$, on résout sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. $(\sin, \cos)$ est une base de solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$. On cherche les solutions générales sur I sont sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi & = \lambda \sin t + \mu \cos t \\ 0 & = \lambda' \sin t + \mu' \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' \sin t + \mu' \cos t & = 0 \\ \lambda' \cos t - \mu' \sin t = \frac{1}{t} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \lambda'(t) = \frac{\cos t}{t} \text{ et } \mu'(t) = -\frac{\sin t}{t}$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in I, \lambda = -\int_t^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \lambda \text{ et } \mu(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \mu$$

d'où la solution générale sur I :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= -\sin t\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du+\cos t\int_t^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du+\lambda\sin t+\mu\cos t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u-t)}{u}du+\lambda\sin t+\mu\cos t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v+t}dv+\lambda\sin t+\mu\cos t\end{aligned}$$

Notons que pour $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$, continue sur $\mathbb{R}_+$ car $|\frac{e^{-xt}}{1+x^2}|\leq\frac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+,\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*,|\frac{-xe^{-xt}}{1+x^2}|\leq\frac{xe^{-ax}}{1+x^2},\ |\frac{x^2e^{-xt}}{1+x^2}|\leq\frac{x^2e^{-ax}}{1+x^2}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$
$\forall t>0, F''(t)+F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}dx=\frac{1}{t}$. De plus, $|F(t)|\leq\int_0^{+\infty}e^{-xt}dx=\frac{1}{t}$, donc $\lim\limits_{t\to 0}F(t)=0$.
D'après ce qui précède, $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\forall t>0$

$$\begin{aligned}F(t) &= -\sin t\int_t^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du+\cos t\int_t^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du+\lambda\sin t+\mu\cos t\\ &= -\sin t\int_t^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du+\cos t\int_t^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sin(t+\varphi)\end{aligned}$$

Il en résulte $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sin(t+\varphi)=0\Rightarrow\lambda=\mu=0$, donc

$$F(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

Par continuité de F en 0,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=F(0)=\frac{\pi}{2}$$

14.2.3 Problème de raccord

Position du problème

Soit une EDL sous une forme non résolue

$$\alpha(t)y''+\beta(t)y'+\gamma(t)y=\delta(t)$$

avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta : I\to\mathbb{K}$ continues. Formons $\begin{array}{rccc}V & : & \mathcal{C}^2(I,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})\\ & & \varphi & \mapsto & \alpha\varphi''+\beta\varphi'+\gamma\varphi\end{array}$ linéaire, $\varphi\in\mathcal{S}_{(1),I}\Leftrightarrow V(\varphi)=\delta$. Si il existe une solution φ_1 sur I, on a

$$\mathcal{S}_{(1),I}=\varphi_1+Ker(V)$$

On n'est même pas sur de l'existence d'une solution, par ailleurs, on ne connait pas a priori $\dim Ker(V)$

Exemple

$\alpha=\beta=\gamma=0$ et $\delta=1,\mathcal{S}_{(1),I}=\emptyset,\ \mathcal{S}_{(H),I}=\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\dim Ker(V)=+\infty$

Méthode générale

Sur un intervalle $I' \subset I$ sur lequel α ne s'annule pas

$$\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t) \Leftrightarrow y'' + \frac{\beta}{\alpha}y' + \frac{\gamma}{\alpha}y = \frac{\delta}{\alpha}$$

On peut appliquer le TCL et tout ce qui précède sur I puis on effectue les raccords aux points où α s'annule de façon à obtenir une solution $\mathcal{C}^2$ ($\mathcal{C}^1$ à l'ordre 1)

Exemples

1. $ty' + y = 0 (E_1)$, $ty' - y = 0 (E_{-1})$, $ty' - 2y = 0 (E_{-2})$. Notons que 0 est solution maximale sur $^{\mathbb{R}}$. Soit $I' = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$

$$(E_k) \text{ sur } I' \Leftrightarrow y' + \frac{k}{t}y = 0 \Leftrightarrow y(t) = \frac{C}{|t|^k}$$

