Suites et séries de fonctions

- 1)**(M09) Soit $F_n(x) = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n + kx)^{1/n}$ où $x \geq 0$. Montrer que F_n converge vers F continue sur $\mathbb{R}_+$.
- 2)**(X07) **Produit infini du sinus.** a) Justifier la formule $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ pour z complexe. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{C}$, ou sur les disques ? *Indication: montrer que $\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$.*
b) En déduire une suite de polynômes qui converge vers le sinus.
c) En déduire que $\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ pour tout x réel. La convergence est-elle uniforme ?
Indication: factoriser les polynômes vus précédemment et encadrer.
d) Reprendre l'étude dans le cadre complexe.
- 3)**(M09) Convergence et limite de la suite de fonctions (f_n) : $f_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}$. *Indication: distinguer suivant la position de x par rapport à 2.*
- 4)*(C01) Étudier $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.
- 5)*(C05) Discuter, selon les valeurs de x et $\alpha \notin \mathbb{N}^*$, de la nature de la série de terme général $u_n(x) = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{(1+\alpha) \dots (2n-1+\alpha)} x^n$. Donner les α tels que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Donner les α tels que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-1, 0]$.
- 6)*(C03) Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-x)^n}{n^\alpha}$, avec α appartenant à $\mathbb{R}$.
a) Sur quel domaine D a-t-on convergence simple ?
b) Sur D a-t-on S continue ?
- 7)**(C03) Montrer que $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt})$ est bien définie pour $t > 0$. Montrer qu'il existe C et α tels que $f(t) \sim \frac{C}{t^\alpha}$ quand $t \rightarrow 0$.
- 8)*(M03) Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\text{Arctan}(k+x) - \text{Arctan } k)$; donner le domaine de définition de f ; montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine; déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
- 9)*(C03) **Fonction ζ .** Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$.
a) Existence, continuité, dérivabilité(s) et sens de variations de ζ .
b) Équivalent au voisinage de 1^+ .
c) Trouver (deux méthodes) la limite de ζ en $+\infty$, puis un équivalent en $+\infty$.
d) Généralisation: montrer que $\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est équivalent à $\frac{1}{p^x}$ au voisinage de $+\infty$.
e) Calculer $f(3), f(3,5), f(4)$ à 10^{-6} près.
f) Pour $5/2$: étudier l'intégrabilité de $x(\zeta(x+1) - 1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 10)**(X03) On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$.
a) Pour quelles valeurs de t l'application f est-elle définie ? On notera E cet ensemble.
b) f est-elle continue sur E ?
c) f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? Indéfiniment dérivable ?
- 11)**(M07) Étudier le domaine de définition D de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+nx^2)}}$, la continuité de f sur D , l'intégrabilité de f sur D .

