**Programme de colles n° 4 : colles du 30/09 au 4/10**

**Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes**

- Sous-espaces stables, endomorphisme induit ; $\mathrm{Im}\,(P(v))$ et $\ker(P(v))$ sont stables par $u$ si $u$ et $v$ commutent ; caractérisation matricielle à l'aide de bases adaptées.
- Valeurs propres, vecteurs propres, spectre, sous-espaces propres $E_\lambda(u)$.
  - Les sous-espaces propres sont en somme directe et toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
  - En dimension finie $n$, le spectre admet au plus $n$ éléments.
- Polynômes annulateurs ; si $P(u) = 0$, toute valeur propre de $u$ est une racine de $P$.
- Réduction en dimension finie.
  - Polynôme caractéristique d'une matrice carré (notation $\chi_A$), d'un endomorphisme (notation $\chi_u$).
  - Polynôme minimal d'une matrice carrée (notation $\pi_A$), d'un endomorphisme (notation $\pi_u$).
  - Théorème de Cayley-Hamilton.
  - Les valeurs propres de $u$ sont exactement les racines de $\chi_u$, ainsi que de $\pi_u$.
  - Si $F$ est un sous-espace stable de $E$, et $u_F$ est l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$, alors $\chi_{u_F}$ divise $\chi_u$.
  - Ordre de multiplicité $m(\lambda)$ d'une valeur propre $\lambda$ ; $\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$.
- Diagonalisation
  - Définition pour les endomorphismes, pour les matrices ;
  - Equivalence des quatre propriétés suivantes :
    (i) $u$ est diagonalisable.
    (ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ formée de vecteurs propres pour $u$.
    (iii) L'espace $E$ est somme directe des sous-espaces propres : $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}\,(u)} E_\lambda(u)$.
    (iv) La somme des dimensions des sous-espaces propres de $u$ est égale à $\dim E$.
  - L'endomorphisme $u$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.
  - Si le polynôme caractéristique $\chi_u$ est simplement scindé (c'est-à-dire scindé à racines simples), alors $u$ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites.

⚠
**Le lemme des noyaux, la caractérisation de la diagonalisabilité à l'aide des polynômes annulateurs et la trigonalisation ne sont pas au programme de cette semaine.**

**Prévisions pour la semaine 5 :**
**réduction avec les polynômes annulateurs ; trigonalisation ; applications de la réduction.**

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (les démonstrations doivent être connues) :

- Énoncer toute définition, tout théorème ou toute propriété du cours (sans démonstration).
- Détermination du polynôme caractéristique et des sous-espaces propres de la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 (par deux méthodes : la première étant un calcul direct, la seconde exploitant le fait que la matrice $J_n$ est de rang 1).
- Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans le cas d'une matrice $2 \times 2$ et dans le cas d'une matrice diagonalisable.
- La dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité $m(\lambda)$ de la valeur propre $\lambda$. De plus, si $\lambda$ est une racine simple de $\chi_u$, alors $E_\lambda(u)$ est une droite vectorielle.
- Equivalence des quatre propriétés suivantes (en dimension finie) :
  **(i)** $u$ est diagonalisable.
  **(ii)** Il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ formée de vecteurs propres pour $u$.
  **(iii)** L'espace $E$ est somme directe des sous-espaces propres : $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
  **(iv)** La somme des dimensions des sous-espaces propres de $u$ est égale à $\dim E$.
- (Dans cette question, on admet l'équivalence des quatre propriétés du point précédent).
  L'endomorphisme $u$ est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

  1) le polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ;
  2) pour toute valeur propre de $u$, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité $m(\lambda)$.