Exercices sur la réduction des endomorphismes

1)**(C08) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A et B deux éléments de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall X \in E, f(X) = AX$.

a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.

b) Même étude avec $g(X) = XB$.

c) Soient $(X_1, ..., X_n), (Y_1, ..., Y_n)$ deux bases de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $(X_i^t Y_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de E.

d) On suppose A et B diagonalisables ; montrer que l'endomorphisme de E défini par $h(X) = AXB$ l'est aussi. A-t-on une réciproque ?

2)***(E07) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$; on leur associe l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(K)$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(K), \phi(M) = AM - MB$. Déterminer le spectre de ϕ en fonction de ceux de A et B.

3)**(M05) Déterminer l'adhérence, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de l'ensemble des matrices trigonalisables.

4)**(L10) Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectorel de dimension d ;

a) Pour $f \in \mathcal{L}(V)$, montrer que la suite $(rg(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite notée $r(f)$.

b) Montrer que si f et g commutent, alors $r(f+g) \leqslant r(f) + r(g)$. Cela reste-t-il vrai dans le cas général ?

c) Exprimer $r(f)$ en fonction du polynôme caractéristique de f.

5)***(U09) Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$, et $|||.|||$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $k \in [0, 2[$ vérifiant : $\forall M \in G, |||M - I_n||| \leqslant k$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall M \in G, M_m = I_n$. Question subsidiaire (non posée lors de l'oral) : montrer que G est fini.

6)***(L09) Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, et $|||.|||$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $'A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$; on suppose que $|||A - I_n||| \leqslant \alpha$ et $|||B - I_n||| \leqslant \beta$.

a) Montrer que A et B sont inversibles, et que $|||ABA^{-1}B^{-1} - I_n||| \leqslant \frac{2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}$.

b) Montrer que si α et β sont suffisamment petits, alors $|||ABA^{-1}B^{-1} - I_n||| \leqslant |||A - I_n|||$.

c) Dans ce cas, si le sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par $\{A, B\}$ est discret, établir l'exictence de $C \in G \setminus \{I_n\}$ tel que C commute avec toutes les matrices de G.

7)***(U07) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ [où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$], et ϕ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(K), \phi_A(M) = AM - MA$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à n valeurs propres distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker}(\phi_A)$ est de dimension supérieure ou égale à n.

c) Exprimer le spectre de ϕ_A en fonction de celui de A.

d) Prouver que ϕ_A est diagonalisable (sur K) si et seulement si A l'est. A-t-on la même équivalence avec la nilpotence ?

e) Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre non nulle de ϕ_A et M un vecteur propre de ϕ_A associé à λ, établir que M est une matrice nilpotente.

8)***(X07) On dit qu'un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V est *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in V$ tel que $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ engendre V. Prouver que u est cyclique si et seulement si ses sous-epsaces propres sont de dimension 1.

9)*(X05) Soient P et Q deux polynômes de $K[X]$, avec $D = P \wedge Q$ (pgcd) et $M = P \vee Q$ (ppcm), et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} D(f) = \operatorname{Ker} P(f) \cap \operatorname{Ker} Q(f)$ $\operatorname{Ker} M(f) = \operatorname{Ker} P(f) + \operatorname{Ker} Q(f)$ $\operatorname{Im} D(f) = \operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f)$ $\operatorname{Im} M(f) = \operatorname{Im} P(f) \cap \operatorname{Im} Q(f)$

10)*(C02) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\theta \in \mathbb{C}$; on se propose d'étudier l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ AM = \theta MA\} .$$

a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$; établir une relation analogue concernant $P(M)$.

b) On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Quelle est l'action de $\mathcal{F}$ sur les espaces propres de A ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de A pour que $\mathcal{F} = \{0\}$.

c) On ne suppose plus que A est diagonalisable. Mêmes questions que précédemment, en remplaçant les espaces propres par les sous-espaces $\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)^p$.

11)**(X02) Trouver l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'on ait $P(A)=0 \Longrightarrow \operatorname{tr} A = 0$.

