Lycée Pothier - MP1
F. Blache

Programme de colles n° 12 **: colles du 9/12 au 13/12**

Analyse : intégrales généralisées
Révision du programme de colles de la semaine précédente.

Analyse : suites et séries de fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- Convergence simple d'une suite de fonctions.
- Convergence uniforme d'une suite de fonctions ; interprétation géométrique.
  - Lien avec la norme infinie, dans le cas de fonctions bornées.
  - Convergence uniforme sur tout segment d'un intervalle réel I.
  - Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
  - Théorème de la double limite (démonstration hors programme).
- Cas des séries de fonctions : convergence simple, caractérisation de la convergence uniforme par la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle.
- Convergence normale d'une série.
  La convergence normale entraîne la convergence absolue et la convergence uniforme.
- Intégration sur un segment d'une suite de fonctions continues ; convergence en moyenne.
- Théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale en cas de convergence uniforme **sur un segment** (en particulier intégration terme à terme d'une série de fonctions continues **sur un segment**).

Prévisions pour la semaine 13 : dérivabilité pour les suites/séries de fonctions - convergence dominée.

Questions de cours spécifiques (les démonstrations doivent être connues) :

- Le produit de deux fonctions f et g, continues et de carré intégrable sur I, est intégrable sur I (en admettant le caractère continu par morceaux du produit), et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_I |fg| \leq \sqrt{\int_I f^2}\sqrt{\int_I g^2}.$$

- La convergence uniforme sur I entraîne la convergence uniforme sur tout segment de I ; réciproque fausse (contre-exemple à développer : $f_n(x) = x^n$ sur $I = [0;1[$).
  La convergence uniforme sur tout segment de I entraîne la convergence simple sur I.
- Conservation de la continuité en un point par passage à la limite uniforme pour une suite de fonctions (énoncé et démonstration dans le cas où la convergence uniforme a lieu sur tout l'intervalle I).
- Exercice de cours : pour $g_n(x) = \dfrac{nxe^{-x}}{1+nx}$, étude de la convergence simple et de la convergence uniforme de la suite de fonctions (g_n) sur $I = [0;1]$, sur $I =]0;1]$ et sur tout segment de $]0;1]$.
- La convergence normale d'une série de fonctions sur un intervalle I entraîne sa convergence absolue et sa convergence uniforme sur I.
- La fonction zêta de Riemann : $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue et décroissante sur $]1;+\infty[$.
  Détermination des limites de la fonction ζ en 1^+ et en $+\infty$.