Exercices de topologie

Sauf mention, un espace vectoriel normé (E,N) est sous-entendu.

1)*(C02) Montrer que $N(x,y)=\underset{t\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\,\frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner la boule unité pour cette norme. *Indication: Le fait d'avoir $N(x,y)\leqslant 1$ se traduit par deux inégalités polynômiales en t.*

2)**(C02) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $N(x,y)=\underset{t\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\,|x\cos t+y\sin 2t|$.

a) Vérifier que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que pour la norme précédente N, la boule-unité $B\subset\{(x,y)\ /\ \mathrm{Max}(|x|,|y|)\}\leqslant 1$ et contient $\{(x,y)\ /\ |x|+|y|)\}\leqslant 1$.

c) Soit S la sphère-unité de N. Montrer que l'ensemble $S\cap\mathbb{R}_+^2$ est représenté par le paramétrage $x=\frac{\cos 2t}{\cos^3 t}$, $y=\frac{\sin t}{2\cos^3 t}$, $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$. En déduire l'allure générale de B avec Maple. *Indication: Montrer que $S\cap\mathbb{R}_+^2$ est décrit par* $\underset{t\in[0,\pi/4]}{\mathrm{Sup}}\ x\cos t+y\sin 2t$.

3)**(M04) On note E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornées sur $\mathbb{R}$. *Remarque: l'utilisation de Maple est autorisée pour cet exercice (pour avoir l'allure des courbes).* **a)** Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $f\mapsto\mathrm{Sup}\{|t^pe^{-|t|}f(t)|,\,t\in\mathbb{R}\}$ est une norme sur E.

b) Soit $c\in\mathbb{R}$. L'application $\varphi_c:f\mapsto f(c)$ est-elle continue de (E,N_p) dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$?

c) Montrer que, si $p\neq q$, les normes N_p et N_q ne sont pas équivalentes sur E.

4)*(C04) On donne une suite $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes. Pour $P\in\mathbb{C}[X]$, sécrivant $P=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}p_kX^k$, on note $N_a(P)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}|a_kp_k|$.

a) Donner une CNS sur a pour que N_a soit une norme.

b) Si a et b sont deux suites complexes vérifiant cette CNS, donner une CNS pour que N_a et N_b soient équivalentes.

c) Existe-t-il a telle que l'opérateur de dérivation soit continu dans $\mathbb{C}[X]$ muni de N_a ?

5)**(C04) Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Pour $f\in E$, on pose $K(f)=\mathrm{Sup}\left\{|\,\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,|,\ y\neq x\in[0,1]\right\}$.

b) Montrer que $N(f)=|f(0)|+K(f)$ définit une norme sur E.

c) Montrer que N et N_∞ ne sont pas équivalentes.

d) Montrer que $N'(f)=N_\infty(f)+K(f)$ définit une norme équivalente à N.

6)*(M08) Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé , et $h:E\to E$ définie par $h(x)=\frac{x}{1+\|x\|}$. Montrer que h établit une bijection lipschitzienne de E sur sa boule-unité ouverte.

7)*(C04) Soit A une partie de l'espace vectoriel normé E. Soit f une application k-lipschitzienne de A vers $\mathbb{R}$. On définit sur E l'application $g:x\in E\mapsto\underset{y\in A}{\mathrm{Inf}}(f(y)+k\|x-y\|)$. Montrer que g est lipschitzienne et prolonge f sur E.

8)*(M09) Soit $E=\mathcal{C}^1([0,1])$ et $N(f)=\sqrt{f(0)^2+\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$. Prouver que c'est une norme sur E, puis que: $\|f\|_\infty\leqslant\sqrt{2}.N(f)$. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?. *Indication:* $|f(x)|\leqslant\int_{[0,x]}|f'|$ *et Cauchy-Schwarz.*

9)***(L07) Soit G un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est voisinage de la matrice identité pour une norme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Indication: dilatations et transvections.*