12)**(E08) Soit une matrice triangulaire par blocs: $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$. On suppose que les blocs B et D sont carrés.

a) Trouver une formule pour A^p.

b) Comparer (du point de vue de la divisibilité) μ_A, $\mu_B \vee \mu_D$ et $\mu_B\mu_D$.

c) Que dire si $C=0$ (matrice diagonale par blocs) ?

d) Que dire si $B=D$ et $C=I$? *Indication: Ici la formule trouvée au début va servir.*

e) Trouver une matrice A telle que $\mu_A \neq \mu_B \vee \mu_D$ et $\mu_A \neq \mu_B\mu_D$.

13)***(X08) **Endomorphismes et vecteurs cycliques.** E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère un endomorphisme f de E et son polynôme minimal μ_f. On admet que $\deg \mu_f \leqslant n$ (Cayley-Hamilton). On dit que f est cyclique s'il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base de E (on dit que le vecteur v est cyclique pour f).

a) On suppose que f est cyclique. Montrer que $\deg \mu_f = n$.

b) Donner l'expression de la matrice de f dans la base B.

c) Montrer que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1. A-t-on une réciproque ? (On distinguera selon le corps de base.)

d) Montrer que la restriction de f à un sous-espace stable F est encore cyclique. *Indication: Introduire* $J = \{P \in K[X] \ / \ P(f)(v) \in F\}$.

e) Montrer que tout sous-espace stable de f est de la forme $\operatorname{Ker}(P(f))$ où P est un diviseur de μ_f.

14)**(M04) Soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que si $Q|R|\mu_f$, ces divisions étant strictes, alors $\operatorname{Ker} Q(f) \neq \operatorname{Ker} R(f)$.

b) En déduire que si $\deg \mu_f = n$ et $Q|\mu_f$ alors $\dim \operatorname{Ker} Q(f) = \deg Q$.

15)**(C09) **Polynôme minimal d'un vecteur.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E et x un vecteur de E.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_x appartenant à $K[X]$, de degré minimal, et tel que $P_x(f)(x)=0$.

b) Montrer que le polynôme minimal μ_f de f est le ppcm de tous les polynômes P_x.

c) Montrer que si P_x et P_y sont premiers entre eux, alors $P_{x+y} = P_xP_y$.

d) Montrer qu'il existe au moins un vecteur x tel que $P_x = \mu_f$.

e) En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base de E est que $\deg \mu_f = n$.

16)*(M06) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer $(A-\lambda I)^{-1}$ comme polynôme en A lorsque λ n'est pas valeur propre de A.

17)*(C06) Soit un espace vectoriel E de dimension infinie sur $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $g = P(f)$. Soit λ tel que $g - \lambda\mathrm{Id}$ ne soit pas inversible. Montrer qu'il existe μ tel que $\lambda = P(\mu)$ et que $f - \mu\mathrm{Id}$ ne soit pas inversible.

18)*(M08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 5I_n = 0$. Que dire de A ? Que dire de n ? Calculer les puissances de A.

19)*(C08) Éléments propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20)**(L02) Soit E un K-espace vectoriel, V un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ tel que $V \backslash \{0\} \subset GL(E)$.

a) montrer que $\dim V \leqslant \dim E$.

b) Trouver les V possibles pour $K = \mathbb{C}$.

c) Trouver les V possibles pour $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$.

d) Avec $K = \mathbb{R}$ et $\dim V \geqslant 2$, montrer que V contient deux endomorphismes A et B tels que i soit valeur propre de AB^{-1}.

21)*(M02) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et φ l'endomorphisme de E tel que $\varphi(P)$ soit le reste de la division de $(X^4-1)P$ par $X^4 - X$.

a) Déterminer l'image et le noyau de φ.

b) Trouver les éléments propres de φ.

22)**(C04) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'équation $AX = XB$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, admet une solution non nulle si et seulement si A et B ont une valeur propre commune. *Indication: Si on a une valeur propre commune, un petit bricolage sur les vecteurs propres (colonnes) donnera une solution. Inversement, si X est une solution non nulle, prendre une matrice équivalente à X et très simple, d'après le rang de X, et raisonner sur les blocs.*

23)*(C08) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $a + b + c = 1$. Soit $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

a) Déterminer le spectre de M en fonction de j.

b) Montrer que l'on a (sauf exceptions) $|\lambda| < 1$.

c) Étudier la convergence de la suite (M^n).

24)*(M09) Valeurs et vecteurs propres de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par $\varphi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$.

