Exercices de topologie (II)

1)**(E00) Théorème de D'Alembert-Gauss.

a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, et f une application continue de E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$. Montrer que $|f|$ admet et atteint son minimum sur E .

b) Montrer que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

2)**(X07) **Autour des îles.** Soient U et V deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé E . Montrer qu'il existe deux ouverts U' et V' disjoints et tels que $U \subset U'$, $V \subset V'$.

3)**(X96) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes: (i) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$

(ii) Pour tout compact K , $f^{-1}(K)$ est compact.

4)*(M08) **Contractions d'un compact.** Soit K un compact inclus dans un espace vectoriel normé E .

a) Soit f une application de K dans K telle que pour tous x et y distincts: $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Démontrer que f a un point fixe unique. *Indication: utiliser $g(x) = d(x, f(x))$*

b) Démontrer que ce point fixe a est limite de toute suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$. *Indication: vérifier que a est valeur d'adhérence de u_n , et que la suite $d(a, u_n)$ converge.*

c) Étudier le contre-exemple: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

5)***(L05) **Isométries d'un compact.** Soit K un compact inclus dans un espace vectoriel normé E , et une application f de K dans K telle que pour tous x et y : $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tous x, y il existe un entier p tel que $d(x, f^{(p)}(x)) < \varepsilon$ et $d(y, f^{(p)}(y)) < \varepsilon$. En déduire que f est une isométrie, puis que f est surjective (donc bijective). *Indication: on peut faire des suites extraites; noter que si $x_n = f(x_{n-1})$ alors $x_p = f^k(x_{p-k})$; poser $p = \varphi(n)$, $k = \varphi(n_0)$*

6)***(U08) Caractérisations des normes strictes.

Soit N une norme sur un K -espace vectoriel E . Montrer l'équivalence de:

i. Si x et y sont tels que $N(x + y) = N(x) + N(y)$ alors x et y appartiennent à une même demi droite réelle.

ii. Pour tout sous espace de dimension finie F et tout x , il existe une seule meilleure approximation de x par un vecteur de F . *Indication: il s'agit en fait d'un problème plan; revoir le cours sur les qualités topologiques des e.v.n. de dimension finie; F est fermé ?*

7)*(C99) **Plus courte distance.** Soient A, B deux parties de E . Soit A un compact de E , et $x \in E$; montrer que $d(x, A)$ est atteinte pour un certain a de A . Montrer que $d(A, B)$ est atteinte en des points $a \in A$ et $b \in B$ si A et B sont compacts.

8)**(M03) **Points fixes d'une fonction lipschitzienne.** Soit A un compact convexe d'un espace normé réel, et f une application 1-lipschitzienne de A dans A . on choisit x_0 de A et on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0) + (1 - \frac{1}{n})f(x)$.

a) Montrer que chaque f_n possède un point fixe unique noté x_n .

b) Montrer que $\inf_{y \in C} \|f(y) - y\| = 0$.

c) Montrer que f possède au moins un point fixe. *Indication: considérer une valeur d'adhérence de (x_n) .*

d) On suppose l'espace euclidien. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est convexe.

e) Contre-exemple dans le cas général.

9)**(C08) **Plus courte distance.** Soient A, B deux parties d'un espace normé E de dimension finie. Soit $x \in E$ et A une partie fermée de E ; montrer que $d(x, A)$ est atteinte pour un certain a de A . Plus généralement, montrer que si B est compact, $d(A, B)$ est atteinte en des points $a \in A$ et $b \in B$. *Indication: on peut utiliser des suites extraites. Que dire de l'exemple suivant: $E = \mathbb{R}[X]$, si $P = \sum a_i X^i$, $\|P\| = \max |a_i|$, $x = X$, $A = \{P / P(\frac{1}{2}) = 0\}$?*

