Programme de colles n° 1 : colles du 9/09 au 13/09

Les exercices de cette première semaine porteront sur les nombres complexes (avec trigonométrie éventuellement), les idéaux dans $\mathbb{Z}$ et les espaces vectoriels.

Chapitre introductif
- Ensembles, applications, familles.
- Relation d'équivalence, relation d'ordre, ensemble $\mathbb{N}$.
- Dénombrabilité : définition, exemples de $\mathbb{N}^*$, de $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{Q}$.
- Rappels sur les groupes, anneaux et corps.
- Idéal d'un anneau commutatif. Idéaux de $\mathbb{Z}$. Lien avec la divisibilité.
- Rappels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; racines n-èmes de l'unité.

Algèbre linéaire : espaces vectoriels et applications linéaires
- Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, espaces de suites et de fonctions) ; algèbres et sous-algèbres.
- Sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels engendrés par une partie A : $\mathrm{Vect}(A)$;
- Familles libres et génératrices, bases ;
- Cas de la dimension finie n : dimension d'un espace vectoriel, conditions sur le cardinal d'une famille libre et sur celui d'une famille génératrice ;
- **Somme et somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels (programme de deuxième année).**
- Formule de la dimension : $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$.
- Rang d'une famille de vecteurs ; invariance du rang par opérations élémentaires sur les vecteurs ;
- Base adaptée à une décomposition en somme directe ;
- Applications linéaires : définition, caractérisation de l'injectivité avec le noyau, de la surjectivité avec l'image ;
  - Une application linéaire est bijective si et seulement si elle envoie une base sur une base ;
  - Existence et unicité d'une application linéaire définie sur une base ;
  - Formule du rang et conséquence : en dimension finie, injectivité, surjectivité et bijectivité sont équivalentes.
- Polynômes interpolateurs de Lagrange : existence et unicité.
- Endomorphismes particuliers : homothéties, projecteurs, symétries ; décomposition de l'espace en somme directe : $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$ pour un projecteur, $E = \ker(s - I_E) \oplus \ker(s + I_E)$ pour une symétrie.
- Formes linéaires et hyperplans.

Prévisions pour la semaine 2 : matrices, polynômes.

Questions de cours spécifiques du programme 1 (les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncer toute définition, tout théorème ou toute propriété du cours (sans démonstration).
- Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx+y)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx+y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Définition d'un idéal I d'un anneau commutatif A.
  Si I et J sont deux idéaux de A, l'ensemble $I + J = \{a + b,\ (a, b) \in I \times J\}$ est un idéal de A (appelé idéal somme des idéaux I et J).
- (Exercice de cours) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note s_n le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n et on pose

$$u_n = (-1)^{s_n} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

  1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = -u_n$.
  2. Démontrer à l'aide d'une récurrence sur $\mathbb{N}$ que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$:

$$S_{2n} = u_n \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = 0.$$

- Propriété du cours :

$$d = \mathrm{pgcd}(a, b) \iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \iff \big(d | a \ \text{ et } \ d | b \ \text{ et } \ \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ \lambda a + \mu b = d\big)\ .$$

- Racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Interprétation géométrique.