- 12)* (C07) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^a}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1]$).
- Pour $b \in \mathbb{R}$, trouver la limite de $n^b u_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
 - Sur quel ensemble la série $\sum u_n$ converge ?
 - Pour quels a la série $\sum u_n$ converge uniformément ?
 - Y a-t-il convergence normale ?
 - Calculer la somme de la série.
- 13)** (X08) Soit $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1+n^4 x^4}$; $g_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p)$, où (a_p) est une suite réelle, est-elle définie ? Étudier les convergences uniforme et simple de la suite (g_n) . Montrer que (g_n) converge uniformément sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p \notin [a, b]$.
- 14)** (L07) Soit $S(x) = \sum_2^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$. a) Convergence de cette série ? Réponse: convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, bien que non normale: on peut majorer le reste par une intégrale.
- Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
 - Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 15)** (C08) On note $C_x^n = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, avec $C_x^0 = 1$.
- Équivalent de C_x^n lorsque $n \rightarrow +\infty$?
 - Convergence de $\sum_n C_x^n$?
 - Montrer la convergence est uniforme sur tout compact de $] -1, +\infty[$.
 - Montrer que $\forall x, y \quad C_{x+y}^n = \sum_{p+q=n} C_x^p C_y^q$.
 - Montrer que $2^x = \sum_{n=0}^{\infty} C_x^n$ pour $x > -1$.
- 16)** (M07) Soit $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ et $r > 0$. Montrer:
- $$\exists q \in \mathbb{N} / \forall n \geq q \quad P_n(z) = 0 \Rightarrow |z| \geq r .$$
- 17)** (C09) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. On considère $\sum f(t) \frac{t^n}{n}$.
- Montrer que cette série converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) \ln(1-t) = 0$.
Indication: vérifier que $|R_n(t)| \leq t^n |f(t) \ln(1-t)|$.
 - On suppose la convergence uniforme sur $[0, 1[$. Que dire ?
- 18)* (M08) Convergences de la série de fonctions $\sum_n \frac{nx^2}{n^3+x^2}$?
- 19)** (C07) Soit une suite (a_n) positive et décroissante, et $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$. a) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge simplement sur $[0, 1]$. b) Montrer que la convergence normale équivaut à ce que $\sum \frac{a_k}{k}$ converge. c) Montrer que la convergence uniforme sur $[0, 1]$ équivaut à ce que $\lim a_k = 0$.
- 20)** (X05) **Série de Riemann-Dirichlet.** Soit $u_n(\theta) = \frac{e^{i\theta \ln n}}{n}$.
- Convergence simple de $\sum u_n(\theta)$ et de $\sum (-1)^n u_n(\theta)$.
 - Montrer que les sommes partielles de ces séries sont uniformément bornées sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$.
- 21)** (L05) **Séries de Dirichlet générales.** Soit une suite complexe (a_n) et (λ_n) une suite réelle strictement croissante non bornée. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n e^{-\lambda_n z_0}$ converge. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ converge uniformément sur tout domaine de la forme $D_\theta = \{z \in \mathbb{C} / -\theta \leq \arg(z-z_0) \leq \theta\}$, pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 22)** (X04) Étudier $\sum_{p \geq 1} 2^{-p} \operatorname{th}(2^{-p} x)$ et montrer que sa limite est $\operatorname{coth} x - \frac{1}{x}$. Nature de la convergence, caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la limite. Recommencer avec $\tan$ au lieu de th . En déduire que la fonction $\operatorname{coth} x - \frac{1}{x}$

(respectivement, $\cotan x - \frac{1}{x}$) se prolonge en une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0. *Indication: dans le cas des tangentes, il y a convergence uniforme sur tout domaine de la forme $[-A, A] \setminus \pi\mathbb{Z}^*$.*

- 23)**(M04)** Étudier $\sum \frac{(-1)^{p-1} p}{p^2+x^2}$. *Indication: la convergence ne peut pas être normale ! Elle est pourtant uniforme sur $\mathbb{R}$ (grouper les termes 2 par 2, ou Abel). Pour C^n , étudier la dérivée n -ième de $1/(x^2+1)$.*
- 24)*(M00)** Étudier $\sum \frac{x}{p} - \ln(1 + \frac{x}{p}) = S(x)$, équivalent au voisinage de ∞ . *Indication: S est C^∞ : convergences uniformes sur $] -1, M]$. Comparer à $\int_1^\infty \frac{x}{t} - \ln(1 + \frac{x}{t}) dt$ qui se calcule. Réponse: $x \ln(x)$*
- 25)**(U07)** Étudier la convergence de $S(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{nt^n}{1-t^n}$, puis le comportement de S lorsque t tend vers 1^- .
Indication: $\frac{t}{(1-t)^2} \leq S(t) \leq \frac{2t}{(1-t)^2}$, inégalité de la moyenne géométrique. En fait, $S(t)$ vaut $\sum \sigma(n).t^n$ où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n et un équivalent en 1 est $\frac{\pi^2}{6(1-t)^2}$.
- 26)*(M00)** Soit $f_n(x) = \sin^2(\frac{\pi}{x})$ pour $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, et 0 ailleurs. Étudier la suite (f_n) et la série $\sum f_n$ (convergence simple, uniforme).
- 27)*(X07)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!}$.
- 28)*(X08)** Équivalent, lorsque x tend vers 1, de $1 + \sum_{n=1}^\infty n^k x^n$ (k entier fixé, puis réel dans $[0, 1]$).
- 29)**(C06)** Soit $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^4+x^4}$.
 a) Étude de convergence (simple, uniforme, normale...)
 b) Qualités de la somme (continuité, dérivabilité...)?
 c) Limites et équivalent $+\infty$. *Indication: Comparer à $g(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t^4+x^4}$. Réponse: équivalent de la forme $A.x^{-3}$ en $+\infty$.*
- 30)*(M07)** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (x-1) \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 + \frac{x-1}{n})$.
 a) Montrer que f existe et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 b) Calculer $f(x+1) - f(x)$.
- 31)* Un contre-exemple.** On pose $u_n(x) = \frac{1}{n} e^{-|x-n|}$ pour x réel et $n \geq 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément et absolument sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$? *Indication: pour majorer le reste, faire apparaître une somme de $-\infty$ à $+\infty$.*
- 32)*** Étudier $\sum \frac{x}{p(1+px^2)}$. *Réponse: la somme S est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et équivalente à $-2x \cdot \ln x$ en 0 (encadrements), à $\pi^2/(6x)$ en $+\infty$.*
- 33)*(M07)** Soit une série convergente $\sum a_n$ à termes complexes et une suite de fonctions continues b_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$; on suppose que l'on a pour tout x : $b_{n+1}(x) \leq b_n(x)$. Montrer que $S(x) = \sum a_n b_n(x)$ converge pour tout x appartenant à $[0, 1]$, et que cette convergence est uniforme. En déduire: $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
- 34)**(M03) Série eulérienne.** Étudier la convergence de cette série: $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{x^2+n^2}$, la limite de f en 0 et en l'infini, trouver un équivalent de f en 0. *Remarque: f se calcule en développant en série de Fourier la fonction paire et 2π -périodique définie sur $[0, \pi]$ par $x \mapsto \operatorname{ch}(xy)$.*
- 35)**(M07)** Soit $f_n(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x(1+n^2x^2)^2}}$.
 a) Étudier l'intégrabilité de f_n sur $]0, +\infty[$.
 b) Soit $u_n = \int_0^\infty f_n(t) dt$. Étudier le comportement de cette suite.
 c) Équivalent de (u_n) .
- 36)*(M09)** Justifier que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} e^{in\theta} = \int_0^1 \frac{dx}{e^{-i\theta} - x}$.

