Exercices sur les dérivées

Existence et calcul 1)(M97) Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, telle que $f(t) = f(0) + tf'(t) + \mathcal{O}(t^2)$ au voisinage de 0. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

2)(X99) **Polynômes de Legendre.** $L_n(x) = \frac{2^{-n}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$.

a) Montrer que (L_n) constitue une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ sur l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$.

b) Quelle est la norme de L_n ?

c) Montrer que $L_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k} (x-1)^k$.

d) Montrer que $L_n(x) = \frac{2n-1}{n} x L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} L_{n-2}(x)$.

3)(C05) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k}$.

b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $f(0) = 0$, Montrer que la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{np} f(\frac{1}{n+k})$ converge et exprimer sa limite en fonction de ℓ ; calculer ℓ à partir des question précédentes pour $f(x) = \ln(1+x)$.

c) On suppose seulement que f est continue et $f(0) = 0$; trouver un exemple de fonction f telle que (v_n) diverge.

d) Trouver un équivalent de v_n quand on suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

4)(M03) Soit $f_n(x) = \frac{2x}{1+e^{nx}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Les $D^k f(0)$ sont-ils des entiers? Peut-on prévoir leurs signes?

5) Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0, $a \neq \pm 1$ et $T(a, h) = \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h}$; on suppose que $\lim_{h \rightarrow 0} T(a, h) = L$ existe. Montrer que $f'(0)$ existe et la calculer en fonction de L .

6)(X97) **Prolongement des quotients.** a) Soit f une application $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$.

Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$. Quelles qualités possède g ?

b) Plus généralement, soit f une application $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ telle que $f(x) \sim x^p$ en 0 (avec $p \in \mathbb{N}^*$) et $g(x) = x^{-p} f(x)$ pour $x > 0$, prolongée par limite en 0. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$. *Indication*: par Taylor-Young on a des DL pour $f^{(k)}$ et Leibniz donne un DL de $g^{(k)}$; ou remplacer $\mathcal{C}^\infty$ par $\mathcal{C}^n$ et faire une récurrence sur n ; ou encore examiner $\int_0^1 f'(tx) dt$.

Théorèmes de Rolle et Accroissements Finis

7) Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et s'annulant en n points distincts de $[a, b]$: $a_1, \dots, a_n$. Montrer

que: $\forall x \in [a, b], \exists c \in [a, b], f(x) = (x-a_1) \dots (x-a_n) \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$. On pourra considérer le nombre A tel que $f(x) = A(x-a_1) \dots (x-a_n)$ et la fonction: $t \mapsto f(t) - A(t-a_1) \dots (t-a_n)$. *Application*. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, montrer que pour tout x de $[a, b]$, il existe c dans $[a, b]$ tel que: $f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$.

8)(M03) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f de $I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

a) Montrer que, si f s'annule en n points de I , alors $D^{n-k} f$ s'annule en au moins k points de I .

b) En déduire une remarque quant au nombre de solutions de l'équation $P(n) = e^n$ où P est un polynôme. Peut-on en dire plus?

9)(X97) **Un variante des splines.** a) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Montrer que pour tout x réel il existe ξ tel que $f(x) = \frac{D^4 f(\xi)}{24} x^2(1-x)^2$. Ce résultat demeure-t-il si f est à valeurs complexes?

b) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et une subdivision $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, polynomiale de degré 3 au plus sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et telle que $\varphi(x_i) = f(x_i), \varphi'(x_i) = f'(x_i)$.

c) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$. Montrer que

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \frac{\|D^4 f\|_\infty}{384} \sup_i (x_{i+1} - x_i)^4.$$

10)(X) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$, et

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & x_n \\ x_0^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \Delta_f(x_0, \dots, x_n)$$

Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\Delta_f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Complément: $\Delta_f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est une combinaison linéaire de $f(x_0), \dots, f(x_n)$ (à exprimer!) connue sous le nom de **différences divisées** (voir par exemple pour $n = 1$). On pourra prouver par récurrence que les différences divisées se construisent ainsi: $\Delta_f(x_0, \dots, x_n) = \Delta_g(x_1, \dots, x_n)$ avec $g(x) = \Delta_f(x_0, x)$ et aussi selon: $\Delta_f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Delta_h(x_{n-1}, x_n)$ avec $h(x) = \Delta_f(x_0, \dots, x_{n-2})$.

Majoration des dérivées 11) Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans un evn E , bornée et telle que $D^2 f$ soit bornée. Soit $m_i = \sup_{\mathbb{R}} \|D^i f(x)\|$. Montrer que: $m_1^2 \leq 2m_0 m_2$.

Indication: majorer $\|Df(0)\|$ suffit; utiliser Taylor entre 0 et x , puis 0 et $-x$.