25)**(C07) **Opérateur de Cesaro.** Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $s \in \mathcal{S}$, on définit $s^* \in \mathcal{S}$ par la relation $s^*_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} s_k$. Montrer que l'application $\varphi :\ s \to s^*$ est un automorphisme de $\mathcal{S}$. Déterminer ses valeurs propres.

26)*(M08) Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = XP'(X) - nP(X)$.

27)*(C00) Soit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de u suivant que $a \neq b$ ou $a = b$.

28)**(M06) Valeurs, vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & & \mathrm{a} \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$. *Indication: Le résultat final est que les valeurs propres se placent dans le plan complexe comme des points cocycliques ou alignés. Il y a trois exceptions notables.*

29)*(C06) Soit une matrice A à coefficients réels et strictement positifs. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A alors $\lambda = 1$ ou bien $|\lambda| < 1$.

30)**(U02) **Disques de Gershgorin.** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les valeurs propres de A appartiennent à l'union des disques (du plan complexe) D_i de centre a_{ii} et de rayon $L_i = \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, et aussi dans l'union des disques D'_i de centre a_{ii} et de rayon $C_i = \sum\limits_{j \neq i} |a_{ji}|$; enfin prouver que si λ est une valeur propre λ alors il existe i et j tels que: $|\lambda - a_{ii}||\lambda - a_{jj}| \leqslant L_i L_j$. *Indication: cf. matrices à dominance diagonale: voir les composantes les plus grandes, en module, d'un vecteur propres. Remarque: on peut aussi voir que si la matrice est irréductible les valeurs propres appartenant à la frontière des $\cup D_i$ sont dans toutes les frontières des D_i. Également que si les disques D_i sont disjoints, alors chacun contient une valeur propre (utiliser la continuité des valeurs propres en fonction des coefficients).*

31)**(L05) **Matrices stochastiques.** Une matrice réelle $A = (a_{ij})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs, et si ses lignes ont pour somme 1.

a) Montrer que 1 est valeur propre.

b) Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur ou égal à 1.

c) Soit λ une valeur propre complexe de A de module 1. On suppose que $a_{ii} > 0$ pour tout i. Monter que $\lambda = 1$.

d) Quelles sont les matrices bistochastiques (i.e. stochastiques ainsi que leur transposée) dont toutes les valeurs propres sont de module 1 ?

e) Soit λ est une valeur propre complexe de A de module 1, et X un vecteur propre associé. Montrer que λ est une racine de l'unité. *Indication: montrer que si x_k est une composante non nulle de X, alors il existe $q \neq k$ et $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $tx_q = \lambda x_k$, et recommencer.*

32)***(U08) Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $uv = vu$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $Ker(u) \bigcap Ker(v) = \{0\}$

(ii) $Im(u) + Im(v) = E$

(iii) Il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $u + lv$ est inversible.

33)***(L09) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E/ On note $\rho(u) = \max$ $|\lambda|$, où λ décrit l'ensemble des valeurs propres de u. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que $|||u||| < 1$ (la "norme triple" étant la norme sur $L(E)$ subordonnée à $\|.\|$).

(ii) $\rho(u) < 1$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} u^n = 0$.

34)***(U09) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que A est diagonalisabe si et seulement si $\exp(A)$ l'est.

b) Résoudre $\exp(A) = I_n$.

c) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \exists! P_A \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \exp(A) = P_A(A)$.

d) Exprimer P_A lorsque A est diagonalisable. P_A est-il constant sur $M_n(\mathbb{C})$? au voisinage de A ?

35)***(X07) Montrer qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude (i.e. l'ensemble des matrices qui lui sont semblables) est fermée.

36)***(U05) Soit G un sous-groupe borné de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices de G sont diagonalisables et ont des valeurs propres de module 1. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$, et $|||.|||$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$; montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : si $\forall M \in G, |||M||| < \alpha$, alors $G = \{I_n\}$.

37)***(L07) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $G_q = \{A \in M_n(\mathbb{C}), A^q = I_n\}$. Quels sont les points isolés de G_q ?

38)**(L08) Soit A une matrice réelle carrée d'ordre 2 de déterminant 1 et soit x un point sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{A.u_n}{\|A.u_n\|}$. Etudier le comportement de cette suite.