- 37)* (M09) Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x+1}$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.
- Préciser les domaines de définition de ces fonctions et comparer leurs valeurs quand c'est possible.
 - Limites de f quand x tend vers 0 et vers $+\infty$.
- 38)* (X08) Soit f continue sur $[0, 1]$ et $g_n(x) = \int_0^x f(t^n) dt$. Étudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite (g_n) .
- 39)* (C08) Soit $u_n(x) = \cos x \sin^n x$.
- Étudier le mode de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$, et calculer la somme; est-elle continue ?
 - Calculer $\sum_{p=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^p x dx$.
- 40)* Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f_n(x) = x \cos^n(x) \sin(nx)$. Convergence simple ? uniforme ? Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- 41)* Idem pour $f_n(x) = \frac{nx-1}{(1+x \ln n)(1+nx^2 \ln n)}$ sur $[0, 1]$.
- 42)** (U05) $\zeta(2k)$.
- Montrer que pour $y \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et $z = 2iy$ on a : $y \cotan(y) = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$.
 - En déduire qu'il existe un réel $r > 0$ et une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, si $|z| < r$ alors $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$. Donner une relation de récurrence sur les (B_n) et calculer B_0, B_1, B_2 .
 - Montrer que pour $|y|$ suffisamment petit, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{(\pi n)^2 - y^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n) y^{2n}}{\pi^{2n}}$.
 - Calculer $\zeta(2n)$ pour $n = 1$ et 2 .
 - En déduire enfin que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} \in \mathbb{Q}$.
- 43)** Soit $[a, b] \subset]0, 1[$ et $f(x) = 2x(1-x)$. a) Montrer que la suite $(f^n(x))$ définie par $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ converge vers $\frac{1}{2}$, uniformément sur $[a, b]$. Est-ce uniforme sur $]0, 1[$?
- Soit $\mathbb{Q}_2$ l'ensemble des nombres rationnels dyadiques. Montrer que toute fonction polynôme P peut être approchée uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_2[X]$.
 - En déduire que toute fonction continue sur $[a, b]$ est approchable uniformément par des fonctions polynômes à coefficients entiers.
 - Peut-on généraliser à d'autres intervalles ?
- 44)** (L01) On pose $Q_k(t) = C_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k$ où C_k est une constante telle que $\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 2\pi$.
- Montrer que $\forall \delta \in]0, \pi]$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} (Q_k(t)) = 0$.
 - Soit $P_k(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t-s)}{2\pi} Q_k(s) ds$ où f est une fonction 2π -périodique, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $(P_k)_{k \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$.
- 45)* (C) Soit E un sous espace de dimension finie p de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit (f_n) une suite de E qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f . Prouver que $f \in E$ et que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
- 46)* (C03) **Fonctions hölderiennes.** Soit $\alpha \in]0, 1]$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$; soit $A_\alpha(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{C}$, bornées sur I et vérifiant

$$\exists C > 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

- Montrer que $A_\alpha(I)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et que tout f de $A_\alpha(I)$ est uniformément continue sur I .
- Montrer que f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ pour $x > 0$ n'appartient pas à $A_\alpha(] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} [)$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$.
- Montrer que N définie par $N(f) = \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\alpha}$ est une norme sur $A_\alpha(I)$ et que $(A_\alpha(I), N)$ est complet.

d) Est-ce que toute suite de $A_\alpha(I)$, de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme, converge dans $(A_\alpha(I), N)$?