10)**(C03) **Inégalités de Hölder et Minkowski.**

a) Montrer, pour $x,y,p,q>0$ que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1: x^{1/p}.y^{1/q}\leqslant\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$

b) Montrer l'inégalité de Hölder:

$$\sum |x_i||y_i| \leqslant \Big(\sum |x_i|^p\Big)^{1/p} . \Big(\sum |y_i|^q\Big)^{1/q}$$

c) En déduire que $\|x\|_p = \Big(\sum |x_i|^p\Big)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$. *Indication: changement de variable et* $(a+b)^m = a.(a+b)^{m-1} + b.(a+b)^{m-1}$.

d) Application: $\|f\|_p = \Big(\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}$ est une norme sur $\mathcal{C}^0[0,1]$.

11)***(U08) **Normes strictes.** Soit une norme N. Montrer l'équivalence de:

(i) Si x et y sont tels que $N(x+y) = N(x) + N(y)$ alors x et y appartiennent à une même demi droite réelle.

(ii) Il n'existe pas de segment non réduit à un point sur la sphère unité (i.e. la boule unité est strictement convexe).

(iii) Pour tout x, y : $i = \frac{x+y}{2}$ si, et seulement si $\|x-i\| = \|y-i\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$ (caractérisation métrique du milieu).

(iv) Pour tout sous espace de dimension finie F et tout x, il existe une seule meilleure approximation de x par un vecteur de F. *Indication: il s'agit en fait d'un problème en dimension 2; un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est toujours complet et les suites bornées y ont des valeurs d'adhérence.*

12)**(M09) **Convergence en moyenne.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que (A^p) soit bornée et $B_p = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(A-I) \oplus \mathrm{Im}(A-I) = \mathbb{C}^n$.

b) Montrer que la suite (B_p) converge vers une matrice de projecteur; rattacher image et noyau de ce projecteur à ceux de $A - I$.

13)***(L06) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (ces espaces munis des normes-produit). Démontrer que f est ouverte (i. e. transforme des ouverts en ouverts) si, et seulement si f est surjective. *Indication: dans un ouvert on peut caser de petits parallélépipèdes, en lien avec des bases de l'espace.*

14)**(E05) Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. Soit $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$, $g = f$ hors de $[a,b]$ et g affine sur $[a,b]$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Montrer que T est continue pour la norme uniforme et calculer sa norme subordonnée. Valeurs et vecteurs propres de T.

15)*(M02) Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergeant vers 0. Pour $u = (u_n)$; on note $\|u\| = \operatorname*{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.

b) Pour $u \in E$, on pose $f(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ ·

Montrer que f est une forme linéaire continue sur E.

c) On pose $N(f) = \operatorname*{Sup}\limits_{\|u\|=1} |f(u)|$. Montrer que $N(f) = 1$ et que ce sup n'est pas atteint.

16)**(L02) **Banach-Steinhaus.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie, u un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, $\operatorname*{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u^n(x)\| < +\infty$.

Montrer que $\operatorname*{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} |||u^n||| < +\infty$.

17)*(C05) Soit f un endomorphisme de E tel que toute suite (a_n) convergente soit transformée en une suite $(f(a_n))$ *bornée*. Montrer que f est continu. *Indication: prouver $(f(a_n))$ doit converger.*

18)**(M99) **Projections continues.** Soit un espace normé E et un projecteur p continu de E, non nul.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,p$ et $\mathrm{Im}\,p$ sont des sous-espaces supplémentaires et fermés.

b) Montrer que si $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont complets, alors E est complet.

c) Que peut-on dire (a priori) de la norme d'un projecteur ?

d) On suppose que E est un espace préhilbertien. Montrer que $|||p||| = 1$ équivaut au fait que p est un projecteur orthogonal.

e) Soit (p_n) une suite de projecteurs orthogonaux continus telle que $\forall x \in E$ la suite $(p_n(x))$ soit convergente, de limite $q(x)$. Montrer que q est un projecteur orthogonal.

