Exercices sur les Matrices

1)*(Ce) Soit A l'ensemble des $M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix}$ quand (x,y,z) décrit $\mathbb{R}^3$.

Quelles sont les $M(x,y,z)$ inversibles ? Calculer l'inverse quand elle existe.

2)**(Mi) [Matrices en damier] Montrer que l'ensemble des matrices $(a_{ij}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $a_{ij} = 0$ si $i+j$ est impair est une sous-algèbre (i.e. sous-espace vetoriel et stable par x) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; calculer sa dimension, montrer qu'elle est isomorphe à $\mathcal{M}_{E(n/2)}(K) \times \mathcal{M}_{E(n+1/2)}(K)$. Si A est en damier inversible, que peut-on dire de A^{-1} ?

3)**(Mi) Soit X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi(Y) = XY - YX$, et la suite de sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par: $\mathcal{E}_0 = \{0\}; \mathcal{E}_{n+1} = \Phi^{-1}(\mathcal{E}_n)$. Montrer que c'est une suite croissante, et stationnaire, de sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{E}_\infty$ leur union. Montrer que si X est diagonalisable, avec n valeurs propres distinctes [i.e. semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts], alors $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_\infty$. Enfin, montrer que $\mathcal{E}_\infty$ est une sous-algèbre (sous-espace vectorie stable par x) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *Indication: si $Y \in \mathcal{E}_i, Z \in \mathcal{E}_j$ alors où est YZ ?*

4)**(Ce) Soit E l'espace des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les formes suivantes soient nulles (où $i-k$ est compté modulo n): $c_k(A) = \sum_i a_{ik} \quad s_{ij}(A) = a_{ij} + a_{ji} \quad d_k(A) = \sum_i a_{i,i-k+1}$ Calculer la dimension de E, en supposant que n est pair.

5)**(Ce) Soit $n \geqslant 2$, soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par la multiplication matricielle.

a) On suppose que $I_n \notin H$: montrer que si $M^2 \in H$, alors $M \in H$ et en déduire une contradiction (utiliser les matrices $E_{i,j}$).

b) On se place dans le cas $n = 2$: montrer que H est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

c) H peut-elle être une algèbre commutative ?

6)***(Ul) [Décomposition de Bruhat]

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$; montrer qu'il existe une unique matrice de permutation P_σ et deux matrices triangulaires supérieures T et T' telles que $A = TP_\sigma T'$. A-t-on unicité de T et T' ?

7)***(Ul) [Réduction dans $SL_n(\mathbb{Z})$]

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$ premiers entre eux (dans leur ensemble). Montrer qu'il existe une matrice carre $P \in SL_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est $(a_1, .., a_n)$.

b) Soit $A \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $P \in SL_p(\mathbb{Z})$ et $Q \in SL_q(\mathbb{Z})$ telles que PAQ soit de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où D est une matrice diagonale $diag(d_1, ..., d_r)$, avec les d_i entiers relatifs tels que $d_1 | ... | d_r$. Montrer enfin que r et les $|d_i|$ sont univoquement détreminés par A.

8)**(Sa) Soit $(A,B) \in M_n(K)$, et $f_A (resp. g_A)$ de $M_n(K)$ dans lui-même (resp. dans K) définies par : $\forall M \in_n (K), f_A(M) = AM - MA$ (resp. $g_A(M) = tr(AM)$.

a) Montrer que $A \to g_A$ est un isomorphisme de $M_n(K)$ sur l'espace vectoriel des formes linéaires sur $M_n(K)$.

b) Montrer que si A est nilpotente, alors $\mathrm{Ker}(f_A) \subset \mathrm{Ker}(g_A)$.

c) Etablir que A est nilpotente ssi $\exists B \in M_n(K), A = BA - AB$.

9)**(Ly) Soient $(A,B,C) \in SL_2(\mathbb{R})^3$. On suppose que $A \neq I_2, A \neq -I_2$, $AB = BA$ et $AC = CA$. Montrer que $BC = CB$.

10)***(SS)oit $(A,B) \in SL_2(\mathbb{C})^2$. Montrer que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \exists (P_n, Q_{n,m}) \in \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X,Y,Z]$ tels que $tr(A^n) = P_n(tr(A))$ et $tr(A^n B^m) = Q_{n,m}(tr(A), tr(B), tr(AB))$.

11)*(Ce) Calculer le déterminant et la trace de la transposition en tant qu'endomorphisme de $M_n(K)$.

