Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 2 **: colles du 16/09 au 20/09**

Algèbre linéaire : matrices
— Matrices des composantes d'une famille de vecteurs, matrice d'une application linéaire ;
— Produit de matrices ; traduction en termes de composition d'endomorphismes.
— Matrices définies par blocs ; produit par blocs ;
— Transposée ; traduction matricielle de la relation linéaire $y = f(x)$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$;
— Matrices de passage d'une base à une autre ; changement de coordonnées ;
— Matrices carrées : matrices diagonales et triangulaires ; matrices nilpotentes ; sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques ;
— Rang d'une matrice : relations avec le rang d'une application linéaire, d'un système de vecteurs. Les matrices A et $A^\top$ ont même rang.
— Matrices inversibles : le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$.
— Matrices semblables.
— Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme :
  — L'application trace est une forme linéaire ;
  — Tr(AB)= Tr(BA) ; deux matrices semblables ont la même trace ;
  — la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
— Définition rigoureuse et identification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
— Opérations sur les polynômes, degré, division euclidienne ; idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
— Structure de $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}[X]$; les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$.
— Dérivation formelle - lien avec la dérivée en analyse ; formule de Taylor.
— Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés ; somme et produit des racines pour un polynôme scindé.
— Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$.
— Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$.

Prévisions pour la semaine 3 : arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal, déterminants.

Questions de cours spécifiques du programme 2 (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncer toute définition, tout théorème ou toute propriété du cours (sans démonstration).
- Formule $E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Les matrices carrées qui commutent avec toutes les autres matrices sont les matrices scalaires.
- Exercice de cours : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  1. Établir que $\mathrm{rg} A = 1$ si et seulement s'il existe une matrice L non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et une matrice C non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que : $A = CL$.
  2. Si $\mathrm{rg} A = 1$, montrer que $A^2 = (\mathrm{tr} A) A$.
- Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors les matrices de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont semblables.
  Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases a priori différentes.
- Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$. Alors il existe un unique polynôme unitaire $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{I} = S \cdot \mathbb{K}[X]$.
- Décomposition du polynôme $X^4 + 1$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.