- 10)**(C09) Trois petits compacts.** Soient K_1, K_2, K_3 des compacts non vides du plan, tels qu'aucune droite ne les coupe simultanément. Montrer qu'il existe un cercle de rayon minimum les coupant tous les trois.
- 11)**(U09) Rayon et diamètre.** Soit A une partie bornée d'un espace euclidien E de dimension n et $\delta(A)$ son diamètre.
On désigne par $R(A)$ la borne inférieure des rayons des boules contenant A . Comparer $\delta(A)$ et $R(A)$.
- 12)**(X06) Une lunule.** Soient deux points A et B du plan réel, et K un compact ne coupant pas la droite (AB) . Soit F l'ensemble de réels r tels qu'il existe un cercle de rayon r , passant par A et B , et rencontrant K . Montrer que F est borné et contient ses bornes.
- 13)**(C99) Disques dans un compact.** On considère un compact K inclus dans un plan euclidien E , d'intérieur non vide.
- On suppose, dans cette question, que K est un triangle (plein). Montrer qu'il existe un point M qui est centre d'un disque de rayon maximal inclus dans K ; quel est ce point ?
 - Montrer qu'en général K contient toujours au moins un disque de rayon maximal.
 - Qu'en est-il si K n'est plus supposé compact ?
- 14)**(M03) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$;** montrer l'existence et l'unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant K .
- 15)**(X07) Itération convergente.** Soit f une application continue de E dans E (espace normé de dimension finie). On suppose que la suite (u_n) définie par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ a une seule valeur d'adhérence notée ℓ .
- Montrer que ℓ est point fixe de f et qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que si $d(a, x) \leq \alpha$ alors $d(a, f(x)) \leq 1$.
 - Soit K la couronne définie par $d(a, y) \in [\alpha, 1]$. Montrer qu'à partir d'un certain rang $u_n \notin K$ et qu'en fait $d(a, u_n) < \alpha$. En déduire la convergence de (u_n) .
- 16)**(E99) Théorème de Riesz.** Soit A un sous espace d'un espace vectoriel normé E . On suppose A différent de $\{0\}$ et de E et de dimension finie. Prouver qu'il existe un vecteur $a \in E$ de norme 1 et tel que la distance de a à A soit égale à $\frac{1}{2}$. En déduire que si F est un e.v.n. de dimension infinie, alors les boules de F ne sont pas compactes. *Indication: construire une suite de points (a_n) de F telle que $d(a_n, a_p) > \frac{1}{2}$ pour tous p et q distincts.*
- 17)**(L05) On note $(\mathbb{U}, \times)$ le groupe unimodulaire (des complexes de module 1).** Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$, puis de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$.
- 18)**(M03) Projections continues.** Soit E un espace vectoriel normé, p un projecteur de E continu non nul.
- Montrer que $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont fermés.
 - On suppose $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ complets. Montrer que E est complet.
 - Que dire de $\|p\|$?
 - Et si $\|p\| = 1$?
- 19)**(M03) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et l'endomorphisme τ qui au polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$.**
- Quels sont les valeurs propres de τ ?
 - Vérifier que $\| \cdot \| = \|_P \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}^+} |P(x)e^{-x}|$ définit une norme sur E .
 - Montrer que τ est continu pour cette norme et que $\|\tau\| \leq e$.
 - Calculer enfin $\|\tau\|$ en utilisant $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.
- 20)**(C03) On note E l'ensemble des suites complexes tendant vers 0, $\| \cdot \| = \|_u \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.**
- Montrer que φ définie sur E par $\varphi(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{2^n}$ est continue et calculer sa norme.
 - Que vaut $\varphi(u)$ pour $u_n = \frac{1}{n+1}$? Quelle est la distance de u à $H = \text{Ker } \varphi$?
 - Construire une suite telle que sa distance à H soit au plus égale à $1,5d(u, H)$.