47)(E05) a) Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, telle que (f'_n) converge uniformément vers g et il existe x_1 tel que $(f_n(x_1))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f telle que $f' = g$.

b) Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^m$ sur $[a, b]$, telle que $(f_n^{(m)})$ converge uniformément vers g et il existe $x_1, \dots, x_m$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $(f_n(x_i))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f telle que $f^{(m)} = g$.

48)*(U) Soit une suite (f_n) de fonctions dérivables sur $[a, b]$, ayant des dérivées uniformément bornées (il existe M tel que pour tous n et x : $|f'_n(x)| \leq M$). On suppose que la suite (f_n) converge simplement. Montrer qu'elle converge uniformément. *Indication: couper $[a, b]$ assez finement.*

49)** Soit (u_n) une suite d'applications monotones de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers u continue. Démontrer que la convergence est uniforme. *Indication: utiliser la continuité uniforme pour partager $[a, b]$ en intervalles adjacents.*

50)** Soit (u_n) une suite d'applications convexes de I intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point). On suppose que (u_n) converge simplement vers u dans I .

a) Soit $[a, b] \subset I$. Démontrer qu'il existe A tel que, pour tout n et tout x, y dans $[a, b]$: $|u_n(x) - u_n(y)| \leq A|x - y|$. *Indication: introduire α et β dans I avec $\alpha < a$ et $b < \beta$ et faire intervenir les propriétés des pentes des sécantes joignant deux points du graphe d'une fonction convexe.*

b) En déduire que la convergence de (u_n) est uniforme dans $[a, b]$.

51)**(X05) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que l'application $f \mapsto \varphi \circ f$ est continue de E dans E .

52)**(X07) **Théorème de Dini.** Soit (u_n) une suite monotone de fonctions continues sur un compact K dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers u continue; on se propose de montrer que la convergence est uniforme.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas d'une suite (f_n) décroissante de fonctions continues de limite (simple) nulle.

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Soit: $F_n = \{x \in K / f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Montrer l'un des F_n est vide et conclure.

c) Prouver le résultat en introduisant $f_n(x_n) = \text{Max } f_n$ et utilisant une suite extraite.

53)**(U92) Soit un polynôme trigonométrique $f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ (à coefficients complexes) tel que pour tout x réel, $f(x)$ soit réel et strictement positif. Montrer qu'en fait il existe Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que $f(x) = |Q(e^{ix})|^2$ sur $\mathbb{R}$. *Indication: considérer le polynôme $P(x) = \sum_0^{2n} c_{k-n} x^k$.*

54)**(U) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques 1-périodiques P d'ordre inférieur ou égal à n et tels que $P(x) \geq x - \frac{1}{2}$ sur $[0, 1]$. On se propose d'étudier $\delta_N = \inf_{P \in \mathcal{T}_N} \int_0^1 P(x) dx$.

a) Montrer que $\delta_N \geq 0$ et même $\delta_N > 0$.

b) Montrer que $\delta_N \geq \frac{1}{2(N+1)}$.

c) Montrer que $\delta_N = \frac{1}{2(N+1)}$.

Indication: f étant un polynôme trigonométrique d'ordre N , à quelle condition sur m a-t-on $\int_0^1 f(x) dx =$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{k}{m}\right) ?$$

55)**(L) Soit P un polynôme trigonométrique d'ordre $\leq n$.

a) Si P n'est pas nul, il a au plus $2n$ zéros distincts sur $[0, 2\pi[$.

b) On suppose à présent que P ne prend que des valeurs réelles, et que $P'(0) = \text{Sup } |P'(t)|$. Montrer que $P'(0) \leq n \text{ Sup } |P(t)|$. *Indication: utiliser $S(t) = \frac{1}{n} P'(0) \sin nt - P(t)$; examiner le nombre de zéros de S, S', S'' et $S'''(0)$.*

c) Montrer qu'en général on a: $\|P'\|_\infty \leq n \|P\|_\infty$.