$k = 1$ $y = \frac{C}{t}$ sur I' non prolongeable en 0 si $C \neq 0$

$k = -1$ $y(t) = Ct$ sur I'. Si y est solution sur $\mathbb{R}, \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \forall t > 0, y(t) = C_1 t \\ \forall t < 0, y(t) = C_2 t \end{cases}$ y y étant $\mathcal{C}^1, C_1 = C_2$

$k = -2$ si y est solution sur $\mathbb{R}/\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \forall t > 0, y(t) = C_1 t^2 \\ \forall t < 0, y(t) = C_2 t^2 \end{cases}$ $\forall (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, on obtient un raccord $\mathcal{C}^1, 0$

2. $ty'' + 2y' + ty = 0$ sur $I' = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

$$ty'' + 2y' + ty = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{2}{t}y' + y = 0$$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4 / \forall t > 0, y(t) = \lambda_1 \frac{\sin t}{t} + \mu_1 \frac{\cos t}{t}, \forall t < 0, \lambda_2 \frac{\sin t}{t} + \mu_2 \frac{\cos t}{t}$
La continuité en 0 impose $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et sinc est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $\{\lambda \text{sinc} / \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\dim \mathcal{S}_{(H),I} = 1$

14.2.4 Équations différentielles non linéaires (HP)

Toute les équations différentielles ne sont pas linéaires. Il n'existe pas de méthode générale pour les résoudre. Il existe cependant des méthodes permettant de les résoudre dans des cas particulier ou bien de manière approchée. On fait ici quelques rappels d'exemples étudiés en première année

Équation à variable séparée

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$y'b(y) = a(t)$$

avec $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Pour résoudre cette équation on considère A une primitive de a et B une primitive de b sur I, alors :

$$y'b(y) = a(t) \Leftrightarrow B(y) = A(t) + \lambda / \lambda \in \mathbb{R}$$

On considère J intervalle $\subset I$ sur lequel $B(t)$ est bijective, dans ce cas on considère sa bijection réciproque $B^{-1}(t)$ et

$$y(t) = B^{-1}(A(t) + \lambda)$$

Équation de Bernoulli

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$y' = a(t)y^\lambda + b(t)y$$

avec a et b continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. La fonction nulle est solution. S'il existe une solution y non constamment nulle, alors il doit exister un intervalle J sur lequel y ne s'annule pas, sur un tel intervalle y est de signe constant, on peut donc faire le changement de fonction $y = \varepsilon z^\alpha$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de y, l'équation devient alors :

$$\alpha z' = b(t)z + a(t)z^{\alpha(\lambda - 1) + 1}$$

en prenant $\alpha = \frac{1}{1-\lambda}$, on a une équation différentielle linéaire du premier ordre, on sait donc la résoudre.

Équation de Riccati

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

avec a, b, c des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

1. On cherche une solution particulière y_1
2. On pose $y = y_1 + z, z$ est alors une solution d'une équation de Bernoulli

Équation d'Euler

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$t^2y'' + aty' + by = 0$$

avec a, b deux constantes réelles. La fonction nulle est solution et si $x \mapsto y(x)$ est solution alors $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution, donc on peut supposer $x > 0$. On effectue les changements de variables suivants : $t = \ln x, z(t) = y(e^t)$, d'où $y(x) = z(\ln(x))$. On se ramène alors à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants d'inconnue z

14.3 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

14.3.1 Résolution générale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continue. On considère l'équation

$$Y' = AY + B$$

d'équation homogène associée :

$$Y' = AY$$

Théorème

Rappelons que $\varphi \begin{array}{ccc} : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & t & \mapsto & \exp(tA) \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$