12)***(Ul) Soit K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, et n $\in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que deux transvections sont conjuguées dans $GL_n(K)$.

b) Pour $(M,N) \in Gl_n(K)^2$, on note $[M,N] = MNM^{-1}N^{-1}$ (commutateur de (M,N)). Déterminer le sous-groupe de $GL_n(K)$ engendré par les commutateurs.

c) Soit f un morphisme de groupes de $GL_n(K)$ dans $(K^*, \times)$. Montrer qu'il existe un morphisme g de $(K^*, \times)$ dans $(K^*, \times)$ tel que $f = g \circ dét$.

13)***(Mi) Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est de trace nulle si et seulement si elle st semblable à une matrice de diagonale nuelle si et suelement si $\exists (M,N) \in M_n(\mathbb{C})^2$ tels que $A = MN - NM$.

14)***(XX) Soit $A \in M_n(K)$ nilpotente, et $r \in \mathbb{N}, r \geqslant 2$.

a) Montrer que $A^n = 0$.

b) Etablir qu'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que, au voisinage de 0 : $(P(x))^r = 1 + x + o(x^r)$. (On pourra écrire le DL à l'ordre r en 0 de $(1+x)^{1/r}$.)

c) Montrer que $\exists B \in M_n(K), B^r = A + I_n$ et B est un polynôme en A.

15)**(Mi) Pour $A \in_n (K)$, exprimer le rang de la comatrice de A en distinguant selon que A est inversible, de rang $n-1$ ou de rang $\leqslant n-2$.

16)*(Ce) Quelles sont les formes linéaires f sur $M_n(K)$ telle sque $\forall (A,B) \in M_n(K)^2, f(AB) = f(BA)$?

17)**(XX) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_1, ..., A_{2^n-1}\}$ un eénumération des parties non vides de $\{1, ..., n\}$. Soit A la matrice carrée de taille $2^n - 1$ dont le coefficient $a_{i,j}$ sur la i-ème ligne et j-ème colonne vaut 1 si $A_i \cap A_j$ est non vide, et 0 sinon. Calculer $dét(A)$.

18)**(Ly) Pour $n \geqslant 1$, on note d_n le nombre de permutations de $\{1, ..., n\}$ sans point fixe.

a) Exprimer $n!$ comme combinaison linéaire des $(d_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

b) En déduire d_n.

c) Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation de $\{1, ..., n\}$ n'ait pas de point fixe. Evaluer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

19)**(Ce) Soit, pour $n \geqslant 1, P_n = X^n - X + 1$.

a) Prouver que P_n possède n racines distinctes $z_1, ..., z_n$ sur $\mathbb{C}$.

b) Calculer le déterminant de la matrice $I_n + diag(z_1, ..., z_n)$.

20)**(Mi) Soit $(a,b,c) \in K^3$ et $n \geqslant 2$. Calculer le

déterminant de la matrice de taille n comportant des a sur la diagonale, des b (resp. c) strictement au-dessus (resp. en dessous).

21)*(XX) Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

22)*(MS) oit $A \in \mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{42}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, telles que:

$ABC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer CAB

(on montrera que $CAB \in GL_2(\mathbb{R})$). Montrer que $(BCA)^2 = BCA$.

23)**(Ce) Soient $x_1, \dots, x_n$ des scalaires et $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 1 + \delta_{ij} x_i$. Rang et inverse si possible.

24)**(Sa) Caractériser M inversible telle que M et M^{-1} aient des coefficients entiers positifs (dans $\mathbb{N}$).

25)***(Ly) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (à coefficients entiers, inversible et inverse à coefficients entiers). Montrer que parmi les coefficients de M il y a au moins n et au plus $n^2 - n + 1$ coefficients impairs, et que ces bornes sont atteintes.

26)***(Ly) Soit M une matrice symétrique, inversible, à coefficients strictement positifs. Montrer que parmi les coefficients de M^{-1} il y a au plus n^2-2n coefficients nuls, et que cette borne est atteinte avec $A=(a_{ij})$ telle que: $a_{ij}=\dfrac{3+(-1)^{\mathrm{Max}(i,j)}}{2}$ *(dont il faudra calculer l'inverse !)*

27)*(Mi) [Matrice de Van Der Monde] Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et la matrice de taille n: $A=(a_{pq})$ où $a_{pq}=e^{2i\pi(p-1)(q-1)/n}$. Calculer A^2, $A\bar{A}$ et A^{-1}.

