Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 9 : colles du 18/11 au 22/11

Analyse : fonctions vectorielles de la variable réelle

- Dérivabilité ; caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
  Stabilité par combinaison linéaire, par composition avec une fonction de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Composition avec une application linéaire, bilinéaire.
- Inégalité des accroissements finis.
- Fonctions de classe C^k, $k \geq 2$.

⚠
Les formules de Taylor (vectorielles) seront vues dans un chapitre ultérieur .

Analyse : séries dans un espace normé de dimension finie (avec rappels de MPSI)

- Généralités : définitions, lien entre suite et série.
- Espace vectoriel des séries convergentes.
- Condition nécessaire de convergence, séries géométriques.
- Séries de nombres réels positifs :
  - caractérisation de la convergence ; séries de Riemann ;
  - théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.
- Séries de nombres réels strictement positifs : règle de d'Alembert.
- Séries alternées :
  - Théorème de convergence quand la valeur absolue du terme général décroît et converge vers 0 ;
  - Séries alternées de Riemann.
- Convergence absolue :
  - La convergence absolue entraîne la convergence ; réciproque fausse.
  - Exemples : exponentielle sur $\mathbb{C}$, exponentielle matricielle (non approfondie dans ce chapitre).
  - Espace vectoriel des séries absolument convergentes.
  - Comparaison d'une série à une intégrale. Cas particuliers de séries de Bertrand.
  - Formule de Stirling.
  - Sommation des relations de comparaison. Application au développement asymptotique de la série harmonique (avec 3 termes).

Prévisions pour la semaine 10 : sommabilité, intégration sur un segment.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point), $f : I \to E$ une application dérivable en $x_0 \in I$ et $u : E \to G$ une application linéaire de E dans G (où E et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie). Alors l'application $u \circ f : I \to G$ est dérivable en x_0 et $(u \circ f)'(x_0) = u(f'(x_0))$.
  De plus, si f est de classe C^1 sur I, alors $u \circ f$ est également de classe C^1 sur I.
- Nature des séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in]0;1[$ (comparaison série-intégrale).
- Nature des séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ (comparaison série-intégrale).
- Règle de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs.
- La convergence absolue entraîne la convergence pour une série de termes à valeurs dans un espace normé de dimension finie.
- Convergence de la série définissant l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ et propriété $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$ à partir d'un produit de Cauchy.