Preuve : Si on pose $f_k(t) = t^k \frac{A^k}{k!}$ est $\mathcal{C}^\infty, \forall R \geq 0, \forall t \in [-R; R]$

$$\|f_k(t)\| = \|\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k\| \leq \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}\|A\|^k$$

terme général d'une SATP convergente (règle de d'Alembert)

Théorème de résolution

Soit $Y : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} Y \in \mathcal{S}_{(1),I} \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \exp(-tA)(Y'(t) - AY(t)) = \exp(-tA)B(t) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\exp(-tA)Y(t)) = \exp(-tA)B(t) \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t_0 \in I \text{ fixé }, \exists Y_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{K}) / \forall t \in I, \\ & \qquad Y(t) = \exp(tA)\int_{t_0}^t \exp(-uA)B(u)du + \exp(tA)Y_1 \end{aligned}$$

Théorème

1. La solution générale sur I est $t \mapsto Y(t) = \exp(tA)(\int_{t_0}^t \exp(-uA)B(u)du + Y_1)$ où $Y_1 \in \mathbb{K}^n$
2. $\dim \mathcal{S}_{(H),\mathbb{R}} = n$

14.3.2 Résolution pratique

Changement de base

Soit $Y' = AY + B$ et $P \in GL_n(\mathbb{R}), A_1 = P^{-1}AP, B_1 = P^{-1}B$. Soit $Y : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathcal{C}^1$ et $Y^{-1}(t) = P^{-1}Y(t)$

$$\begin{aligned} Y \in \mathcal{S}_{(1),I} &\Leftrightarrow \forall t \in I, Y'(t) = AY(t) + B(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, P^{-1}Y'(t) = P^{-1}APY_1(t) + P^{-1}B(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, Y_1(t) = A_1Y_1(t) + B_1(t) \end{aligned}$$

On la résout et on reporte avec $Y(t) = PY_1(t)$

Cas où A est diagonalisable

Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})/A_1 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$

Si $Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ et $Y_1(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}, B_1(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_n(t) \end{pmatrix}$. L'équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \xi'_1(t) \\ \vdots \\ \xi'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_n(t) \end{pmatrix}$$

$\forall i \in [|1;n|], \xi'_i(t) = \alpha_i\xi_i(t) + \beta_i(t)$, on a n équations indépendantes, $\xi_i(t)$ est de la forme $\lambda_i(t)e^{t\alpha_i}$ avec $\lambda'_i(t)e^{t\alpha_i} = \beta_i(t)$. Puis $Y = PY_1$

Cas où A est trigonalisable

L'équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \xi'_1(t) \\ \vdots \\ \xi'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_n(t) \end{pmatrix}$$

qu'on résout de proche en proche à partir de la dernière et en reportant progressivement

Exemples

1. $\begin{cases} x' &= 5x - 2y + t \\ y' &= -x + 6y \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$
$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda - 7)(\lambda - 4)$, A est diagonalisable sur A. On recherche une base

de vecteurs propres

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_1 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{t}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

$$\begin{aligned} X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ est solution sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad X_1 = P^{-1}X \text{ solution de } \begin{cases} x_1' &= 7x_1 + \frac{t}{3} \\ y_1' &= 4y_1 + \frac{t}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x_1(t) &= \lambda e^{7t} + \frac{t-1}{21} \\ y_1(t) &= \mu e^{4t} + \frac{t-1}{12} \end{cases} \end{aligned}$$

2. $\begin{cases} x'' &= x + y \\ y'' &= -x + 3y \end{cases}$ $X'' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
   $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. A est trigonalisable, on cherche un vecteur propre et on complète de sorte à obtenir une base adaptée

