Mathématiques
Année 2024-2025

Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 7 : colles du 4/11 au 8/11

Espaces (vectoriels) normés

- La partie du programme 6 concernant les espaces vectoriels normés.
- Topologie induite.
- Norme dominée par une autre. Normes équivalentes, traduction en termes de convergence des suites.
- Limite
  - Définition de la limite d'une fonction $f : A \subset E \to F$ en un point adhérent a à A ;
  - Opérations sur les limites.
- Relations de négligeabilité et de domination en un point (pour les fonctions).
- Continuité
  - Continuité sur un sous-ensemble A d'un espace normé E.
  - Exemples d'applications continues ; opérations usuelles.
  - Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
  - Espace vectoriel des fonctions continues d'un ensemble A dans un espace normé F.
  - Continuité des applications lipschitziennes.
  - Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
- Compacité
  - Définition par la propriété de Bolzano-Weierstrass.
  - Lien avec les fermés bornés, produit fini de compacts.
  - Compacts de $\mathbb{K}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
  - Application continue sur un compact ; théorème de Heine.
- Espaces normés de dimension finie
  - Equivalence des normes en dimension finie.
  - Caractérisation de la convergence d'une suite par celle des composantes.
  - Propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée d'un espace normé de dimension finie possède une suite extraite convergente.
  - Caractérisation de la continuité d'une fonction par celle des composantes.
  - Continuité des applications linéaires.
    Toute application linéaire u d'un espace normé E de dimension finie à valeurs dans un espace normé F quelconque est lipschitzienne, donc continue (voir question de cours spécifique à la fin de ce programme).

Prévisions pour la semaine 8 : continuité des applications multilinéaires, connexité par arcs ; fonctions d'une variable réelle.

Questions de cours spécifiques pour la semaine 7 (les démonstrations doivent être connues) :

- Définition d'un compact ; l'image d'un compact par une application continue reste un compact.
- Théorème de Heine : toute application continue sur un compact y est uniformément continue.
- L'application distance
$$d : \left|\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \|x_1-x_2\| = d(x_1,x_2) \end{array}\right.$$
  est continue car 2-lipschitzienne (la norme sur l'espace produit étant définie par $N_\infty((x_1,x_2)) = \max(\|x_1\|,\|x_2\|))$.
- Montrer que la suite d'applications $(x\mapsto x^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, dans l'espace $C^0([0;1],\mathbb{R})$ normé par la norme infinie, ne possède aucune valeur d'adhérence. En déduire que dans ce cas, la boule unité fermée n'est pas compacte.
- Définition d'une partie dense d'un espace normé E. Soit A une partie dense de E, et soient f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x\in A$, $f(x)=g(x)$, alors $f=g$.
- Soit $u : E\to F$ une application linéaire. Alors il y a équivalence des propositions suivantes :
  (i) $\exists k>0 /\ \forall x\in E,\ \|u(x)\|_F \le k\|x\|_E$.
  (ii) L'application u est lipschitzienne de rapport k.
  (iii) L'application u est continue sur E.
  (iv) L'application u est continue en 0_E.