Exercices sur les suites et les séries

1)**(C08) On considère treize réels $x_1 < ... < x_{13}$ tels que $x_i x_j \neq -1$ pour $i \neq j$. Montrer qu'il existe $(i,j) \in \{1,...,13\}^2, i \neq j$ tels que $0 < \frac{x_i - x_j}{1+x_i x_j} < 2-\sqrt{3}$.

2)*(M04) Calculer $\inf_{\alpha \in]0,\pi[} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)|$
.

3)***(U06) **Principe "des tiroirs" de Dirichlet.** Soit un irrationnel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
a) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $q \leqslant n$ et $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$.
b) Montrer qu'il existe deux suites $(p_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n) \in N^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$.
c) Etudier la convergence de la suite $(\frac{1}{nsin(n)})_{\{}n \in \mathbb{N}$.
d) Etablir l'existence d'un irrationnel $\alpha > 0$ tel que $\forall s \geqslant 0$, la suite $(\frac{1}{n^s sin(n\alpha)})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

4)***(U08) Montrer qu'il existe une infinité de puissances de 2 dont l'écriture décimale commence par 7. Peut-on définir et calculer la probabilité pour qu'une puissance de 2 commence par 7 en base 10 ?

5)**(X07) **Suite d'Erdös.** On considère la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_n = 2a_{[n/3]} + 3a_{[n/9]}$.
a) Pour tout $p \geqslant 0$, on pose $b_p = a_{3^p}$. Exprmier b_p en fonction de p.
b) Prouver que si $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, alors $a_n = b_p$.
c) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\frac{a_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6)**(L01)

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Montrer que pour tout $l \in \mathbb{R} + \cup\{+\infty\}, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\lim_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_\varphi(k) = l$.

7)**(E01) On considère $f \in \mathcal{C}([a,b],[a,b])$ et $x_0 \in [a,b]$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
a) Démontrer que f possède au moins un point fixe.
b) Démontrer que (x_n) converge si, et seulement si $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$. *Indication: l'ensemble des valeurs d'adhérence est un segment.*

8)** Examiner le comportement de la suite: $u_0 = e^{i\theta}$ (θ réel), $u_{n+1} = {u_n}^2$. *Indication: considérer le développement binaire de* $\dfrac{\alpha}{\pi}$ *pour savoir si la suite peut être stationnaire, périodique, convergente, ou dense...*

9)**(X98) Soit une suite (u_n) positive. On suppose que $u_n \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$. *Indication: Poser* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$ *et revoir le théorème de Cesàro.*

10)*(M02) Étudier la convergence de la suite $\big(\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, et exprimer sa limite en fonction de x à l'aide de fonctions usuelles.

11)*(X08) Étudier la suite $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n^2}$.

12)*(M05) Étudier la suite $n - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\, \dfrac{1}{\sqrt{k+n}}$.

13)***(U07) On dit qu'une suite réelle (u_n) est *convexe* si la suite (b_n) définie par: $b_n = u_{n-1} - u_n$ est décroissante. Montrer qu'alors on a pour tous $p \leqslant k \leqslant q$: $u_k \leqslant \dfrac{q-k}{q-p} u_p + \dfrac{k-p}{q-p} u_q$. *Indication: traiter d'abord le cas $k = p+1$ par une récurrence descendante sur p ; puis faire une récurrence ascendante sur k.* Application: en supposant que (u_n) est bornée, montrer que b_n tend vers 0, que u_n converge, que nb_n tend vers 0 et que la série de terme général b_n converge.

14)*(X07) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs, telles que $\lim(a_n)^n = a > 0$ et $\lim(b_n)^n = b > 0$. Soit $p \in]0,1[$. Calculer $\lim(pa_n + (1-p)b_n)^n$

15)** Étude de $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{i+1}\right)^n$ (monotonie, limite, équivalent). *Indication: pour comparer deux sommes de termes avec un terme "en trop", on peut en mettre un à part et majorer une somme de différences par le nombre de termes fois la plus grande. Réponse: Equivalent:* $n \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

16)**(M06) Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n), de limites nulles, avec $0 < v_{n+1} < v_n$ pour tout n. Soit $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$, Δv_n de même. On suppose aussi que $\frac{\Delta u_n}{\Delta v_n}$ est une suite convergente de limite c. Montrer que $\frac{u_n}{v_n}$ tend aussi vers c.