19)**(M05) $\mathbb{R}_n[X]$ étant muni de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |P(k)|$, calculer la norme de l'application $P \mapsto XP$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. *Indication: polynôme d'interpolation de Lagrange et coefficients binomiaux. Réponse: la norme vaut 11 ?*

20)*(M00) $\mathbb{C}[X]$ étant muni de la norme $\|\sum a_k X^k\| = \mathrm{Sup}\,|a_k|$, étudier la continuité, et calculer le cas échéant la norme, de la forme linéaire $P \mapsto P(x_0)$, où x_0 est un complexe donné. *Réponse: cela dépend de $|x_0|$; la norme vaut* $\dfrac{1}{1-|x_0|}$.

21)*(C04) **Primitivation.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme sup. On pose, pour $f \in E$: $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que T est un endomorphisme continu de E.

b) Montrer que $\forall g \in E\ \exists! f \in E\ /\ f - Tf = g$ (on cherchera f comme somme de série).

Montrer que $\mathrm{Id} - T$ est un homéomorphisme.

22)*(C01) **Applications à peu près linéaires.** Soit E, F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés, F étant complet. Soit f application continue de E dans F, telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant: $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M$.

a) Dans le cas $M = 0$, montrer que f est linéaire. Serait-ce encore le cas si $\mathbb{R}$ était remplacé par $\mathbb{C}$ (justifier la réponse) ?

b) On suppose $M > 0$. Soit v_n définie par $v_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Montrer que la suite (v_n) converge simplement; soit $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x)$.

c) Montrer que g est une application linéaire continue et qu'elle est l'unique application telle que $\|g(x) - f(x)\|$ soit bornée.

23)***(X07) Soient u et v endomorphismes continus de E. On suppose que l'on a: $uv - vu = \mathrm{Id}$.

a) Montrer que pour tout n on a $uv^{n+1} - v^{n+1}u = (n+1)v^n$.

b) Mettre en évidence une contradiction. *Indication: utiliser la norme d'application linéaire.*

c) Soit E l'espace des polynomes à une indéterminée. Soit T et D de $L(E)$ définis par $T : P(X) \mapsto XP(X)$ et $D : P(X) \mapsto P'(X)$. Montrer que pour toute norme T ou D n'est pas continu.

24)**(X08) **Additif et borné donne linéaire.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $f : E \to E$ une application *additive* ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) et *bornée* sur $B'(0,1)$. Montrer que f est continue et linéaire. *Indication: prouver d'abord par récurrences que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour λ rationnel, puis que f est continue en 0 par l'absurde.*

25)** **Norme subordonnée.** On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|x\|_\infty = \mathrm{Sup}\,|x_i|$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\| = \mathrm{Sup}_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.

a) Montrer que $\|A\| = \mathrm{Sup}_i \big(\sum_j |a_{ij}|\big)$ et que c'est une norme d'algèbre.

b) Soit alors A à dominance diagonale stricte:

$$\delta = \mathrm{Inf}_i \big(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\big) > 0$$

Montrer que: $\|A^{-1}\| \leqslant 1/\delta$.

26)**(X09) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, u tel que $Au = b$, δA et δu tels que $(A + \delta A)(u + \delta u) = b$.

Montrer que: $\exists C(A)$ tel que $\frac{\|\delta u\|}{\|u+\delta u\|} \leqslant C(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

Montrer que: $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})\ \exists b \neq 0\ \exists \delta A \neq 0\ \frac{\|\delta u\|}{\|u+\delta u\|} = C(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

27)**(X07) **Dual de ℓ^1.** Dans $E = \ell^1$, on nomme e_n la suite $(\delta_{p,n})_{p\in\mathbb{N}}$, on considère $\varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire continue et on pose $K_n = \varphi(e_n)$.

a) Question de cours: applications linéaires continues.

b) Montrer que ℓ^1 est complet.

c) Montrer que (K_n) est bornée et que $\|\varphi\| = \operatorname{Sup}|K_n|$.

d) Montrer qu'il existe une application bijective et bicontinue $J : \mathcal{LC}(E, \mathbb{R}) \to \ell^\infty$.

e) (non posée) Pareillement, démontrer que le dual topologique de $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ (l'espace des suits de limite nulle) peut être identifié à ℓ^1. *Remarque: ceci redémontre que ℓ^1 est complet.*

f) Soit (y_n) une suite bornée de ℓ^1. Peut-on toujours en extraire une sous-suite convergente ? (en d'autres termes, ℓ^1 est-il localement compact ?)