39)**(L09) Déterminer tous les morphismes continus de U (groupe multiplicatif des complexes de module 1) dans $GL_n(\mathbb{C})$.

40)***(X09) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, où K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit $f \in L(E)$ et $\phi_f : L(E) \to L(E)$ définie par $\forall g \in L(E), \phi_f(g) = fg - gf$.

a) Montrer que si f est nilpotente, ϕ_f l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?

b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si ϕ_f l'est (on pourra étudier d'abord le cas où $K = \mathbb{C}$.)

On suppose dorénavant que $K = \mathbb{C}$. Evaluer le spectre de ϕ_f en fonction de celui de f.

c) Montrer que si g est vecteur propre de ϕ_f, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont toutes les deux triangulaires supérieures.

41)**(M08) Soient $0 < a_1 < ... < a_n$, et $A = (a_{i,j})$ la matrice $\in_n$ $(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls, et si $i \neq j, a_{i,j} = a_j$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$. A est-elle diagonalisable ?

42)**(E09) Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, avec A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \exists k \in [0, n-1], BA^kY \neq 0$.

(ii) $\forall Y \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre de A, $BY \neq 0$.
(iii) $\forall Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, t \to Bexp(tA)Y$ n'est pas l'application nulle.

43)**(M03) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Quels sont les sous-espaces stables par l'endomorphisme associé à A ? *Indication: les sous-espaces propres, noyaux et images de polynômes en A en donnent; tout sous-espace stable DOIT contenir un vecteur propre (à justifier).*

b) Peut-on trouver une matrice X telle que $A = X^2$? *Indication: étudier A^2.*

44)**(C08) Sous-espaces stables par $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

45)* Soit f endomorphisme de E de dimension n. On suppose que f a exactement n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que les sous-espaces stables par f sont les sommes de sous-espaces propres.

46)**(C05) **Transvections.** Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, et H un hyperplan de E. Soit $G_H = \{f \in GL(E), f|_H = Id_H\}$.

a) Donner une condition pour que $f \in G_H$ soit diagonalisable.
b) Soit $\mathcal{T}_H = \{Id_E\} \cup \{f \in G_H, f \text{ non diagonalisable}\}$
c) Pour $f \in \mathcal{T}_H$, que dire de $f - Id$?
d) Montrer que $\mathcal{T}_H$ est un groupe isomorphe à H.

47)*(C09) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que A est semblable à $-I_3$ ou à $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

48)*(M04) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Indication: passer sur $\mathbb{C}$.

49)**(L07) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$. Préciser n; montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} I & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

Indication: passer temporairement sur $\mathbb{C}$; construire la base par récurrence.

50)**(U02) Quel est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices diagonalisables inversibles ?

51)**(C08) **Polynômes réciproques.**

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et $g(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$; en est-ce un de $\mathbb{R}[X]$?
b) Étudier les valeurs propres et vecteurs propres de g.
c) Est-ce que g est diagonalisable ?

52)*(C08) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = I_2$.

53)*(C04) Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimendion finie, et ϕ défini par $\phi(u) = f \circ u$. Montrer que les valeurs propres de ϕ sont exactement celles de f, puis que ϕ est diagonalisable si et seulement si f l'est.

54)*(M09) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $M^5 + I = 0$. *Indication: dans $\mathbb{C}$?*

55)*(C08) Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}$.

a) Est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer ses éléments propres.

56)*(C09) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & x_n \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ x_1 & & 0 \end{pmatrix}$, les x_i étant complexes.

a) À quelle condition (sur les x_i) est-elle diagonalisable ? *Indication: voir le carré et s'occuper des x_i nuls; on peut considérer les restrictions à des plans bien choisis.*

b) À quelle condition la suite (A^p) converge-t-elle ?

57)**(M07) **Codiagonalisables.** Soient f, g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, diagonalisables. Montrer qu'ils ont les mêmes sous-espaces propres si et seulement si chacun est un polynôme par rapport à l'autre. *Indication: projecteurs spectraux.*

58)*(M05) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable, à v.p. strictement positives. Étudier l'existence et l'unicité de solutions de l'équation matricielle: $X^2 = A$. Même question avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; peut-on avoir une infinité de solutions ?

59)*(C98) Si A, B sont des matrices réelles diagonalisables, montrer que $A^3 = B^3$ entraine $A = B$. Est-ce vrai en général ?