17)*(C05) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1^{p/n} + \cdots + p^{p/n}}{p}\right)^n$.

18)**(U13) Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites de réels vérifiant les relations

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n + c_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} = 3.$$

Montrer que (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers zéro. *Indication: introduire la fonction* $\varphi(x) = e^x - x - 1$.

19)***(X09) Pour x dans $\mathbb{R}$, $E(x)$ désigne la partie entière de x. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k+1} E\left(\frac{n}{k}\right)$.

Indication: ce serait facile sans la partie entière; et on peut découper cette somme du côté de $\sqrt{n}$.

20)*(C07) **Cesàro.** Soit une suite (u_n) de réels positifs telle que $u_n \in o(S_n)$, avec $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Soit (a_n) une suite complexe, convergente vers a. Montrer que $u_n a_0 + u_{n-1}a_1 + \cdots + u_0 a_n \sim aS_n$.

21)**(M06) **Racines continues.** Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls. On pose $\widehat{a_n} = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$.
Remarque: ceci est inspiré des fractions continues.

a) Étudier $\widehat{a_n}$ lorsque la suite (a_n) est constante.
b) Même question lorsque $a_n = n$ pour tout n (ici la limite n'est pas demandée).
c) Même question lorsque $a_n = 2^{2^n}$. *Indication: on peut simplifier* $\widehat{a_n}$ *en ce cas.*

22)**(X02) Soit $P_n(X) = \frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + X + 1$. Montrer que P_n admet au plus une racine réelle. Préciser selon la parité de n. Soit a_{2k+1} l'unique racine réelle de P_{2k+1}. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k+1}$. *Indication: il est nécessaire de savoir (ou d'admettre) que pour x fixé on a* $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$.

23)*(C05) Montrer que l'équation $x^n = x + n$ pour n donné admet une solution positive unique notée x_n. Montrer que x_n converge vers λ à préciser et donner un équivalent de $x_n - \lambda$, puis un développement asymptotique à deux termes de x_n.

24)*(M96) Soit un entier n strictement positif. Étudier l'existence d'une solution $x_n < 0$ de l'équation $n\ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = x$. Étudier le comportement de la suite (x_n). *Indication:* $-3 \leqslant x_n \leqslant -1$.

25)**(C95) Suite récurrente $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ (et $u_0 \in]0,1[$): étudier; on pose $v_n = 1/u_n$; montrer que: $v_n = n + \ln(n) + w_n$ où (w_n) est bornée; développement asymptotique de u_n. Refaire l'étude lorsque u_0 est quelconque.

26)* Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \cos u_n$.

27)*(M05) Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

28)**(X06) Suite: $u_{n+1} = u_n + 2\sin u_n$. *Indication: période, imparité, écart aux points fixes.*

29)**(E00) On pose $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ pour $x > 0$. Soit $a > 0$; on définit la suite récurrente $x_0 = a$ puis $x_{n+1} = f_n(x_n)$.

a) Montrer que $nx_n \leqslant 1$.

b) Montrer que la suite (nx_n) est croissante à partir de $n = 2$.
c) Limite b de la suite x_n ?
d) Equivalent de $b - x_n$? *Indication: Cesàro ?*

30)*(E02) Soit la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Étudier la suite $\dfrac{\ln u_n}{2^n}$. Qu'en déduit-on sur (u_n) ?

31)**(M06) Soient a et t_0 strictement positifs. Montrer que la relation $t_n t_{n+1} = \dfrac{a^2}{t_{n+1}}$ définit une unique suite (t_n) strictement positive. Donner un équivalent de t_n lorsque n tend vers l'infini et préciser avec un développement asymptotique à deux termes.

32)**(L13) Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un voisinage de 0, telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, et qu'il existe: $p = \operatorname{Inf}\{q > 1 \ / \ f^{(q)}(0) \neq 0\}$. On suppose que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0 pour un certain choix de u_0. Montrer que $f^{(p)}(0) < 0$, et trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. *Indication: étudier* $\dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ *pour α bien choisi.* Exemple (Mines): $f(x) = \sin x$.

