Programme de colles n° 5 : colles du 7/10 au 11/10

Algèbre linéaire : tout le chapitre de réduction (programmes de colle 4 et 5).
Rappel : dans ce chapitre réduction, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

- Réduction et polynômes.
  - Lemme de décomposition des noyaux : soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, P_2, ..., P_k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, de produit égal à P. Alors, si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a la somme directe :
  $$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \cdots \oplus \ker P_k(u).$$
  - Utilisation des polynômes annulateurs : un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples, ou encore si et seulement si son polynôme minimal π_u est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.
  - Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et F un sous-espace stable, l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.
- Trigonalisation
  - Définition pour les endomorphismes, pour les matrices.
  - Théorème : u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé.
  - Caractérisation : les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour $u \in \mathcal{L}(E)$:
    (i) L'endomorphisme u est trigonalisable.
    (ii) L'endomorphisme u possède un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$.
    (iii) Le polynôme minimal de u est scindé sur $\mathbb{K}$.
  - Cas des endomorphismes nilpotents.
  - Sous-espaces caractéristiques (si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, $N_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id_E)^{m(\lambda)}$ est le sous-espace caractéristique associé à λ et $m(\lambda)$ la multiplicité de la valeur propre λ).
  - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme possédant un polynôme annulateur scindé. Alors E est la somme directe de sous-espaces F_i (les sous-espaces caractéristiques de u) stables par u, tels que pour chaque F_i, l'endomorphisme induit par u sur F_i soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Ecriture matricielle.
- Applications de la réduction
  - Calcul de puissances d'une matrice A : en dimension n quelconque si A est diagonalisable, en dimension 2 ou 3 si A diagonalisable ou trigonalisable (les calculs doivent être guidés dans ce dernier cas).
  - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : écriture sous forme matricielle et expression du terme général.

Prévision pour la semaine 6 : rappels de MPSI sur les suites - début des espaces vectoriels normés.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (sauf précision contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- (5/2 uniquement) Lemme de décomposition des noyaux.
- Les trois propriétés suivantes sont équivalentes (on admet le lemme de décomposition des noyaux).
  (i) L'endomorphisme u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
  (ii) L'endomorphisme u possède un polynôme annulateur simplement scindé sur $\mathbb{K}$.
  (iii) Le polynôme minimal de u est simplement scindé sur $\mathbb{K}$ (et vaut $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$).
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si le polynôme caractéristique de u est simplement scindé sur $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.
  Réciproque fausse : donner un contre-exemple.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
- (Dans cette question, on admet le point précédent)
  Les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$:
  (i) L'endomorphisme u est trigonalisable.
  (ii) L'endomorphisme u possède un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$.
  (iii) Le polynôme minimal de u est scindé sur $\mathbb{K}$.
- Méthodes de calcul des puissances d'une matrice 2×2, diagonalisable ou trigonalisable.