Programme de colles n° 6 : colles du 14/10 au 18/10

Algèbre linéaire : tout le chapitre de réduction.

Analyse : rappels sur les suites à valeurs réelles et complexes.
— Convergence, théorème d'encadrement, suites adjacentes.
— Exemples de suites récurrentes de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ où f réelle (calculs guidés).
— Équivalent, relation de domination et négligeabilité (petit « o » et grand « O »).

Analyse : espaces vectoriels normés
— Généralités
  — Normes, exemples (N_∞, N_1 et N_2 sur $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, sur l'espace $C^0([a;b], \mathbb{C})$).
  — Distances associées, boules, sphères.
  — Parties convexes, bornées. Applications bornées.
  — Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé.
  — Applications lipschitziennes d'une partie d'un espace normé E dans un autre espace normé F.
  — Topologie d'un espace normé : ouverts, fermés, point adhérents, points intérieurs; adhérence d'une partie, intérieur, frontière. Caractérisation séquentielle d'un fermé, d'un point adhérent.

⚠
Pas de développement limité, pas d'exercice sur la topologie induite, pas de normes équivalentes. La continuité sera quant à elle pour la semaine suivante.

Prévisions pour la semaine 7 : espaces vectoriels normés (suite).

Questions de cours spécifiques pour la semaine 6 :

- Étude (monotonie et convergence) de la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

- Définition de la convexité. Une boule ouverte d'un espace vectoriel normé E est une partie convexe de E.
- Boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
- Si (f_n) est la suite d'applications définies sur $[0;1]$ par $f_n : x \mapsto x^n$, alors la suite (f_n) converge vers l'application nulle pour les normes N_1 et N_2 mais pas pour N_∞.
- (Extrait de l'exercice 34 de la banque d'exercices CCINP 2024)
  Caractérisation séquentielle d'un point adhérent.
  Si A est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, son adhérence $\overline{A}$ est également un sous-espace vectoriel de E.
- Le sous-espace des matrices symétriques est une partie fermée, non ouverte, convexe et non bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.