33)**(X13) **Méthode des isopérimètres.** Soit a et b deux réels strictement positifs. Étudier les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad$ et $\quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$. *Indication: pour identifier la limite, se ramener au cas où $b_0 = 1$ et $a_0 = \cos\theta$ ou bien $a_0 = \operatorname{ch}\theta$.*

34)***(X07) Soit m_0 et M_0 deux réels. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$m_{n+1} = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \operatorname{Min}(x, M_n) \, \mathrm{d}x \text{ et } M_{n+1} = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \operatorname{Max}(x, m_n) \, \mathrm{d}x$$

Montrer que ces suites convergent et calculer leurs limites. *Indication: poser $x_n = 1 + m_n$ et $y_n = 1 - M_n$).*

35)**(X06) Étudier la suite définie par $u_0 > 0, u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) + \ln(1 + u_{n-1})$. *Indication: considérer $M_n = \operatorname{Max}(u_n, u_{n-1}, \ell)$ et $m_n = \operatorname{Min}(u_n, u_{n-1}, \ell)$.*

36)**(M06) Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par u_0 et v_0 réels, et

$$u_{n+1} = u_n + \alpha \frac{v_n}{n(n+1)}, \ v_{n+1} = v_n + \alpha \frac{u_n}{n(n+1)} \ .$$

Étudier ces suites. Développement limité de (u_n) à l'ordre 2 lorsque cette suite converge.

37)**(C02) Soit (x_n) une suite réelle bornée et telle que les suites e^{ipx_n} et e^{iqx_n} convergent, p et q étant deux réels non nuls avec p/q irrationnel. Prouver la convergence de (x_n).

38)*(C08) Étudier la suite complexe définie par u_0 quelconque, et: $u_{n+1} = \dfrac{u_n + |u_n|}{2}$. *Indication: faire un dessin.*

39)**(M91) **Méthode de Héron.** Étudier la suite récurrente complexe définie par $z, u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\big(u_n + \dfrac{z}{u_n}\big)$. *Remarque: il se peut que la suite ne soit pas définie. Indication: a étant une racine carrée de z, examiner* $\dfrac{u_n - a}{u_n + a}$ *en fonction de a, n et u_{n-1}.*

40)**(L03) Étude de $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(\dfrac{i}{n}\right)^{n\alpha}$ avec $\alpha > 0$ (monotonie, limite). *Indication: comparer: $(1 - k/n)^{n\alpha}$ et $e^{-k\alpha}$ et découper. Réponse: équivalent:* $\dfrac{1}{e^\alpha - 1}$

41)*(C02) Étudier $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

42)**(E00) **Encore Cesàro.** Soit une suite double $(u_{m,n})$ de réels positifs telle que: (i) $\forall n \sum_{m=0}^{n} u_{m,n} = 1$ et (ii) $\forall m \lim_{n\to\infty} u_{m,n} = 0$. Soit (a_n) une suite complexe, convergente vers a. Montrer que $u_{0,n}a_0 + u_{1,n}a_1 + \cdots + u_{n,n}a_n$ converge vers a. Exemple pertinent: $u_{m,n} = 2^{-n}\binom{n}{m}$.

43)**(M99) Donner un développement asymptotique de $x_n \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, solution de l'équation $\sin x \ln x = 1$. *Réponse:* $x_n = n\pi + (-1)^n\big(\dfrac{a}{\ln n} + \dfrac{b}{\ln^2 n} + \dfrac{c}{\ln^3 n} + o\big(\dfrac{1}{\ln^3 n}\big)\big)$

44)*(M95) Montrer que l'équation: $x^n = ax + b$, pour a et b positifs, a une solution unique u_n sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la suite (u_n). *Indication: situer $a + b$ par rapport à 1.* Dans le cas $a = 1, b = 1$, trouver la limite λ de la suite et donner un équivalent de $x_n - \lambda$.

