Programme de colles n° 8 : colles du 12/11 au 15/11

Espaces vectoriels normés

— Norme subordonnée.
— Continuité des applications bilinéaires et multilinéaires pour des espaces de dimension finie.
— Continuité du déterminant ; $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— Connexité par arcs
  — Chemin continu joignant deux éléments de E.
  — Partie connexe par arcs, étoilée par rapport à un point. Lien avec la convexité.
  — Composantes connexes par arcs.
  — Connexes par arcs de $\mathbb{R}$.
  — Théorème des valeurs intermédiaires.

Analyse : fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (rappels de MPSI)

— Continuité, dérivabilité.
— Formules de Taylor avec reste intégral et de Taylor-Young. Inégalité de Taylor-Lagrange.
— Développements limités classiques, opérations usuelles sur les développements limités.
— Equivalents classiques.

Analyse : fonctions convexes (rappels de MPSI)

— Définition, caractérisation à l'aide du barycentre de n points.
  ⚠ **Conformément au programme, pas de développement général sur les barycentres.**
— Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
— Le graphe d'une fonction convexe se situe en-dessous de ses sécantes.
— Caractérisation (pour des fonctions suffisamment dérivables) par le caractère croissant de la dérivée, ou la positivité de la dérivée seconde.
— Le graphe d'une fonction convexe dérivable se situe au-dessus de ses tangentes ; inégalités de convexité classiques avec le logarithme et l'exponentielle.

Prévisions pour la semaine 9 : séries.

Questions de cours spécifiques pour cette semaine (sauf mention contraire, les démonstrations doivent être connues) :

- Définition de la norme subordonnée : si $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$,

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E},$$

  et propriété de sous-multiplicativité.
- Soit B un sous-ensemble de E. La relation

$$x \sim y \iff \text{il existe un chemin continu dans } B\text{, joignant } x \text{ à } y$$

  définit une relation d'équivalence sur l'ensemble B.
- Tracé des graphes des fonctions sinus sur $[-\pi/2; \pi 2]$ et Arcsin sur $[-1; 1]$.
  Domaine de définition de la dérivée d'Arcsin et expression de cette dérivée (avec la démonstration).
  Tracé des graphes des fonctions cosinus sur $[0; \pi]$ et Arccos sur $[-1; 1]$.
  Domaine de définition de la dérivée d'Arccos et expression de cette dérivée (avec la démonstration).
- Développements limités classiques à un ordre quelconque (sans démonstration) :
  $\star$ exponentielle et fonctions associées (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, cosinus et sinus).
  $\star$ $x \mapsto 1/(1-x)$ et fonctions associées ($x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$, $x \mapsto \ln(1-x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan(x)$).
- Développement limité classique (sans démonstration) : $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et application (avec démonstration) à l'obtention du développement limité de la fonction Arcsin en 0, à l'aide de coefficients binomiaux.
- Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes ($p(PR) \leq p(RQ)$).