28)**(M09) Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup et $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continue et strictement croissante. Pour $f \in E$, on définit $g = T(f)$ par $g(x) = \int_0^1 \operatorname{Inf}(x, \varphi(t)) f(t)\,\mathrm{d}t$. T est-il un endomorphisme de E? Est-il continu? Quelle est sa norme ? *Indication: on peut exprimer $g(x)$ en coupant l'intégrale, ou comme une intégrale double.*

29)**(E08) **Formes linéaires continues et hyperplans.** Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E.

a) Montrer que φ est continue si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.

b) Soit un point a de E. Donner une expression simple de la distance $d(a, \operatorname{Ker}\varphi)$.

c) Plus généralement, montrer que si f est linéaire de E dans G de dimension finie, f est continue si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est fermé.

30)*(C02) Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles, muni de la norme uniforme, et F le sous-espace de E formé des fonctions dérivables en 0.

a) Montrer que $\bar{F} = E$; E est-il complet ?

b) On introduit, pour $f \in F$, $N(f) = |f(0)| + \operatorname{Sup}_{x\in]0,1]} \left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|$. Montrer que N est une norme sur F; comparer N et $\|\cdot\|_\infty$ et montrer que l'espace (F, N) est complet.

31)*(C02) **a**) Soit E un espace vectoriel normé, $B'(a,r)$ et $B'(a',r')$ deux boules fermées. À quelle condition (nécessaire et suffisante) a-t-on $B'(a,\, r) \subset B'(a',\, r')$?

b) On suppose E complet. Soit $(B'_n)_{n\geqslant 0}$ une suite *décroissante* de boules fermées. Montrer que $\bigcap_{n\geqslant 0} B'_n$ est une boule fermée.

32)**(L04) **Un espace non séparable.** Soit S un ensemble infini et $E = \big(\mathcal{B}(S, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ Montrer qu'aucune partie A de E ne peut être à la fois dénombrable et dense. *Indication: considérer $D = \big\{f \in E \ /\ f(S) \subset \{0,1\}\big\}$: est-il dénombrable ? que vaut la distance de deux éléments de D ?*

33)**(U06) Soit S la sphère de $\mathbb{R}^3$ euclidien d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = n^2$. Montrer que l'ensemble S' des points de S à coordonnées rationnelles est dense dans S.

34)*(M02) ***$F = G_\delta$* et *$G = F_\sigma$*.** Montrer que tout fermé d'un espace vectoriel normé E peut être vu comme intersection d'une suite d'ouverts, et vice-versa. *Indication: Introduire $V(F,r) = \{x \in E \ /\ d(x,F) < r\}$.*

35)* **Diamètre d'un partie bornée.** Soit A une partie bornée de E, et soit $\delta(A) = \operatorname{Sup}_{x,y\in A} d(x,y)$. Montrer que $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

36)* **Distance d'un point à une partie.** **a**) A désignant une partie non vide de E, prouver que: $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

b) On définit la distance de deux parties non vides A et B ainsi: $d(A,B) = \operatorname{Inf}_{x\in A, y\in B} d(x,y)$. Montrer que $d(A,B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

37)**(U02) **Distance de Hausdorff.** Soit une partie A non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $d_A(x) = d(x,A)$.

a) Soit deux parties non vides A, B de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\overline{A} = \overline{B}$ équivaut à $d_A = d_B$.

b) On note $\rho(A,B) = \operatorname{Sup}_{y\in\mathbb{R}^n} \|d_A(y) - d_B(y)\|$, valant éventuellement $+\infty$ au cas où ces différences ne serient pas bornées.