45)*(M04) Limite de $\sum_{k=1}^{n} \sin \dfrac{1}{k+n}$.

46)*(C09) Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$, puis la série de terme général u_n.

47)*(X08) Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = [x(xu_n)^b]^a$ avec $x > 0$, a, b fixés. *Indication: on doit pouvoir trouver une formule explicite.*

48)** Etudier la nature de la série de terme général $u_n =$

a) $n^{-1-1/n}$.
b) $(1 - \frac{1}{n})^{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
c) $a^{1+1/2+\ldots+1/n}$, où $a > 0$.
d) $(\sum_{k=1}^{n} k^{-1/k})^{-1}$.
e) $(-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2)\,\mathrm{d}t$.
f) $\int_0^\pi t^n \sin(t)\,\mathrm{d}t$.
g) $sin(2\pi\,\frac{n!}{e})$.
h) $sin(\pi\sqrt{n^2 + an + b})$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
i) $\frac{sin(n!\pi e)}{ln(n)}$.
j) $\left(\dfrac{\ln\ln n}{\ln n}\right)^{(\ln n)^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
k) $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.
l) $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.
m) $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n ln(n)}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

49)** Etablir la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, où $u_n =$

a) $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
b) $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$.
c) $\sum a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$.
d) $\dfrac{2^n}{3^{2^{n-1}} + 1}$.
e) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} nx \operatorname{ch}(n+1)x}$.
f) $\dfrac{n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
g) $2^n \tan(\dfrac{x}{2^n}) \tan^2(\dfrac{x}{2^{n+1}})$.
h) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} nx \operatorname{ch}(n+1)x}$.
i) $\dfrac{1}{(3n)!}$.

j) $\dfrac{1}{\binom{n+q}{1+q}}$.

k) $\dfrac{E(n^{1/3}) - E\big((n-1)^{1/3}\big)}{4n - n^{1/3}}$.

l) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-nE(k/n)}{k(k+1)}$

m) $\dfrac{t^{n-1}(1+t^n x)}{(1-t^{n-1}x)(1-t^n x)(1-t^{n+1}x)}$ pour t et x complexes. *Indication: discuter selon* $|t|>1$ *ou non.*

50)**(E00) **Série hypergéométrique.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On définit la suite $u_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}$.

a) Étudier la convergence de la série Σu_n. *Indication: un DL de* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *peut rendre service.*

b) Dans le cas où a et b sont entiers et que la série converge, calculer sa somme. *Indication: il paraî t que* $(b-a-1)S_n = a-(a+n+1)u_n$.

c) Cas particulier: $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$, trouver un équivalent de u_n, calculer S_n et sa limite. *Indication: Calculer* $(n+2)u_{n+1} - (n+1)u_n$.

51)**(C00) Soit f de $[1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $\frac{f'}{f}$ tende vers $a < 0$ en $+\infty$. Nature de la série de terme général $f(n)$?

52)*(M02) On pose $u_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ puis la série de terme général (u_n^α), $\alpha > 0$ étant donné.

53)***(U07) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls tels que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, si $n \neq m$ alors $|z_n - z_m| \geqslant 1$. Montrer que $\sum \frac{1}{z_n^3}$ converge.

54)**(X04)

a) Soit $(a_{n,p})_{(n,p)\in N^*)^2}$ une famille de réels telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe $\lim_{p\to+\infty} a_{n,p} = a_p \in \mathbb{R}$ et il existe une série à termes positifs convergente $\sum b_p$ telle que $\forall (n,p) \in N^*)^2, |a_{n,p}| \leqslant b_p$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} a_{p,n}$.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty}((\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \dots + (\frac{n-1}{n})^n)$.

55)**(C98) Soit f ayant un DL en 0 de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$. Soit $u_n = \prod\limits_{i=1}^{n} f(\frac{1}{i})$. Nature de $\sum u_n$?

56)**(M98) Soit $q_1(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. On définit par récurrence $q_{k+1}(n) = q_1(q_k(n))$. Etudier la convergence de $\sum u_n$, où $u_n = \frac{1}{nq_1(n)q_2(n)\dots q_n(n)}$.