28)*(Mi) A quelle condition sur A et B (matrices carrées de même taille) la matrice: $\begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

29)**(Mi) Soient A et B deux matrices réelles de taille n, telles que: A est inversible, B^5 est nulle, A et B commutent. Montrer que $A+B$ est inversible et calculer son inverse. *Indication: voir $A^{-1}B$ qui est nilpotente.*

30)**(XX) Soient $(x_1,\dots,x_n)$, $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que les a_i soient deux à deux distincts, ainsi que les b_j, et qu'aucune somme a_i+b_j ne soit nulle.

a) Établir l'identité:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i+t}=\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{r=1}^{n}\frac{a_r+b_j}{a_r+t}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{a_k+b_j}\right)\left(\prod_{r=1}^{n}\frac{b_r-t}{b_r-b_j}\right).$$

Indication: interpolation de Lagrange et éléments simples.

b) Déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)$.

c) Montrer que la matrice de Hilbert (coefficient $\dfrac{1}{i+j-1}$) a une inverse à coefficients entiers.

31)*(XX) Soit $S_j=X^j(1-X)^{n-j}$ pour $0\leqslant j\leqslant n$. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$; donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à cette base et l'inverser.

32)*(Ce) Soit M la matrice dont le terme (i,j) est 1 si $j|i$ et 0 sinon. Montrer que M est inversible. Quel est son inverse? Calculer les puissances positives et négatives de M.

33)*(XX) [Matrices à diagonale dominante] Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A possède une *dominance diagonale stricte* si l'on a pour tout i: $|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|>0$. Montrer que la dominance diagonale stricte entraîne l'inversibilité. *Remarque: exercice ultra-classique et bouche-trou.*

34)**(Mi) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et f une application linéaire de E dans F. Montrer que f est décomposable en somme de k applications linéaires de rang 1 si, et seulement si $k\geqslant \mathrm{rg}(f)$. *Indication: on peut utiliser la notion de produit tensoriel d'un vecteur et d'une forme linéaire, ou aussi des matrices (matrices équivalentes, pivot).*

35)***(XX) Soit $0\leqslant p\leqslant n$ des entiers. Soit V un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé de matrices de rang inférieur ou égal à p. Montrer que $\dim V\leqslant np$. Est-ce la meilleure majoration possible? *Indication: se ramener au cas où V contient une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

36)***(XX) Soit une application $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non constante et telle que $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB)=f(A)f(B)$. Trouver l'ensemble des matrices M telles que $f(M)=0$.

37)**(Ly) [Dominance diagonale] Montrer que la dominance diagonale stricte est préservée par l'algorithme du pivot (n'importe lequel, standard ou modifié, Gauss ou Jordan), c'est-à-dire que si la matrice initiale (carrée) possède cette dominance, à chaque étape la matrice obtenue la possède aussi.

38)**(Ul) Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, k décrivant $\mathbb{C}^*$.

39)**(XX) [Décomposition LU] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur sous-matrices carrées de A pour que l'on puisse écrire $A=LU$, où L est triangulaire inférieure, ayant des 1 sur la diagonale, et U triangulaire supérieure à coefficients diagonaux inversibles. *Indication: les k sous-matrices $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ doivent être inversibles. Utiliser des restrictions. Noter le lien avec la méthode du pivot.*

40)*(Ce) Système sur $\mathbb{C}$: $\begin{cases} (\alpha+\beta)x_1+\beta x_2=0 \\ \alpha x_1+(\alpha+\beta)x_2+\beta x_3=0 \\ \dots \\ \alpha x_{n-2}+(\alpha+\beta)x_{n-1}+\beta x_n=0 \\ \alpha x_{n-1}+(\alpha+\beta)x_n=0 \end{cases}$

41)*(Ce) Défi: résoudre le système suivant en moins de 5 minutes. ù$\begin{cases} x+2y+z &= 8 \\ y+3z+t &= 15 \\ 4x+z+t &= 11 \\ x+y+5t &= 23 \end{cases}$

42)**(Ce) Soient un espace vectoriel E de dimension n, et $f\in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$, et g un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que $f+g$ est inversible si, et seulement si: $\mathrm{tr}(g\circ f^{-1})\neq -1$

43)**(Ce) **a**) Soit une forme linéaire f sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice A unique telle que pour toute matrice M on ait $f(M)=\mathrm{tr}(AM)$, et que l'application $f\mapsto A$ est un isomorphisme de E sur E^*, espace dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

c) Montrer que toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(AB)=f(BA)$ pour toutes matrices A et B inversibles est proportionnelle à la trace.

44)***(Mi) Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$. On note $F=\{x\in V\ /\ \forall\alpha\in G, \alpha(x)=x\}$. Montrer que $\sum\limits_{\alpha\in G}\mathrm{tr}(\alpha)=\mathrm{Card}\, G\dim F$. Exemples à étudier: groupe diédral agissant sur une pyramide à base régulière; groupe des matrices de permutation. *Indication: Que dire de la moyenne des éléments de G ?*

45)**(Ce) **a**) Soit $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, telle qu'on puisse écrire $A=B^{-1}B^*$ (B^* étant la transposée de la conjuguée de B). Montrer que A^{-1} est semblable à A^*.

b) Réciproquement, on suppose qu'il existe P inversible, telle que $A^{-1}=PA^*P^{-1}$. Montrer qu'il existe H telle que $H=H^*$ (hermitienne) telle que $A^{-1}=HA^*H^{-1}$, et en déduire une décomposition de la forme $A=B^{-1}B^*$. *Indication: B sera une combinaison linéaire de H^{-1} et de A^*H^{-1}.*

c) L'étude faite peut-elle s'adapter au corps de base $\mathbb{R}$?