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X_1(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X \text{ solution sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad X_1'' = A_1 X_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1'' &= 2x_1 - y_1 \\ y_1'' &= 2y_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) &= \lambda e^{\sqrt{2}t} + \mu e^{-\sqrt{2}t} \\ x_1''(t) &= 2x_1(t) - \lambda e^{\sqrt{2}t} - \mu e^{-\sqrt{2}t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) &= \lambda e^{\sqrt{2}t} + \mu e^{-\sqrt{2}t} \\ y_1(t) &= \alpha e^{\sqrt{2}t} + \beta e^{-\sqrt{2}t} + y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

On cherche la solution particulière y_0 soit par la méthode de variation des constantes ou bien en utilisant le principe de superposition étudié en première année : si le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ avec P polynôme alors la solution particulière est de la forme $Q(t)e^{\lambda t}$ avec Q un polynôme, ici

$$y_1(t) = \alpha e^{\sqrt{2}t} + \beta e^{-\sqrt{2}t} + \frac{t}{\sqrt{2}} \mathrm{ch}(\sqrt{2}t)$$

Remarque

Si la dérivée première en même temps que la dérivée seconde et la fonction alors on peut écrire,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

14.3.3 Cas général d'une équation linéaire à coefficients constants

Méthode générale

Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et l'équation scalaire d'ordre n à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$$

$\dim \mathcal{S}_{(H),\mathbb{R}} = n, \varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{K}) \in \mathcal{S}_{(H),\mathbb{R}}$ si et seulement si $Y_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{(H'),\mathbb{R}}$ avec

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} Y = AY$$

A est la transposée de la matrice compagnon de $P(X) = X^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i} = \chi_{{}^tA} = \chi_A$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}, m_i \geq 1$
On dunfordise, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})/$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I_{m_i} + N_i$$

avec N_i est nilpotent

$$\exp(tA) = Q \begin{pmatrix} \exp(tB_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(tB_r) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$\forall i \in [|1,r|], \exp(tB_i) = \exp(t\lambda_i I_{m_i} + tN_i) = e^{t\lambda_i}(I_{m_i} + tN_i + ... + \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}N_i^{m_i-1})$ En reportant, on obtient, $Y(t) = e^{tA}Y_0$ et $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{r} P_i(t)e^{t\lambda_i}, \deg(P_i) \leq m_i - 1$

Cas de la dimension 2

$$y'' + ay' + by = 0$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \chi_A = X^2 + aX + b$
$\Delta > 0\ : \chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$

$$y = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}/(A,B) \in \mathbb{R}^2$$

$\Delta = 0$: $\chi_A = (X-\lambda_0)^2$, A n'est pas diagonalisable, mais semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ = \lambda_0 I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I_2 + N$

$\exp(tA) = Q\exp(tA_1)Q^{-1} = Q(e^{\lambda_0 t}(I_2 + tN))Q^{-1}$, d'où

$$y(t) = (A+Bt)e^{\lambda_0 t} / (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

$\Delta < 0$: on diagonalise dans $\mathbb{C}$ et on prend la partie réelle par linéarité, $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$. Ainsi dans $\mathbb{C}$:

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} / (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Dans $\mathbb{R}$, on note $\Omega_1 = Re(\lambda_1)$ et $\Omega_2 = Re(\lambda_2)$

$$y(t) = A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_2 t) / (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque

Soit $y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t}$. $X^2 + aX + b = (X-\lambda)(X-\mu), \lambda \neq \mu \neq \alpha$. D'après la méthode de la variation des constantes, la solution générale est de la forme :

$$\begin{cases} y = \xi(t)e^{\lambda t} + \zeta(t)e^{\mu t} \\ \xi' e^{\lambda t} + \zeta' e^{\mu t} = 0 \\ \xi' \lambda e^{\lambda t} + \mu \zeta' e^{\mu t} = P(t)e^{\alpha t} \end{cases}$$

$\xi' = \frac{P(t)}{\mu - \lambda} e^{\alpha t}$, on fait $\deg P$ intégration par parties

$$\xi(t) = Q(t)e^{\alpha t}, \deg Q = \deg P$$

* *
*

FIN