57)**(X93) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0 telle que $\{p \in \mathbb{N} \ / \ pu_p \geqslant 1\}$ soit infini. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

58)**(X06) Soit une suite de réels (u_n), et $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature et même somme:

1) si la suite (nu_n) converge, ou bien

2) si (u_n) décroît et tend vers 0. *Remarque: classique; critère de Cauchy.* Application: Calculer $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} (p \in \mathbb{N}^*)$

59)*(C02) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive, de limite nulle, et $a > 0$ réel.

a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n + a_n + \frac{a_n^2}{u_n}$ est bien définie.

b) Si $u_0 > 0$, quel est le lien entre la nature de (u_n) et celle de la série $\{a_n\}$?

c) On suppose $u_0 < 0$ et (u_n) majorée par $M < 0$. Que dire de la nature de (u_n) et de celle de $\{a_n\}$?

d) Que dire si $u_0 < 0$ et (a_n) décroissante ?

60)*(M02) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et strictement positive telle que $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$ avec $\sum v_n$ absolument convergente.

a) Montrer que $\sum\left(\frac{\lambda}{n}+\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est absolument convergente.

b) Montrer que la suite $(n^\lambda u_n)$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$.

c) Étudier la série de terme général $(\frac{n^n}{e^n n!})$.

61)**(C98) Soit une série $\sum a_n$ divergente, à termes positifs, de limite nulle. Montrer qu'il existe une suite (b_n) telle que $\sum b_n$ diverge et une suite (c_n) telle que $\sum c_n$ converge, avec $c_n = \mathrm{Min}(a_n, b_n)$.

62)**(M07) Soit (u_n) suite positive. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ avec α réel et $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.

a) On suppose que Σu_n converge. Etudier la convergence de Σv_n.

b) On suppose désormais que Σu_n diverge. Montrer que $v_{n+1} + \cdots + v_{n+p} \geqslant 1 - \dfrac{S_n}{S_{n+p}}$. En déduire que Σv_n diverge.

c) On suppose que $\alpha > 1$. À l'aide de la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$, montrer que Σv_n converge. Que dire si $\alpha < 1$?

d) On suppose à nouveau que Σu_n est convergente. On pose $R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$ et $w_n = \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$. Etudier la nature de Σw_n.

63)**(C98) Soit une suite (u_n) réelle; on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose que $S_{2n} \leqslant (1+\frac{1}{n})S_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

64)** Soit $\alpha > 0$ et la suite (u_n) définie par: $u_2 = 1$; $F_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$; $u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} F_n$. Etudier Σu_n.

65)**(X98) Soit $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. Nature de $\sum (-1)^n u_n$.

66)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante convexe, de limite nulle en $+\infty$, et $u_n = (-1)^n f(n)$. Etudier la série de terme général u_n; et si R_n est reste de cette série, montrer que $2\,|R_n|$ est compris entre $f(n+1)$ et $f(n)$. Examiner la série de terme général R_n.

67)** Calculer: $\sum \dfrac{(-1)^i}{mi+q}$, $m > 0$ et q étant fixés.

68)** Soit $u_n = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)\left(\sum\limits_{l=0}^{n} \dfrac{(-1)^l}{l!}\right) - 1$. Convergence de Σu_n ?

69)**(E06) **Série de Dirichlet.** Étudier la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$ (s complexe).

70)**(M01) Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln k}{\ln(a+k)}$, a étant strictement positif et non entier.

71)** Trouver un équivalent de $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} \dfrac{pq}{p+q}$. *Indication: examiner $S_n - S_{n-1}$ et re-sommer pour obtenir $S_n \sim \dfrac{2(1-\ln 2)}{3} n^3$.*

72)**(C96) Equivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^k}{k}$.

73)**(M00) Soit $v_n = \frac{1}{(n+q)!} \sum\limits_{k=1}^{n} k!$. Etudier, suivant les valeurs de q, la convergence de $\sum v_n$; en cas de divergence, donner un équivalent simple pour les sommes partielles.

74)**(C04) On pose $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$.

Montrer que $2u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$.

Nature de la série $\sum u_n$? Équivalent de u_n ?

Domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$?

75)***(C98) Soit $u_n = \frac{\ln n}{n}$ et $v_n = (-1)^n u_n$.

a) Nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

b) Soit $S_N = \sum\limits_{2}^{N} u_p$. Donner une estimation asymptotique de S_N puis de S_{2N}. *Indication: introduire $x_n = \ln^2 n$, et voir un DL de $x_{n+1} - x_n$. Ou encore, comparer à une intégrale.*

c) Exprimer $\sum\limits_{2}^{\infty} v_n$ en fonction des constantes $\ln 2$ et γ.

76)**(X95) Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant k} \dfrac{1}{n^2(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{3k^3}$.

77)**(C09) Soit $u_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(n+k)}$ pour $n \geqslant 1$.

a) Expression de u_n.

b) Équivalent de u_n quand n tend vers l'infini. *Indication: il semble que ce soit $\frac{\ln 2}{n}$.*

c) Etudier $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n x^n$.

78)**(M05) Etudier $u_n = \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$ (limite ℓ et équivalent de $u_n - \ell$). *Indication: comparer à des séries télescopiques.*

79)**(M00) Soit $\alpha > 0$. On définit une suite (u_n) par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente? Déterminer un équivalent de $u_n - \lim_n u_n$ lorsque $\alpha > 1$ et un équivalent de u_n lorsque $\alpha \leqslant 1$.

80)**(C99) **Développements factoriels.** Soit une suite (q_n) d'entiers $\geqslant 2$, croissante, et $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 \cdots q_n}$

a) Montrer que x est bien défini et appartient à $]0,1]$.

b) Montrer qu'inversement tout $x \in]0,1]$ est associé à une unique suite (q_n).

c) Qu'en est-il pour x rationnel?

d) Quelle est l'écriture de $e - 2$?

81)***(U04) **Inégalité de Carleman.** Soit $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\sum u_n$ convergente.

a) On pose $w_n = \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}$. Démontrer que Σw_n converge et que l'on a $\Sigma w_n \leqslant C \Sigma u_n$ pour une certaine constante C. *Indication: classique mais délicat. Considérer $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}[u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n]$. On trouve que $C = e$ convient grâce à une discussion sur les factorielles.*

b) Déterminer la plus petite valeur possible de C. *Indication: tronquer une série harmonique.*

82)***(U07) Soit f application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est telle que, pour toute suite (u_n), la convergence de Σu_n entraî ne celle de $\Sigma f(u_n)$.

a) Montrer que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0.

b) Montrer $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ a la même propriété que f, puis que f est impaire.

c) On veut démontrer que f est localement additive, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour x et y de module au plus α. *Indication: supposer f non localement additive, construire une suite u_n telle que Σu_n converge et $\Sigma f(u_n)$ diverge.*

d) Montrer que f est une homothétie sur un voisinage de 0.

83)***(L04) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute suite (a_n) l'absolue convergence de Σa_n entraine celle de $\Sigma f(a_n)$. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et k tels que $|f(x)| \leqslant k|x|$ pour $|x| \leqslant \alpha$.

84)***(X08) Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente ; on suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{kn} = 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.

85)***(L97) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes de limite nulle. Montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\{-1,+1\}$, telle que $\sum \epsilon_n z_n$ converge.

86)**(U05) Pour $n \geqslant 1$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n$.

87)**(X12) Soit (a_n) une suite de réels positifs, la série $\sum a_n$ étant convergente. On pose: $\varphi(n) = \sum\limits_0^{\infty} \frac{a?^{\text{`}}}{n^k}$ (si cela converge). Etudier la convergence des séries $\sum\limits_1^{\infty} \varphi(n)$ et $\sum\limits_1^{\infty} \varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n)$.

88)**(X13) Soit un entier $m \geqslant 2$. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{a_n}{n}$ où a_n vaut $-x$ si n est divisible par m, et 1 sinon. On donnera la (les) valeurs de x qui entraî nent la convergence, puis la valeur de la somme. *Indication: se ramener aux sommes partielles de la série harmonique.*

89)**(X03) Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut réarranger les termes de la série de telle sorte que la nouvelle série ait pour somme ℓ.