46)*(Mi) Soit E un plan vectoriel, et $u\in\mathcal{L}(E)$. Existe-t-il une base B de E dans laquelle u ait une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$?

Dans ce cas, montrer que a et b sont indépendants du choix d'une telle base. En déduire que, pour tout $(x,y)\in K^2$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

47)**(XX) On considérera dans cet exercice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit alors E un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par l'application $M\longmapsto \mathrm{Re}(M)$. Si E rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En conclure que si $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont conjuguées par le groupe unitaire, elles le sont par le groupe orthogonal.

48)***(Sa) A est une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de A est appelé le commutant de A, et noté $C(A)$. Le bicommutant est $C(C(A))$.

a) Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $A\subset C(C(A))$.

b) Montrer que $C(\{M\})$ contient l'ensemble des polynômes en M. Montrer si A est la sous-algèbre des polynômes en M (notée $K[M]$), alors $C(A)=C(\{M\})$.

49)**(XX) Soit A et B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $Y=ABA^{-1}B^{-1}$. On suppose que Y commute avec A et B. Montrer que A et B commutent ou anticommutent.

50)**(XX) Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tel que $\lambda AB+A+B=0$. Montrer qu'elles commutent. *Indication: discuter selon que A est inversible ou non.*

51)**(Mi) [Commutation avec une nilpotente]

Déterminer la dimension du commutant $\mathcal{C} = \{X/XA = AX\}$ pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$; puis celle de l'anticommutant $\mathcal{C}' = \{X/XA = -AX\}$. *Réponse: $\mathcal{C}$ est l'ensemble des polynômes en A, et $\mathcal{C}'$ s'en déduit lorsqu'on en connaî t au moins un élément.* Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ 0 & & & & 0 & \end{pmatrix}$.

52)*(Ce) Soit J la matrice de taille n dont tous les coefficients sont 1. Décrire le commutant de J, calculer sa dimension.

53)**(Ce) Déterminant le commutant et le bicommutant de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

54)***(XX) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il existe un scalaire λ tel que: $AB = \lambda BA$. Déterminer A. *Indication: on peut essayer pour B des matrices diagonales ou presque.*

55)**(Ce) [Matrice de Van der Monde] Soit $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$, et $A = (a_{pq})$, avec $a_{pq} = \omega^{pq}$.

a) Calculer $\det(A)$. *Indication: La formule de V.D.M. peut donner l'argument mais pour le module il est préférable d'examiner A^2 et $A\overline{A}$.*

56)**(Ce) [Comatrice] On note $\tilde{A}$ la transposée de la comatrice d'une matrice A. Calculer le déterminant et le rang de $\tilde{A}$; montrer que si X est vecteur propre de A, il l'est aussi de $\tilde{A}$. Montrer que si A et B sont équivalentes, $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ le sont aussi. Que dire de $\mathrm{tr}(\tilde{A})$ et $\mathrm{tr}(\tilde{B})$? Calculer $\tilde{\tilde{A}}$.

57)*(Mi) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminants premiers entre eux. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

58)*(Mi) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = |i - j|$. Calculer $\det(A)$.

59)**(Mi) Soient deux matrices A, A' carrées complexes.

a) A quelle condition existe-t-il une matrice B telle que $AB = A + B$?

b) A quelle condition existe-t-il une matrice B telle que $AB = A' + B$?

60)***(XX) [Matrices stochastiques] Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} > 0$ et $\sum\limits_j a_{ij} = 1$ pour tout i. On pose $A^p = (a_{ij}^{(p)})$.

a) Montrer que A^p a les mêmes qualités que A.

b) Soit $M_j^{(p)} = \operatorname*{Max}\limits_i a_{ij}^{(p)}$ et $m_j^{(p)} = \operatorname*{Min}\limits_i a_{ij}^{(p)}$. Etudier la monotonie des suites $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$.

c) On pose $\alpha = \operatorname*{Min}\limits_{i,j} a_{ij}$. Montrer que

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leqslant (1 - 2\alpha)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) .$$

d) Montrer que la suite (A^p) converge vers une matrice B que l'on explicitera ou dont on donnera les qualités.