Montrer que l'on a $\rho(A,B) = \operatorname{Max}\big(\operatorname{Sup}_{x\in A} d_B(x), \operatorname{Sup}_{x\in B} d_A(x)\big)$. *Indication: étant donné x de E, on peut approcher $d(x,A)$ par une $d(x,a)$ pour a dans A et $d(x,B)$ par une $d(x,b)$ pour b dans B.*

38)* Soit A l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire sous la forme $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)^{n+p}$, n et p étant des entiers positifs. Déterminer $\overline{A}$.

39)* Soit A une partie de E. On pose: $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$. Montrer que $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$. Combien de parties différentes (au plus) peut-on créer à partir de A en utilisant les opérations d'adhérence et d'intérieur (réitérées)? *Indication: tout en inclusions, pas de ε...; faire des exemples.*

40)* **Ouverts de $\mathbb{R}$.** Montrer que tout ouvert A de $\mathbb{R}$ peut s'écrire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, les I_n étant des intervalles ouverts deux à deux disjoints (éventuellement vides). Qu'en est-il dans $\mathbb{R}^2$ (remplaçant intervalle par carré) ? *Indication: ces intervalles peuvent provenir d'une relation d'équivalence sur A.*

41)**(E05) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (ces espaces munis des normes-produit). Démontrer que f est ouverte (i. e. transforme des ouverts en ouverts) si, et seulement si f est surjective. *Indication: la norme du max associée à une base a pour boules des parallélépipèdes.*

42)**(C05) **Théorème du point fixe à paramètre.** Soit $k \in]0,1[$ et une famille d'applications f_a de E dans E (avec $a \in E$) telles que: $\|f_a(x) - f_a(y)\| \leqslant k.\|x-y\|$ pour tous $x, y \in E$. On suppose *aussi* que pour tout x fixé l'application $a \mapsto f_a(x)$ est continue. Prouver que chaque f_a possède un unique point fixe m_a et que l'application $a \mapsto m_a$ est continue. Puis affaiblir les hypothèses en supposant juste qu'il existe un entier p (indépendant de a) tel que $g_a = (f_a)^p$ soit contractante de rapport k.

43)**(L02) Soit φ un morphisme de groupes continu du groupe $\mathbb{U}$ des dans $GL_n(\mathbb{R})$; montrer que $\det\big(\varphi(t)\big) = 1$ et que le spectre de $\varphi(t)$ est inclus dans U.

44)**(X02) **Le théorème de Baire.** **a**) Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et une suite (U_n) d'ouverts de $\mathbb{R}$, non vides, tels que, pour tout n, $I \subset \overline{U_n}$. Montrer qu'il existe au moins un point a appartenant à I et à tous les U_n.

Indication: commencer par $I \cap U_1$ et $I \cap U_1 \cap U_2$.

b) Soit une suite (G_n) d'ouverts de $\mathbb{R}$, tous denses dans $\mathbb{R}$. Montrer que leur intersection est dense dans $\mathbb{R}$.

c) On reprend I considéré au début. Montrer qu'il n'est pas possible d'écrire $I = \cup_n F_n$, les F_n étant une suite de fermés d'intérieurs vides.

d) On considère à présent une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, et on suppose que pour tout $x > 0$ l'on a $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ (n étant entier). Montrer que si f est uniformément continue alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Ce résultat subsiste-t-il si f est discontinue ?

e) À l'aide de la question 3, étendre le résultat de la question précédente au cas où f est seulement supposée continue.

45)**(L08) Soit φ une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et $T(\varphi)(t) = \operatorname{Inf}_{s\in[0,1]} \varphi(s) + |t-s|$.

a) Montrer que $T(\varphi)$ est continue (et même lipschitzienne).
b) Montrer que T est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ (et même lipschitzienne).
c) Quels sont les points fixes de T ?
d) Que peut-on dire de $T \circ T$?