60)**(X05) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A^p est diagonalisable alors A l'est sauf si 0 est valeur propre de A et que 0 est racine multiple de μ_A, ce qui reviendra à une condition sur $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A^2$. Même problème si A est réelle. *Indication: sur $\mathbb{R}$, la parité de p et le signe des valeurs propres interviennent.*

61)*(M09)

Donner une CNS pour que la matrice ci-contre, élément de $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$, soit diagonalisable.

$$M = \begin{pmatrix} a & & & & & \\ & a & & & * & \\ & & a & & & \\ & & & b & & \\ & 0 & & & b & \\ & & & & & b \end{pmatrix}$$

62)**(E04) Soit G un sous-groupe fini et abélien du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ des matrices inversibles de taille 2, à coefficients entiers de même que leur inverse. Montrer que G possède 1,2,4 ou 6 éléments. *Indication: si $M^n = I$ alors $M^4 = I$ ou $M^6 = I$; examiner les valeurs propres.*

63)*(M05) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que AB soit diagonalisable. Condition nécessaire et suffisante pour que BA le soit aussi?

64)**(X08) Soient k endomorphismes $f_1, \ldots, f_k$ de $\mathbb{C}^n$, 2 à 2 distincts, et tels que $f_i \circ f_i = -\mathrm{Id}$ et que $f_i \circ f_j + f_j \circ f_i = 0$. Montrer que chaque f_i est de trace nulle, que n est pair et calculer les valeurs propres de f_i. Dans le cas $n = 2$, montrer que l'on a $k \leqslant 3$ et que l'on peut choisir des matrices très simples pour les f_i. En général montrer que si $n = 2^p(2q+1)$ avec p, q entiers, alors $k \leqslant 2p+1$. *Indication: restreindre aux sous-espaces propres de f_1.*

65)*(M00) On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui transforme la matrice M en $(\operatorname{Tr} A)M - (\operatorname{Tr} M)A$. Étudier f (rang, valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation). *Indication: discuter selon que A est de trace nulle ou non.*

66)**(X00) **Supplémentaires stables.** Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u. *Indication: le théorème de la base incomplète peut servir.*

67)*(C07) Soit p un projecteur de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\varphi(f) = f \circ p + p \circ f$. Montrer que φ est diagonalisable. *Indication: Soit trouver une décomposition explicite de f en somme d'éléments propres; soit découvrir les espaces propres comme ensembles d'endomorphismes ayant des propriétés particulières sur image et noyau. On peut aussi s'intéresser à $\psi(f) = p \circ f \circ p$ comme projecteur de $\mathcal{L}(E)$.*

68)*(M00) Décrire (par une forme réduite convenable) les matrices A carrées telles que $A^2 = 0$.

69)**(C02) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f - f \circ g = \alpha f$ avec $\alpha \neq 0$.

a) Exemple: soit f de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ trouver les matrices B de g qui conviennent (avec Maple).

b) Calculer la trace et le déterminant de f.

c) Calculer $g \circ f^k - f^k \circ g$ pour $k \in \mathbb{N}$.

d) Soit $v \in E_g(\lambda)$. Montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}\ g \circ f^k(v) = (\lambda + \alpha k) f^k(v)$.

e) En déduire l'existence de $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $f^k(v) = 0$.

f) Montrer que $\mathrm{Tr} f^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

g) Montrer que f est nilpotent.

h) Dans le cas où f serait nilpotent d'ordre $n = \dim E$, déterminer g. *Indication: montrer que f admet un vecteur cyclique.*

i) Étudier, plus généralement, le cas de deux endomorphismes u et v tels que $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$ avec α et β non simultanément nuls (on pourra poser $f = u \circ v - v \circ u$).

70)*(C02) **a**) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que son commutant est de dimension 2 ou 4.

b) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que son commutant est de dimension au moins n.

Indication: commencer par le cas où A est diagonalisable.

71)*(M07) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. **a**) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $F = \{AX = XA \ / \ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\}$ le commutant de A. Calculer la dimension de F.

72)(M06) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} O & O & A \\ O & A & O \\ A & O & O \end{pmatrix}$. Déterminer si B est diagonalisable. Quel est le commutant de B ?