12)(M97) Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et telles que $\|f''\|_\infty \leq 1$. Soit pour $f \in E$: $A(f) = f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)$. Montrer que A est bornée et déterminer la borne supérieure.

13) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$, et $M = \|f''\|_\infty$. Montrer que $\|f'\|_\infty \leq M \frac{b-a}{2} + \frac{|f(b)-f(a)|}{b-a}$, et cas d'égalité. *Indication*: $(b-a)f'(t) = (b-t)f'(t) - f(b) + f(t) - f(t) + f(a) + (t-a)f'(t) - f(a) + f(b)$.

14)(M97) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x on a ait $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$. Soit $g = |f|$.

a) Montrer que si f est dans $\mathcal{F}$ alors g y est aussi.

b) Soit f un élément de $\mathcal{F}$ ayant une dérivée seconde bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe A tel que $f'(x)^2 \leq A|f(x)|$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *Indication*: considérer $g(x) + hg'(x) + \frac{h^2}{2} M$.

c) Soit f un élément de $\mathcal{F}$ et K un compact de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe A tel que $f'(x)^2 \leq A|f(x)|$ pour tout x de K .

Comportement asymptotique des dérivées 15)(M05) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ telle que f ait une limite en $+\infty$ et f'' soit bornée. Existence d'une limite pour f' ? Même question, supposant seulement que f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

16) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ où L est un nombre réel.

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

Équations fonctionnelles

17)** Caractériser f réelle et continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in$

$$\mathbb{R}^2, \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = f(x)f(y).$$

18)**(M) Trouver f continue telles que $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$.

19)(E99) Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \forall y f(x) - f(y) = (y-x)f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

20) Déterminer f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)f(-y)$. Et si f est continue?

21)(X) Déterminer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ pour $xy \neq -1$.

Indication : une fonction usuelle est solution ; f peut-elle s'annuler ? par des changements de variable/fonction se ramener à l'équation fonctionnelle $g(u+v) = g(u) + g(v)$. Ou changer de variable en posant $x = \frac{1-t}{1+t}$ (justifier).

22)(M) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe g continue telle que : $f(x+y) - f(x-y) = 2yg(x)$ pour tous x, y . Montrer que f est dérivable et déterminer f .

Convexité 23) Soit $\sigma = (a_0 = a < a_1 \dots < a_n = b)$ un partage de $[a, b]$ et $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont affines sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Quelles sont les fonctions convexes de $\mathcal{F}$? Indication : base de $\mathcal{F}$ formée des fonctions $x \rightarrow |x - a_i|$.

24)(U05) Soit $a > 0$ et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $\frac{1}{g}$ est convexe.

a) Montrer que $\frac{g(x) - xg'(x)}{g(x)} \leq \frac{g(x)}{g(2x)}$.

b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, convexe, croissante, non constante et équivalente à g en $+\infty$. Montrer que $\exists A / \forall x \geq A, \frac{xg'(x)}{x} \geq \frac{1}{3}$.

c) Montrer que

$$\exists B / \forall x \geq B, \forall h \in]0, \frac{x}{2}[, \begin{cases} hf'(x) \geq (1-B)g(x) - (1+B)g(x-h) \\ hf'(x) \leq (1+B)g(x+h) - (1-B)g(x) \end{cases}$$

25)(C03) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^+$; montrer que $x \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe.

26)(X) Soit f une application convexe de $\mathbb{R}^{++}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$

b) Montrer que, si $\ell \leq 0$, f est décroissante.

c) Montrer que, si $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - lx$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

27)(X) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f' croissante. Soit $S = \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(t)dt$. Montrer que, pour tout $n \geq 2, 0 \leq S \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1))$.

28) Soit (u_n) une suite de fonctions convexes sur $]c, d[$ On suppose que (u_n) converge simplement vers u dans I . Montrer que la convergence est uniforme sur tout $[a, b] \subset]c, d[$.

Divers 29)(U-L01) Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ les racines de P' , $y_1 < y_2 < \dots < y_q$ les racines de Q' . Montrer que $p = q$ et les multiplicités de x_i et y_i sont égales si et seulement si il existe un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant f tel que $P \circ f = Q$.

30)(U99) **Fonctions stables.** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue, est dite *stable* si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bijectives telles que $f + \varepsilon\varphi = g_1 \circ f \circ g_2$. Etudier la stabilité de $f : x \mapsto x^2$ et de $f : x \mapsto x^3$.

31)(X03) Calculer $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$.

32)(M03) Calculer la limite en 0 de $\frac{(x^x)^x}{x^x - 1}$.

33)(L03) Trouver $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f \circ \dots \circ f = \text{id}$.