46)***(X05) **Le théorème de Banach-Mazur.** Soit T une application isométrique (c'est-à-dire, telle que $\|T(a) - T(b)\| = \|a-b\|$) d'un e.v.n. réel E sur un e.v.n. réel F ($F = f(E)$). On se propose de montrer que f est linéaire à une constante près.

a) Soit $g : E \to F$ continue telle que, pour tout x, y : $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(g(x)+g(y))$. Montrer que g est affine (on montrera que h définie par $h(x) = g(x) - g(0)$ est linéaire).

b) Soit $(a,b) \in E \times E$. On définit (B_n) par récurrence par:

$$B_1 = \left\{x \in E \ / \ \|x-a\| = \|x-b\| = \frac{1}{2}\,\|b-a\|\right\}$$

$$B_n = \left\{x \in B_{n-1} \ / \ \forall y \in B_{n-1} \ \|x-y\| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta(B_{n-1})\right\}$$

(δ étant le diamètre). Montrer que: B_n est convexe, non vide, fermé, borné, symétrique par rapport à $(a+b)/2$. *Indication: il est commode de translater l'ensemble pour se ramener au cas où $a = -b$.*

c) Montrer que $\frac{a+b}{2}$ est l'intersection des B_n.

d) Montrer que T conserve les milieux. Conclure.

e) Que dire de l'application $T : (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$ telle que $T(x) = (x, |x|)$?

47)*(?00) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe une g continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ $\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y} = g(x)$.

48)**(X06) **Module de continuité.** Soit φ une fonction réelle, définie et continue sur $I = [a,b]$. A cette fonction φ est associée la fonction ω_φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\omega_\varphi(h) = \mathrm{Sup}\{|\varphi(x) - \varphi(y)|; (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant h\}\,.$$

a) Montrer que ω_φ est définie et croissante.

b) Soient $h, h' > 0$. Montrer que $\omega_\varphi(h+h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.

c) Soient $h, \lambda > 0$, et $n \geqslant 1$ entier. Montrer les relations suivantes:

$$\omega_\varphi(nh) \leqslant n\omega_\varphi(h); \quad \omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (1+\lambda)\omega_\varphi(h)\,.$$

d) Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$.

e) Montrer que ω_φ est continue.

49)**(M00) Soient f, g deux fonctions continues sur $[0,1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f admet un plus grand et un plus petit élément.

b) Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

50)*(C00) Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $f(xf(y)) = yf(x)$ pour tous x et y.

a) Montrer que f est involutive.

b) Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

c) Déterminer f.

51)*(C02) On se place dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme arbitraire.

a) Montrer que l'ensemble des matrices de rang supérieur ou égal à $k+1$ est un ensemble ouvert.

b) Calculer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang k.

52)**(X02) Soit $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si il existe une suite de limite nulle de matrices M_n semblables à M.

53) Soit S l'ensemble des matrices de symétries: $S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^2 = I_n\}$. Déterminer $\overline{S}$ et $\overset{\circ}{S}$. *Indication: on peut considérer l'application $\Phi : A \mapsto A^2 - I_n$. On peut éventuellement parler de valeurs propres, de trace, ou de sinus, cosinus.*

54)**(X08) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans la boule de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de centre I_n et de rayon $r < 1$, la norme étant subordonnée à la norme canonique de $\mathbb{C}^n$. Que peut-on dire de G ?

Existe-t-il des sous-groupes bornés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ autres que $\{I_n\}$?

55) Matrices unipotentes. Soit H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant une certaine puissance égale à I_n. Montrer que $\overline{H}$ est exactement l'ensemble des matrices ayant toutes leurs valeurs propres de module 1.

56)**(M07) Soit F l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F, et montrer que F n'a pas de point isolé. Calculer aussi la distance de F à I_n si on prend pour norme d'une matrice A: $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t AA)}$

57)**(X06) Soit un sous-groupe fermé G de $SL_2(\mathbb{R})$ (matrices de déterminant 1), non commutatif, tel que $-G = G$ et tel que si $G_0 = G \setminus \{I, -I\}$ alors $\forall M \in G_0$ $|\mathrm{tr}(M)| > 2$. Montrer que G_0 est fermé.

58)**(U08) Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que l'image par P d'un fermé de $\mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$. Et pour un ouvert ?