Programme de colles n° 3 : colles du 23/09 au 27/09

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

— Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, PGCD (définition en termes d'idéaux), identités et théorème de Bézout, lemme de Gauss.
— Polynômes d'endomorphismes et de matrices ;
si $f \in \mathcal{L}(E)$, $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$ et $(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$, et résultat similaire pour les matrices.
— Polynôme minimal d'un endomorphisme (resp. d'une matrice).
Définition, exemples, base de $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Déterminant et systèmes linéaires (rappels de MPSI et polynôme caractéristique)

— Groupe symétrique et applications n-linéaires.
  — Transpositions, décomposition d'une permutation en produit de transpositions ; définition d'un cycle ;
  — Signature d'une permutation : c'est un morphisme de groupes, qui vaut -1 pour toute transposition.
— Applications multilinéaires, des formes n-linéaires et formes n-linéaires alternées.
  — Antisymétrisation d'une forme n-linéaire ;
  — L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur un ev de dimension finie E est de dimension 1.
— Déterminant.
  — déterminant d'une famille de vecteurs ; caractérisation des bases et des familles liées ;
  — déterminant d'un endomorphisme ; cas des automorphismes ;
  — déterminant d'une matrice carrée ; égalité du déterminant d'une matrice et de sa transposée ;
  — déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs (4 blocs) ; calcul du déterminant des matrices triangulaires.
— Développement d'un déterminant :
  — Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne ;
  — comatrice ; $A(Com(A))^\top = (Com(A))^\top A = \det(A) I_n$; formule donnant l'inverse d'une matrice carrée (inversible) 2×2.
— Application à l'orientation de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$; bases directes et indirectes.
— Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme (définitions) ; théorème de Cayley-Hamilton (démonstration dans le cas des matrices 2×2) ;
— Déterminant de Vandermonde : calcul, application à l'existence et à l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange.
— Etude générale des systèmes linéaires : systèmes homogènes, rang, résolution numérique par le pivot de Gauss.
— Systèmes de Cramer, formules de Cramer.
— Inversion d'une matrice carrée.

⚠
L'utilisation du polynôme caractéristique en réduction n'est pas au programme de cette semaine.

Prévisions pour la semaine 4 : début de la réduction.

Questions de cours spécifiques pour la semaine 3 (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Soit d le degré du polynôme minimal de f. Alors $\mathbb{K}[f]$ est un espace vectoriel de dimension d et la famille $(\mathrm{id}_E, f, ..., f^{d-1})$ est une base de cet espace.
- Deux matrices semblables possèdent les mêmes polynômes annulateurs, et donc le même polynôme minimal.
- Si le polynôme minimal de f s'écrit $\pi_f = (X-a)^2$ pour un scalaire $a \in \mathbb{K}$, expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de f^n à l'aide de f et de id_E.
- Définition de la signature d'une permutation avec le nombre d'inversions. Calcul de la signature d'une transposition, puis calcul de la signature d'une permutation au choix du colleur (par deux méthodes : en calculant le nombre d'inversions et en décomposant en produit de transpositions).
- La relation « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E et elle admet deux classes d'équivalence.
- Définition et expression du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\chi_A = X^n - (\mathrm{tr} A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

(les termes en pointillés ne sont pas à préciser).