90)**(C04) Soit une suite (a_n) de limite nulle, et $\lambda > -1$, et la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2\lambda a_n u_n + a_n^2}$.

a) Vérifier l'existence de la suite (u_n).

b) Montrer que si $\lambda \geqslant 0$ la convergence de (u_n) équivaut à celle de la série Σa_n.

c) On suppose que $-1 < \lambda < 0$ et que 0 n'est pas valeur d'adhérence de (u_n). Montrer que (u_n) décroî t à partir d'un certain rang, et en déduire que Σa_n converge.

91)*(M00) Nature de la série $\sum \dfrac{1}{nH_n}$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

92)**(X91) Nature des séries $\sum (\dfrac{\ln n}{n})^{Cn^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}_+$ et $\sum |\ln((n))|^{(\ln(n))^{\alpha/n}}$.

93)**(X11) Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+2)}$ et $\lim (\dfrac{4}{3}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+2)})^n$.

94)*(X12) Nature de la série $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$.

95)***(X12) On se donne un nombre réel $\alpha > 0$, et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f(n) = \sum\limits_{q|n} q^\alpha$ et, pour x réel, $F(x) = \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x} f(n)$. Trouver un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. *Indication: Justifier l'une des deux formules suivantes:*

$$F(x) = \sum_{d\leqslant x} d^\alpha E(\frac{N}{d}) \qquad \text{et} \qquad F(x) = \sum_{p\leqslant x} \sigma_\alpha(\frac{x}{p})$$

avec $\sigma_\alpha(x) = \sum\limits_{k\leqslant x} k^\alpha$. *La première formule peut évoquer une somme de Riemann, la seconde se traite en appliquant les théorème sur la sommation des relations de comparaison.*

96)**(X10) Nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{\left(\ln(n+1)\right)^2}{\ln n \ln(n+2)}\right)$.

97)**(M08) Soit $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4}$.

a) Convergence de $\sum a_n$. *Indication: forme intégrale ?*

b) Valeur de $\sum a_n$.

98)**(C12) Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $u_n = \ln(\tan S_n))$.

a) Quelle est la limite de S_n ?

b) Nature de $\sum u_n$.

99)** Nature de la série: $\sum \cos\Big(\pi n^2 \ln\big(\frac{n}{n-1}\big)\Big)$

100)**(C00) Étudier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin \ln n}{n}$. *Indication: voir le cours relatif à la série de terme général* $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.

101)**(C) Soient a et α positifs. On pose: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$. Etudier la convergence de la série de terme général a^{S_n}. *Indication: évaluer* S_n *à l'aide d'intégrales.*

102)*(C) Montrer que $(p,q) \to 2^q(2p+1)$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

103)**(M) Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $(\frac{1}{a^p+b^q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $a > 1$ et $b > 1$. Calculer alors la somme de cette famille.

104)**(X13) Soient $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$. Montrer (en justifiant l'existence de séries manipulées) que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{nc}}{1-z^{na+b}}\ .$$

105)**(M) Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $u_{p,q} = 0$ si $p \geqslant q+1$ et $u_{p,q} = \frac{pa_p}{q(q+1)}$ si $1 \leqslant p \leqslant q$. Montrer la sommabilité et calculer la somme de $(u_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

106)**(C) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $((p+q)^{-\alpha})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ soit sommable ; exprimer alors sa somme en fonction de la fonction dzêta de Riemann.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $((p^2+q^2)^{-\alpha})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

107)**(M) Etudier la sommabilité de $(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$; en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)}$.

108)***(L) On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier n. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d(n)e^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}\ .$$

109)***(U) **a**) Soit, pour $n \in \mathbb{N}, p_n$ le n-ième nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, etc). Montrer que pour $s > 1$, le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-1/p_n^s}$ converge et exprimer ce produit en fonction de la fonction dzêta. Que peut-on dire si $s = 1$?

b) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, \phi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler). Montrer que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\phi(n)}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$, et calculer dans ce cas la valeur de la somme en fonction de $\zeta(\alpha-1)$ et de $\zeta(\alpha)$.