- 21)**(C99) Primitivation.** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup. On pose, pour $f \in E$: $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.
- Montrer que T est un endomorphisme continu de E .
 - Montrer que $\forall g \in E \exists ! f \in E / f - Tf = g$ (on cherchera f comme somme de série).
Montrer que $\text{Id} - T$ est un homéomorphisme.
- 22)***(X) Dual de ℓ^1 .** Dans $E = \ell^1$, on nomme e_n la suite $(\delta_{p,n})_{p \in \mathbb{N}}$, on considère $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire continue et on pose $K_n = \varphi(e_n)$.
- Question de cours: applications linéaires continues.
 - Montrer que ℓ^1 est complet.
 - Montrer que (K_n) est bornée et que $\|\varphi\| = \text{Sup } |K_n|$.
 - Montrer qu'il existe une application bijective et bicontinue $J : \mathcal{L}\mathcal{C}(E, \mathbb{R}) \rightarrow \ell^\infty$.
 - (non posée) Pareillement, démontrer que le dual topologique de $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ (l'espace des suites de limite nulle) peut être identifié à ℓ^1 . *Remarque: ceci redémontre que ℓ^1 est complet.*
 - Soit (y_n) une suite bornée de ℓ^1 . Peut-on toujours en extraire une sous-suite convergente ? (en d'autres termes, ℓ^1 est-il localement compact ?)
- 23)**(M09)** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup et $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et strictement croissante. Pour $f \in E$, on définit $g = T(f)$ par $g(x) = \int_0^1 \text{Inf}(x, \varphi(t)) f(t) dt$. T est-il un endomorphisme de E ? Est-il continu? Quelle est sa norme ? *Indication: on peut exprimer $g(x)$ en coupant l'intégrale, ou comme une intégrale double.*
- 24)**(X03) Applications à peu près linéaires.** Soit E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés, F étant complet. Soit f application continue de E dans F , telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant: $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq M$.
- Dans le cas $M = 0$, montrer que f est linéaire. Serait-ce encore le cas si $\mathbb{R}$ était remplacé par $\mathbb{C}$ (justifier la réponse) ?
 - On suppose $M > 0$. Soit v_n définie par $v_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Montrer que la suite (v_n) converge simplement; soit $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x)$.
 - Montrer que g est une application linéaire continue et qu'elle est l'unique application telle que $\|g(x) - f(x)\|$ soit bornée.
- 25)***(X01)** Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. E muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ est-il complet ?
- 26)**(M00)** L'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est-il complet muni de la norme de la convergence uniforme ? Et muni de $\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$?
- 27)***(U02) Théorème de Baire.**
- Soit E un espace de Banach ; montrer que si $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses, alors leur intersection est dense. Est-elle nécessairement ouverte ?
 - Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}[X]$ qui le rende complet ?
 - Existe-t-il une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue ailleurs ?
- 28)**(E06)** Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension ≥ 2 et f une application continue de E dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E, f^{-1}(x)$ est compact. Montrer que f atteint son minimum ou son maximum sur E .
- 29)***(U05)** Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Montrer que le complémentaire d'un hyperplan dense est connexe par arcs. Et le complémentaire d'un hyperplan fermé ? Que peut-on dire si le corps de base est $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$?
- 30)***(L06)** Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (on admettra que ce groupe est engendré par les transvections et dilatations). Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est la réunion de deux ouverts connexes par arcs "maximaux" (c'est-à-dire que toute partie connexe par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ est inclus edans l'un des ces deux ouverts).
- 31)**(M05)** On pose $\Gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x}), x > 0\}$. Montrer que Γ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$, mais que son adhérence ne l'est pas.

- 32)***(U02)** Soit G un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$ (i.e. $\forall (g, g') \in G \times SO_3(\mathbb{R}), g'^{-1}gg' \in G$). On note G_0 la composante connexe par arcs de id dans G
- Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
 - Montrer que G_0 est distingué dans G .
 - Etablir que si $G_0 \neq \{id\}$, alors G_0 contient une rotation d'angle π . En déduire que $G_0 = SO_3(\mathbb{R})$.
 - Prouver que $G = id$ ou $SO_3(\mathbb{R})$.
- 33)***(X05) Théorème de Carathéodory.** Soit A un epartie non vide de $\mathbb{R}^n$, et C son enveloppe convexe (i.e. l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A).
- Montrer que C est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'au plus $n + 1$ points de A .
 - Montrer que si A est compacte, C aussi.
- 34)*(C00)** Montrer que sur chaque méridien terrestre il existe deux points antipodaux où la température est la même.
- 35)**(M05)** Existe-t-il une fonction continue injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, avec $n \geq 2$?
- 36)***(X08)** Soit K un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé E , et T un endomorphisme continu de E tel que $T(K) \subset K$. Soit $a \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k(a)$.
- Montrer que T admet un point fixe dans K .
 - Soit U un endomorphisme continu de E commutant avec T et stabilisant K . Montrer que T et U ont un point fixe commun dans K .
- 37)**(E08) Convergence en moyenne.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que (A^p) soit bornée et $B_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- Montrer que $\text{Ker}(A - I) \oplus \text{Im}(A - I) = \mathbb{C}^n$.
 - Montrer que la suite (B_p) converge vers une matrice de projecteur; rattacher image et noyau de ce projecteur à ceux de $A - I$.
- 38)***(U04)** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (ces espaces munis des normes-produit). Démontrer que f est ouverte (i. e. transforme des ouverts en ouverts) si, et seulement si f est surjective. *Indication: dans un ouvert on peut caser de petits parallélépipèdes, en lien avec des bases de l'espace.*
- 39)**(X04)** Soit E un $\mathbb{R}$ -evn de dimension ≥ 2 . Démontrer que pour tout $x \in E$ il existe y de norme 1 tels que $\|x + y\| = \|x - y\|$. *Indication: Considérer z indépendant de x , $m(t) = \cos tx + \sin tz$, $p(t) = \frac{m(t)}{\|m(t)\|}$.*